И.Б. ШУБИНСКИЙ

Структурная надежность информационных систем

Методы анализа

ШУБИНСКИЙ И.Б.

СТРУКТУРНАЯ НАДЕЖНОСТЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Методы анализа

ООО «Журнал Надежность»
Москва, 2012 г.

ББК 32.972
Л76
УДК 681.31

Шубинский И.Б.
Структурная надежность информационных систем. Методы анализа / И.Б. Шубинский. – М.: «Журнал Надежность», 2012, – 216 с., ил.

ISBN……….

В книге приведены основные понятия и показатели структурной надежности информационных систем, показана общность и специфические отличия показателей надежности, применяемых в отечественных и международных стандартах. Отражены недавние изменения в подходах к моделированию надежности. Подробно описаны Марковские модели надежности и графовые полумарковские методы расчета надежности, которые проиллюстрированы многочисленными примерами. Значительное внимание уделено инженерным методам расчета и приближенного прогнозирования структурной надежности информационных систем, оценкам погрешностей расчетов, а также статистической оценке показателей надежности. В конце каждой главы содержатся контрольные вопросы по наиболее сложному и значимому материалу главы.

Книга рассчитана, в первую очередь, на специалистов, занимающихся практической работой по разработке, производству, эксплуатации и модификации информационных систем. Она предназначена научным работникам в области структурной надежности различных дискретных систем, преподавательскому составу, аспирантам и студентам, специализирующимся в области информационных систем, а также в области автоматизированных систем управления.

УДК 681.31
ББК 32.972

ISBN ………

ПРЕДИСЛОВИЕ

В последнюю четверть XX века человечество вступило в новую стадию своего развития – стадию построения постиндустриального общества, которое является результатом происходящей в современном мире социально-экономической революции. Известно, что в основе каждой социально-экономической революции лежат свои специфические технологии, производственно-технологические системы и производственные отношения. Для постиндустриального общества эту роль, прежде всего, играют информационные технологии и компьютеризированные системы, высокие производственные технологии и инновационная организация различных сфер человеческой деятельности. Ее конечным результатом должно стать создание новой формы организации экономики – инновационной экономики. Создание инновационной экономики является стратегическим направлением развития каждой страны в первой половине XXI века.

Информационные технологии, компьютеризированные системы и высокие производственные технологии являются базовыми системами инновационной экономики. Они в своем развитии радикально трансформируют все средства получения, обработки, передачи и производства информации, радикально технологизируют интеллектуальную деятельность. Отсюда исключительная важность построения надежных и функционально безопасных информационных систем. Это должно быть основой для качественного и эффективного функционирования инновационной экономики.

Обеспечение надежности информационной техники находилось и находится в центре внимания всех специалистов, кто напрямую или косвенно связан с ее разработкой, производством и эксплуатацией. За все годы развития цифровой техники интенсивность отказов элементной базы уменьшилась на шесть порядков. При этом плотность монтажа возросла на те же шесть порядков. В составе информационной системы тысячи таких цифровых элементов, каждый из которых представляет собой программно – аппаратное устройство, выполняющее множество различных функций. Миниатюризация цифровой техники обеспечила возможность широкого применения структурного резервирования и на этой основе построить высоконадежные цифровые устройства в составе информационной системы.

Теперь уже центральной проблемой обеспечения надежности информационной системы становится безошибочное выполнение предусмотренных в системе функциональных задач, которые технически реализуются с помощью информационных процессов. Актуальность этой проблемы обусловлена тем, что частота ошибок в работе информационной системы и связанных с ними функциональных отказов значительно превышает частоту отказов цифровой техники, а сами функциональные отказы могут быть критичными для окружающей среды и объектов управления. В связи с этим в рамках общей теории надежности возникла потребность в формировании нового раздела: «Функциональная надежность», который совместно с классическими наработками в области надежности, названными нами разделом «Структурная надежность», должен охватывать всю совокупность известных в настоящее время факторов, влияющих на надежность функционирования и на эксплуатационную надежность информационной системы.

Объект функциональной надежности – это различного рода действия, как автономные, так и совокупности действий, которые можно интерпретировать в виде процессов. Применительно к информационным системам объектами являются логические функции, микрооперации, операции и др., процессы сбора, обработки, анализа, хранения, передачи информации, управления подчиненными объектами.

Предмет функциональной надежности – анализ и синтез безошибочности выполнения действий и процессов в целом. Применительно к информационным системам предметом является оценка и минимизация ошибок в выполнении предусмотренных действий или информационных процессов, защита от функциональных отказов.

В целом теория и практика структурной надежности информационных систем решает задачи обеспечения бесперебойности их работы на основе применения надежных цифровых элементов, обеспечения комфортных условий их работы, применения структурного резервирования на уровне элементов, устройств и подсистем, рациональной организации технического обслуживания, рационального построения ЗИП и т.д. Теория и практика функциональной надежности решает задачи построения и рационального сопровождения интегрированного в информационной системе надежного программного обеспечения, защиты от отказов и, особенно, сбоев цифровых элементов, защиты от ошибок операторов, от ошибок во входной информации. Отсюда следует целесообразность комплексного решения задач обеспечения и функциональной и структурной надежности информационных систем.

С этой целью предполагается опубликовать три раздельные книги, связанные между собой общим замыслом.

В предлагаемой читателю первой книге «*Структурная надежность информационных систем. Методы анализа*» данного проекта приведены основные понятия и показатели структурной надежности информационных систем, Марковские модели надежности и графовые полумарковские методы расчета надежности, которые проиллюстрированы многочисленными примерами. Значительное внимание уделено инженерным методам расчета и приближенного прогнозирования структурной надежности информационных систем, оценкам погрешностей расчетов, а также статистической оценке показателей надежности.

Во второй подготовленной к публикации книге «*Функциональная надежность информационных систем. Методы анализа*» ***впервые представлена теория функциональной надежности информационных систем как составная часть общей теории надежности***. Она включает понятия и определения; основные угрозы нарушения функциональной надежности информационных систем; систему показателей; методы оценки функциональной надежности цифровых устройств; методы и модели оценки функциональной надежности программного обеспечения. В отдельной главе рассмотрена функциональная надежность критически важных информационных систем, в том числе понятие критически важной системы, особенности оценки сбойных ошибок, оценки функциональной надежности операторов, оценки опасных отказов и рисков, требования к функциональной надежности и к архитектуре программного обеспечения критически важных информационных систем.

В третью книгу «*Обеспечение надежности информационных систем*» будет включен следующий материал:

– Общие положения (жизненный цикл надежности информационной системы, наблюдаемость и управляемость, избыточность и резервирование, отказоустойчивость, ошибкоустойчивость, информационная защищенность, программа обеспечения и доказательство надежности).

– Резервирование в информационных системах.

– Обеспечение надежности программных средств.

– Адаптивная отказоустойчивость информационно – управляющих систем.

– Обеспечение функциональной надежности и безопасности критически важных информационных систем.

– Испытания и эксплуатация информационных систем.

Разделы, пункты, рисунки и таблицы первой, второй и третьей взаимосвязанных книг пронумерованы латинскими цифрами I, II и II соответственно.

Во всех трех книгах в конце каждой главы содержатся контрольные вопросы по наиболее сложному и значимому материалу главы.

Все три указанные книги рассчитаны, в первую очередь, на специалистов, занимающихся практической работой по разработке, производству, эксплуатации и модификации информационных систем. Они предназначены научным работникам в области надежности программно – аппаратных систем, профессорско-преподавательскому составу, аспирантам и студентам, специализирующимся в области информационных технологий, в области информационных систем, а также в области автоматизированных систем управления.

ВВЕДЕНИЕ

Любая деятельность человека представляет собой процесс сбора и переработки информации, принятия на ее основе решений и их выполнения. Термин «***информация***» происходит от латинского *informatio* – разъяснение, изложение, осведомленность. В Федеральном Законе [1] информация представлена как «сведения (сообщения, данные) независимо от формы их представления». С появлением современных средств вычислительной техники информация стала выступать в качестве одного из важнейших ресурсов научно-технического прогресса. С понятием «информация» связаны материальные средства передачи, переноса, приема информации и канала связи между источником и приемником. Применительно к техническим системам это понятие включает в себя все сведения, являющиеся объектом информационных процессов сбора, хранения, обработки, передачи и преобразования. В ходе эволюции человечества просматривается устойчивая тенденция к автоматизации этих процессов на основе прогрессивных технологий.

Технология – это совокупность знаний о способах и средствах проведения производственных процессов, при которых происходит качественное изменение обрабатываемых объектов. Древние греки считали, что технология (*techne* – мастерство + *togos* – учение) – это мастерство (искусство) делать вещи. Более емкое определение это понятие приобрело в процессе индустриализации общества. Технологиям управляемых процессов свойственны упорядоченность и организованность, которые противопоставляются стихийным процессам. Исторически термин «технология» возник в сфере материального производства. Информационную технологию в данном контексте можно считать технологией использования программно-аппаратных средств компьютерной техники в данной предметной области.

Информационная технология – это совокупность методов, производственных процессов и программно-технических средств, объединенных в технологическую цепочку, обеспечивающую сбор, обработку, хранение, распространение и отображение информации с целью снижения трудоемкости процессов использования информационного ресурса. В указанном выше Федеральном Законе приведено следующее определение: «информационные технологии – процессы, методы поиска, сбора, хранения, обработки, предоставления, распространения информации и способы осуществления таких процессов и методов». Это определение предполагает применение информационной техники как материальной основы информационной технологии, а также, хотя и в косвенной форме, рациональное использование информационных ресурсов той информационно – телекоммуникационной среды, в которой реализуется данная информационная технология.

Информационные технологии основываются на следующих базовых положениях:

• предметом (объектом) обработки (процесса) является *входная информация*;

• целью процесса является получение *информационного продукта* (*выходной информации*);

• средствами осуществления процесса являются программно-аппаратные средства *информационной техники*;

• предметной областью являются процессы сбора, преобразования, обработки и передачи информации;

• выбором управляющих воздействий на процессы, который должен осуществляться *лицами, принимающими решение*;

• критериями оптимизации процессов являются своевременность доставки информации пользователю при условии рационального использования информационных ресурсов, *надежность, достоверность, полнота* информации.

Из всех видов технологий информационная технология сферы управления предъявляет самые высокие требования к «человеческому фактору», оказывая принципиальное влияние на квалификацию работника, содержание его труда, физическую и умственную нагрузку, профессиональные перспективы и уровень социальных отношений.

Информационная техника представляет собой материальную основу информационной технологии, с помощью которой осуществляется сбор, хранение, передача и обработка информации. До середины XIX века, когда доминирующими были процессы сбора и накопления информации, основу информационной техники составляли перо, чернильница и бумага. Понадобилось еще много лет, чтобы перейти от запоминания и передачи информации к ее переработке. Это стало возможно с появлением во второй половине нашего столетия такой информационной техники, как электронные вычислительные машины, положившие начало «компьютерной технологии».

Информационная система – это совокупность содержащейся в базах данных информации и обеспечивающих ее обработку информационных технологий и технических средств. В общем виде, можно дать только некоторые основные признаки информационной системы предприятия (компании):

1. Соответствие потребностям компании, бизнесу компании, согласованность с организационно-финансовой структурой компании, культурой компании.

2. Интегрированность.

3. Открытость и масштабируемость.

В первом признаке и скрыты все функциональные признаки информационной системы конкретной компании, они строго индивидуальны для каждой компании. Второй и третий признаки общие, но совершенно конкретные.

Второй признак означает, что информационная система (ИС) – это не только совокупность программ автоматизации бизнес-процессов компании (управления производством, ресурсами и компанией), – это сквозная интегрированная автоматизированная система, в которой каждому отдельному модулю системы (отвечающему за свой бизнес-процесс) в реальном времени (или близком к реальному) доступна вся необходимая информация, вырабатываемая другими модулями.

Информационная система должна быть открытой для включения дополнительных модулей и расширения системы как по масштабам и функциям, так и по охватываемым территориям. Исходя из сказанного, информационной системе компании (или, как принято называть корпоративной информационной системе) можно дать следующее определение: «корпоративная информационная система – это открытая интегрированная автоматизированная система реального времени по автоматизации бизнес-процессов компании всех уровней, в том числе и бизнес-процессов принятия управленческих решений. При этом степень автоматизации бизнес-процессов определяется исходя из обеспечения максимальной прибыли компании».

Информационные системы предприятия (компании, корпорации) – это многофункциональные программно – аппаратные комплексы, осуществляющие сбор, преобразование, накопление, обработку, передачу информации, а также управление (или поддержку принятия решений по управлению) подчиненными объектами.

На основе информационных систем нижнего уровня иерархии строятся ИС более высоких уровней иерархии, на которые возлагаются большее число функций и более ответственные задачи. Так, в транспортных системах управления на базе локальных вычислительных сетей, распределенных баз данных и автоматизированных рабочих мест (АРМов) [2] построены центры управления перевозками сетевого и регионального уровней, связанные между собой цифровыми сетями передачи данных (информационными сетями). На основе локальных вычислительных сетей, цифровых и комбинированных сетей передачи данных оперативно – технологического назначения, АРМов поездных диспетчеров строятся сети диспетчерского управления на железнодорожном транспорте.

Несмотря на большое разнообразие ИС, они имеют ряд общих признаков. Основные из них:

• информационные системы строятся для достижения определенных целей и для функционирования в определенном режиме;

• предусмотренные задачи решаются в реальном масштабе времени;

• обмен информацией осуществляется с большим количеством абонентов;

• имеет место относительная неизменность выполняемого комплекса программ в течение всего времени эксплуатации;

• ИС состоят из значительного, порой очень большого числа компонентов;

• большие объемы информации перерабатываются в каждом цикле управления;

• структура ИС оперативно перестраивается под решаемые задачи;

• объем и стоимость составных программных средств соизмеримы, а в ряде случаев превышают объем и стоимость аппаратных средств;

• содержат покупные элементы с большим числом возможных вариантов конфигурирования;

• содержат компоненты с различными уровнями и типами доверия к безопасности;

• многие ИС являются критически важными системами, у которых велика цена ошибки в результатах выполнения предусмотренных задач.

Информационные системы по своей природе сложны. Одни состоят из подсистем, часть из которых уникальны и являются результатами собственных разработок, другие же образованы типовыми продуктами от различных производителей. Система в целом может строиться из подсистем и даже отдельных элементов системным интегратором, который не обязательно применяет собственные разработки, но осуществляет проектирование, конфигурирование, взаимодействие подсистем и составных элементов, а также их настройки. Каждая система выполняет множество функций, содержит многоуровневую внутреннюю структуру, множество внешних и внутренних интерфейсов. Составляющие отдельные элементы могут реализовывать одну или несколько функций и компоноваться в виде одного или нескольких продуктов информационных технологий.

Как уже ранее отмечалось, применительно к информационным системам следует говорить о двух классах надежности: *структурной* и *функциональной*. Классическая (общепринятая) теория надежности представляет собой научную дисциплину, изучающую закономерности возникновения отказов и восстановлений аппаратуры и исследующую эффективность мероприятий по повышению надежности технических средств. Расчеты надежности проводятся применительно к последовательным, параллельным или смешанным структурам из составных элементов этих технических средств. В теории систем понятие *структура* отражает наиболее существенные взаимоотношения между элементами и их группами (подсистемами), которые мало меняются при изменениях в системе и обеспечивают существование системы и ее основных свойств [3]. Структура – это совокупность элементов и связей между ними. Структура может быть представлена графически, в виде теоретико – множественных описаний, матриц, графов и других языков моделирования структур. Приведенные рассуждения свидетельствуют о допустимости наименования традиционной теории надежности как *структурной надежности*.

Цель и задачи структурной надежности направлены на достижение способности информационной системы выполнять предусмотренные функции в реальных условиях работы и технического обслуживания. Эта способность обеспечивается совокупностью свойств, таких как: безотказность, готовность, ремонтопригодность, долговечность и сохраняемость или определенными сочетаниями этих свойств. Свойства сохраняемости и долговечности систем в зарубежных работах принято относить к области стоимости их жизненного цикла, хотя накопленные знания российской (и, особенно, советской школы) свидетельствуют о целесообразности комплексного использования всех перечисленных свойств в интересах обеспечения структурной надежности информационных систем. В первой книге монографии представлена система показателей безотказности, готовности и ремонтопригодности применительно к информационным системам в трактовках как российских, так и зарубежных стандартов. Приведены также определения и формульные выражения комплексных показателей структурной надежности информационных систем, таких как коэффициенты оперативной готовности и, особенно, сохранения эффективности. В целом следует подчеркнуть, что структурная надежность есть классическая надежность, в рамках которой решались и в настоящее время решаются задачи обеспечения надежного фундамента для функционирования систем.

Основная отличительная особенность задач структурной надежности информационных систем состоит в сложности их структур, что, в свою очередь, приводит к большой размерности моделей анализа их надежности. Прежде всего, важно определить, какие показатели и для каких целей нужно применять в исследованиях структурной надежности информационных систем. После решения этой задачи следует сконцентрировать усилия на развитии существующих и при необходимости разработке новых более эффективных методов построения и решения моделей большой размерности для анализа надежности сложных восстанавливаемых систем, таких как информационные системы. Изложение этих вопросов находится в центре внимания данной книги.

Часть I. СТРУКТУРНАЯ НАДЕЖНОСТЬ

Глава I.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ СТРУКТУРНОЙ НАДЕЖНОСТИ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

I.1.1.Свойства структурной надежности

Структура информационной системы (ИС) – это совокупность взаимосвязанных объектов, объединенных для выполнения предусмотренных задач. Объектами ИС являются функционально законченные составные элементы системы, такие как: серверы, устройства памяти, системы хранения данных, автоматизированные рабочие места операторов (АРМы), сети передачи информации, устройства ввода и вывода информации, средства отображения коллективного пользования, устройства печати, электроснабжения, кондиционирования и др. Информационные системы имеют локальную или распределенную структуру. Локальными обычно бывают офисные ИС с взаиморасположенными объектами. Распределенные ИС в большинстве своем имеют несколько иерархических уровней и содержат разнесенные в пространстве составные взаимосвязанные объекты. Отсюда следует, что определение структурной надежности ИС должно базироваться на определении надежности объекта. В настоящее время, несмотря на наличие в области надежности международных стандартов, межотраслевых и отраслевых национальных стандартов, единое толкование надежности объекта, и, в частности, объекта информационной системы, отсутствует. Однако четко прослеживается тенденция рассматривать надежность технического объекта как совокупность ряда существенных свойств, которая придает объекту способность функционировать.

Надежность – *способность объекта выполнять предусмотренные функции в течение заданного интервала времени в данных условиях работы и технического обслуживания.*

Это определение основывается на терминологии стандарта [8] с учетом определения надежности, приведенного в международном стандарте [9].

Надежность – комплексное свойство, которое в зависимости от назначения объекта ИС может включать готовность, безотказность, ремонтопригодность, долговечность и сохраняемость или определенные сочетания этих свойств. Информационные системы делятся на две большие группы: бортовые ИС, стационарные ИС. ***Бортовые системы*** выполняют свои задачи через случайные интервалы времени и могут находиться на транспортировке. Некоторые бортовые ИС могут иметь однократное применение (например, на ракетах – носителях космических аппаратов). Для ИС однократного применения *достаточно ограничиться свойствами безотказности, ремонтопригодности и сохраняемости.* Надежность бортовых систем многократного применения есть комплексное свойство, включающее все перечисленные свойства надежности в полном объеме. ***Стационарные ИС*** работают непрерывно в течение почти всей длительности жизненного цикла, даже тогда, когда осуществляется техническое обслуживание отдельных устройств и подсистем. В надежности стационарных ИС принято учитывать свойства готовности, безотказности, ремонтопригодности и долговечности.

Безотказность – свойство объекта (системы) непрерывно сохранять работоспособное состояние в течение некоторого времени или наработки, где под *наработкой* понимается продолжительность или объем работы изделия. Здесь уместно провести некоторую аналогию между безотказностью технического объекта и здоровьем человека. Формирование высокого уровня безотказности объекта путем применения высоконадежных составных элементов и узлов, путем создания облегченных режимов работы, хороших климатических условий функционирования и др. в определенной мере соответствует формированию здорового организма человека путем создания хороших условий жизни, питания, здоровой наследственности, защиты от стрессов и т.д. Безотказность есть свойство объекта работать без отказов в течение требуемого времени. С течением времени ресурс безотказности объекта уменьшается подобно тому, что с возрастом убывает заложенный в человеке ресурс здоровья. Конечно, можно снизить скорость уменьшения ресурса безотказности объекта путем введения в него избыточности. Это относится к отдельной теме обеспечения отказоустойчивости, истоки которой опять – таки следует искать в организации живого организма, – будь то человек, животное, насекомое или растение. Безотказность объекта следует рассматривать как самостоятельное свойство надежности без совмещения с характеристиками отказоустойчивости.

Ремонтопригодность – способность объекта, заключающееся в приспособленности к поддержанию и восстановлению работоспособного состояния путем технического обслуживания и ремонта. Объект ремонтопригоден, если выполняются следующие условия: объект *обслуживаем*, поддается *восстановлению* и *ремонт* его возможен. Под ***техническим обслуживанием объекта*** подразумевается комплекс операций по поддержанию объекта в состоянии работоспособности или возвращение объекта в состояние работоспособности при использовании этого объекта по назначению. Понятие *«поддается восстановлению»* означает, что в рассматриваемой ситуации предусмотрено восстановление работоспособного состояния. В свою очередь, ***восстановление*** – это процесс перевода объекта в работоспособное состояние из неработоспособного состояния. Для восстановления должен быть подготовленный для обслуживания объекта персонал, специальные помещения и технические средства для диагностики состояния исправности, измерительные приборы и средства для выполнения предусмотренных операций технического обслуживания. Кроме того, должна быть сформирована соответствующая конструкция аппаратуры. Например, модульная структура с типовыми элементами замены. В информационных системах нарушение работоспособности в результате перемежающихся отказов может быть устранено путем восстановления на системном уровне в результате перезапуска информационного процесса, очистки памяти и др. Если замена отказавшего элемента или узла аппаратуры невозможна, то производится их ремонт на объекте или на ремонтном предприятии.

Ремонт – это комплекс операций по восстановлению работоспособности объекта информационной системы и восстановлению его ресурсов. В целом *система технического обслуживания и ремонта* – это система взаимосвязанных средств, документации для технического обслуживания и ремонта и специалистов по обслуживанию системы и ее составных частей. В стандарте [10] предусмотрены следующие виды ремонтов объекта: капитальный, средний, текущий, плановый, неплановый, регламентированный, ремонт по текущему состоянию. Для информационных систем наиболее характерны два вида ремонта: текущий и ремонт по текущему состоянию. Ремонт включает локализацию неисправности, устранение неисправности и проверку функционирования. *Текущий ремонт* выполняется для поддержания или восстановления работоспособности объекта путем восстановления или замены отказавших его элементов.

Ремонт по текущему состоянию отличается тем, что контроль технического состояния объекта выполняется в объеме и в сроки, определяемые технической документацией, а объем и начало ремонта определяются техническим состоянием объекта.

Долговечность – свойство объекта сохранять работоспособное состояние до наступления предельного состояния при установленной системе технического обслуживания и ремонта. *Предельное состояние* – состояние объекта, при котором его дальнейшая эксплуатация недопустима или нецелесообразна, либо восстановление его работоспособного состояния недопустимо или нецелесообразно. С понятием предельного состояния связан так называемый *ресурсный отказ,* т.е. отказ, в результате которого объект достигает предельного состояния. Признаки предельного состояния, установленные в нормативно – технической и/или проектной документации, принято называть *критерием предельного состояния*. В зависимости от условий эксплуатации могут быть два или более критериев предельного состояния объекта.

Долговечность объекта характеризуется рядом составных временных характеристик: ресурс, остаточный ресурс, назначенный ресурс, срок службы, назначенный срок службы. ***Ресурс*** – суммарная наработка объекта от начала эксплуатации или после ремонта до перехода в предельное состояние. ***Остаточный ресурс*** – суммарная наработка объекта от текущего контроля его состояния до перехода в предельное состояние. ***Назначенный ресурс*** – суммарная наработка, при достижении которой дальнейшая эксплуатация объекта может быть прекращена независимо от его технического состояния. ***Срок службы*** – календарная продолжительность эксплуатации объекта от начала его эксплуатации или после ремонта до перехода в предельное состояние. ***Назначенный срок службы*** – календарная продолжительность эксплуатации, при достижении которой дальнейшая эксплуатация объекта может быть прекращена независимо от его технического состояния. Назначенный срок службы является характеристикой долговечности, во многих случаях связанной с экономическими интересами производителя. Чем меньше назначенный срок службы, тем у производителя чаще появляется возможность продавать свою продукцию, например, печатающее устройство, магнитный барабан, магнитный диск и т.п., хотя указанные и другие объекты ИС могут успешно эксплуатироваться еще длительное время.

Здесь уместно вести разговор об ***износе или старении*** объектов системы. Нельзя ограничиваться только физическим износом или старением некоторых объектов ИС. Для всех без исключения объектов информационной системы характерно ***моральное старение*** или ***экономическое старение.*** Имеется в виду, что фактор морального старения наступает, когда заказчику, пользователю или тем, кто эксплуатирует ИС, доступны объекты с лучшими характеристиками цена/качества или с большими функциональными возможностями, чем те, которые содержатся в данной системе. Фактор экономического старения имеет место тогда, когда экономически нецелесообразна дальнейшая эксплуатация какого – либо объекта или группы объектов или ИС в целом, хотя их физический износ еще не наступил и даже не скоро наступит. Для информационных систем типична более высокая скорость морального старения по сравнению с экономическим и, тем более, физическим старением или износом (рис I.1.1). На этом рисунке приведены зависимости от времени показателей цена/ качество (*Ц/К)* относительно морального старения (кривая *Смор (t)*), старения по причине экономической нецелесообразности дальнейшей эксплуатации объекта (кривая *Сэкон (t)*), физического старения или износа (кривая *Сфиз (t)*). Эти зависимости носят качественный характер. Тем не менее, отмечено, что уже через 5 лет эксплуатации вследствие мораль-

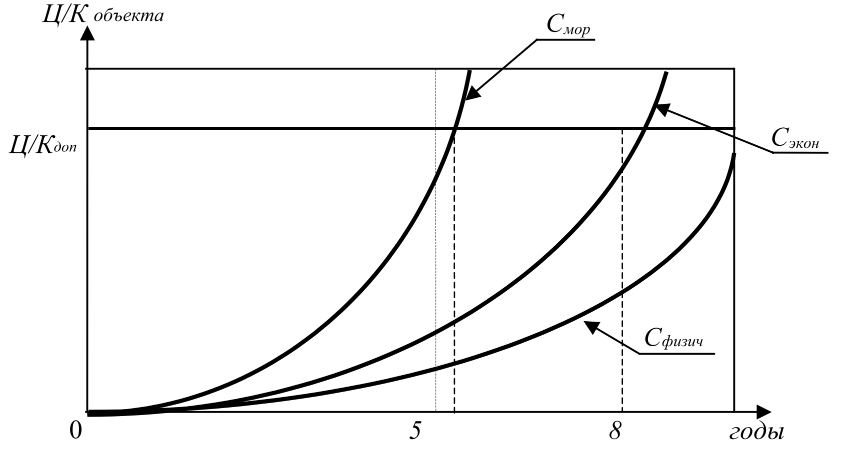

Рис. I.1.1. ***Графики изменения скорости морального, экономически нецелесообразного или физического старения объекта ИС по критерию цена/качество (Ц/К) с учетом допустимого значения этого критерия***

ного старения целесообразно заменять ряд объектов ИС на более совершенные, хотя физическое старение или износ таких объектов далеки от предельного состояния. Это связано с тем, что кривая морального старения объекта пересекает и далее превышает предельно допустимый уровень показателя *Ц/К* и, следовательно, дальнейшая его эксплуатация нерентабельна.

В международных изданиях структурная надежность (**Dependability**) технических систем, в том числе информационных систем, рассматривается как «наука об отказах» [11, 12]. Она включает в себя свойства безотказности (**Reliability**), ремонтопригодности (**Maintainbility**) и сохраняемости (**Storability**). Вместе с тем, в одном из основополагающих международных стандартов по надежности [9] принято, что структурная надежность включает свойства безотказности, ремонтопригодности и, в первую очередь, готовности (**Availability**). Это означает, что свойства долговечности и сохраняемости выведены за рамки технических аспектов надежности и отнесены к проблеме жизненного цикла объекта (системы), а к сфере надежности отнесены очень важные вопросы анализа и синтеза готовности объекта. В связи с этим в международных публикациях практикуется обозначать структурную надежность по заглавным буквам английской терминологии свойств безотказности, готовности и ремонтопригодности как RAM. Вопросам обеспечения RAM уделяется большое внимание. В этом направлении во многих промышленно развитых странах достигнуты значительные успехи. Вместе с тем, игнорирование свойства долговечности как составной характеристики надежности в информационных системах не оправдано. Гармонизация национальных стандартов по надежности с международными стандартами позволит объединить лучшие достижения отечественной науки и практики с накопленными знаниями и опытом других стран.

I.1.2. Отказы. Критерий отказа средств информационной техники

Безотказность средств информационной техники в основном определяется надежностью цифровых элементов и устройств. В обеспечении надежности цифровой элементной базы достигнуты впечатляющие успехи. За прошедшие 50 лет после создания первых ламповых цифровых устройств функциональная плотность средств информационной техники возросла более, чем на 6 порядков, при этом интенсивность отказов логических элементов также снижена почти на 6 порядков. Это обеспечило высокий уровень безотказности информационной техники. Известно, что в общем случае график безотказности имеет вид вогнутой кривой, показывающей изменение интенсивности отказов во времени. Начальный участок с высокой интенсивностью отказов известен в электронике как период «выжигания» дефектов, – он вызван дефектами производства и сборки.

За ним следует период постоянной интенсивности отказов в течение времени полезной работы и, наконец, период старения с резким ростом интенсивности отказов. Высокий уровень интеграции цифровой техники, применение развитых интеллектуальных систем автоматизации проектирования, практически полная автоматизация процессов изготовления интегральных схем, включая сверхбольшие интегральные схемы, – все это позволило коренным образом сократить ошибки проектирования и длительность периода «выжигания». Следует отметить, что требуемое время жизни информационной техники в информационных системах находится на уровне от 10 и редко до 30 лет. Период массового старения элементов в таких системах маловероятен. Это дает основание принимать постоянной интенсивность отказов средств информационной техники на основных этапах их жизненного цикла в стационарных условиях функционирования.

Согласно стандарту [8] под отказом понимается *событие, заключающееся в нарушении работоспособного состояния объекта*. В теории систем понятием «состояние» обычно характеризуют мгновенную фотографию, «срез» объекта, мгновенную остановку в его развитии. Другими словами *состояние* – это множество существенных свойств, которыми объект обладает в данный момент времени. *Работоспособное состояние* – это такое состояние объекта, при котором множество существенных свойств в полном объеме отвечает заданным требованиям. Это означает, что в данном временном «срезе» объекта значения всех существенных параметров находятся в установленных пределах, что характеризует надежность объекта в данном моменте времени. Определение *существенности* тех или иных свойств или параметров объекта относится к задаче формулировки *критерия отказа*, которая имеет исключительно важное самостоятельное значение и решается совместно со специалистами в предметной области исследуемого объекта.

Анализ (расчет, прогнозирование, оценивание) надежности системы может быть осмысленным, если сформулирован критерий отказа и определены виды отказов составных элементов системы. Под критерием отказа системы понимается условие или совокупность условий, при которых система переходит из работоспособного в неработоспособное состояние и наоборот. Определение этой совокупности условий, этой границы между работоспособными и неработоспособными состояниями информационной системы довольно сложная задача. Только в самых простых случаях имеется возможность однозначно изобразить события белыми или черными метками. Так, например, при основном соединении элементов существует только одно условие перехода системы из работоспособного в неработоспособное состояние – отказ любого элемента системы. Если опуститься на уровень элемента, то критерием его отказа является уход хотябы одного параметра за границы допуска. В приведенных примерах рассматривается простая система, которая может находиться только в двух состояниях: состоянии работоспособности (исправном) и состоянии отказа (неисправном). При отказе элемента простая система либо полностью прекращает выполнение своей функции, либо продолжает ее выполнение в полном объеме, если отказавший элемент зарезервирован.

Информационные системы – это сложные многофункциональные, многоканальные комплексы с различными видами избыточности. Процессы их функционирования моделируются математическими моделями с множествами состояний. Понятием «состояние» обычно характеризуют мгновенную фотографию, «срез» системы, остановку ее развития. Его определяют либо через входные воздействия и выходные результаты (в предметной области функциональной надежности), либо через состояния составных элементов (в предметной области структурной надежности). Примерами состояний системы, выраженных через состояния составных элементов, могут быть: исправны все n составных элементов системы (начальное состояние); отказал i-й элемент $(i \in n)$, все остальные элементы исправны, отказавший элемент своевременно обнаружен и восстанавливается и др. Таким образом, *состояние* – это множество существенных надежностных свойств, которыми обладает система в данный момент времени. Корректное описание каждого состояния системы возможно при условии совместной работы как специалистов в области надежности, так и разработчиков системы.

Сложная система при отказе отдельных элементов и даже целых подсистем не всегда теряет работоспособность – во многих случаях только снижаются характеристики ее эффективности. Это свойство затрудняет формулировку понятия «отказ системы». Для определения критерия отказа информационной системы обычно привлекается группа экспертов, составленная из специалистов в области надежности, разработчиков и заказчиков системы. Итогом работы этой экспертной группы является установление допустимого порога невыполнения системой части предусмотренных функций, а также установление допустимого количества работоспособных каналов.

Установление критерия отказа сложной системы возможно на основе достижения компромисса между интересами заказчика системы с одной стороны и разработчика с другой стороны. Заказчик стремится повысить порог требований к системе с тем, чтобы снизить количество допущений о приемлемости невыполнения тех или иных операций. Другими словами, заказчик стремится к уменьшению количества возможных неработоспособных состояний системы. Разработчик, наоборот, стремится к снижению порога требований к системе, к уменьшению затрат на обеспечение надежности. Естественно это влечет увеличение количества допустимых неработоспособных состояний системы. Таким образом, на экспертной основе находится разумное,

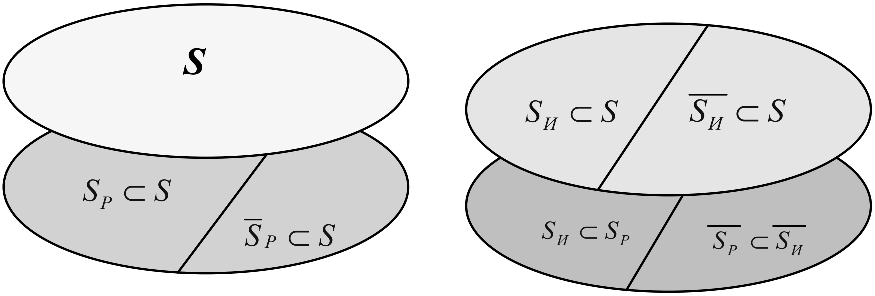

Рис. I.1.2. ***Подмножества состояний надежности системы***

логически обоснованное компромиссное решение, удовлетворяющее интересы заказчика и разработчика.

Формализуем понятие «критерий отказа» с помощью образов теории множеств. Пусть полное множество состояний надежности объекта обозначается символом S (рис. I.1.2). Подмножество исправных состояний – $S_И$. Подмножество неисправных состояний – $\overline{S}_И$. Очевидно, что оба эти подмножества образуют полное множество состояний надежности, т.е.

$$S = S_И \cup \overline{S}_И .$$

Подмножество работоспособных состояний – S_p , а подмножество неработоспособных состояний – $\overline{S}_P$ (рис. I.1.2). Оба эти подмножества также образуют полное множество состояний надежности, т.е.

$$S = S_p \cup \overline{S}_P .$$

Следует подчеркнуть, что подмножества исправных (неисправных) и работоспособных (неработоспособных) состояний между собой соответственно не совпадают, т.е.

$$S_И \neq S_P \text{ и } \overline{S}_И \neq \overline{S}_P .$$

Исправные состояния обязательно работоспособны, однако работоспособные состояния не обязательно признаются исправными. Причина единственная – принятый экспертами критерий отказа. Не каждая неисправность нарушает работоспособность объекта, с чем соглашаются и заказчик и разработчик. В соответствии с принятым критерием отказа при наличии определенных неисправностей объект остается в подмножестве работоспособных состояний. Например, в устройстве памяти содержатся невыявленные отказы отдельных элементов памяти – это средство по существу неисправно. Однако при многих наборах входных данных эти отказы не влияют на безотказность памяти в целом. Следовательно, подмножество исправных состояний включается в подмножество работоспособных состояний $S_И \subset S_p$. В подмножество работоспособных состояний

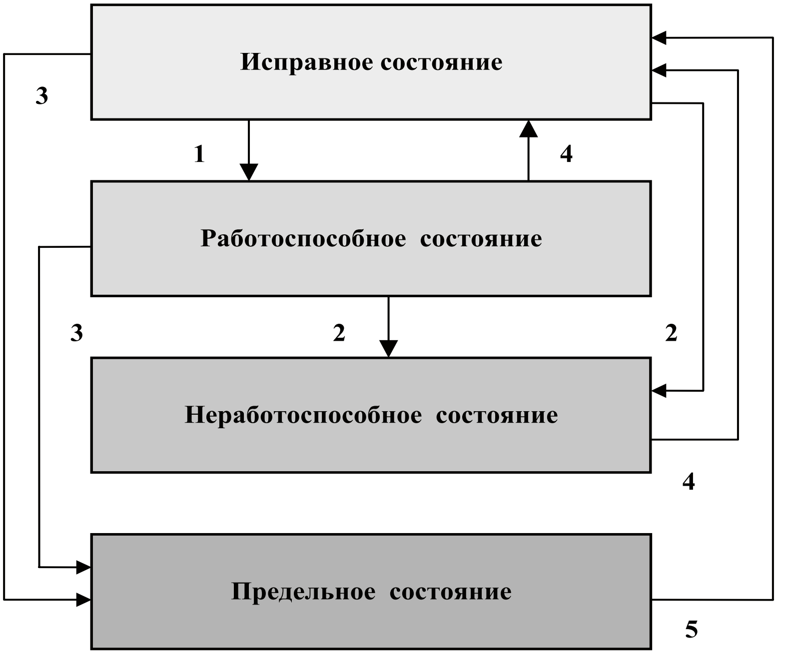

Рис. I.1.3. ***Схема состояний и событий объекта ИС*** входит также часть неисправных состояний. Само подмножество неработоспособных состояний включается в подмножество неисправных состояний $\overline{S}_р \subset \overline{S}_И$ (рис. I.1.2). При этом подмножество неисправных состояний за вычетом подмножества неработоспособных состояний $(\overline{S}_И \setminus \overline{S_р})$ является составной частью подмножества работоспособных состояний. Следовательно, подмножество работоспособных состояний (иначе говоря, состояний объекта до наступления отказа) определяется в образах теории множеств как

$$S_р = S_И \bigcup (\overline{S}_И \setminus \overline{S}_р).$$

Общая схема состояний и событий, приводящих к отказу объекта, показана на рис. I.1.3. На схеме показаны следующие условные обозначения: 1 – повреждение (событие нарушения исправного состояния объекта при сохранении работоспособного состояния); 2 – отказ; 3 – переход объекта в предельное состояние из – за морального старения, снижения эффективности эксплуатации или из-за неустранимого нарушения требований безопасности; 4 – восстановление; 5 – капитальный ремонт.

Формализованное описание критерия отказа позволяет глубже понять сущность проблемы определения критерия отказа каждого объекта, а затем и информационной системы в целом.

I.1.3. Внезапные и постепенные отказы

I.1.3.1. Внезапные отказы

По характеру изменения во времени параметров объекта отказы разделяются на внезапные и постепенные.

Внезапный отказ – отказ, характеризующийся скачкообразным изменением значений одного или нескольких параметров объекта. Такой тип отказа не имеет предыстории и вызван одной или несколькими причинами из множества возможных. Поток внезапных отказов обладает тремя главными свойствами: стационарность, ординарность, отсутствие последействия. ***Стационарными*** называют такие потоки событий, у которых вероятность возникновения определенного числа событий во временном интервале наблюдения не зависит от начала отсчета времени, а зависит только от длины этого временного интервала. ***Ординарность*** означает, что вероятность появления двух и более событий на достаточно малом отрезке времени пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью появления одного события и вероятностью не появления ни одного события. ***Отсутствие последействия*** означает независимость количества событий в последующих интервалах времени от событий, имевших место в предыдущих интервалах времени работы объекта.

Случайный поток событий, который обладает свойствами стационарности, ординарности, отсутствия последействия, в частности, поток внезапных отказов называется ***простейшим (пуассоновским) потоком***. Для этого потока вероятность того, что в интервале времени (*0, t*) наступит ровно *k* внезапных отказов, определяется формулой Пуассона, т.е.

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \qquad (1.1.)$$

где λ – параметр потока отказов.

Простейший поток внезапных отказов играет фундаментальную роль в исследовании структурной надежности информационно – управляющих систем. Так, например, зная параметр λ, можно определить вероятность того, что в интервале времени (*0, t*) возникнет более *n* внезапных отказов:

$$P(t, k > n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} P_k(t) = 1 - \sum_{k=0}^{n} P_k(t),$$

или определить вероятность того, что в интервале времени (*0, t*) не возникнет ни одного внезапного отказа

$$P(t) = P_0(t) = \frac{(\lambda t)^0}{k!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t},$$

При этом функция распределения времени до отказа (вероятность отказа) имеет вид

$$F(t) = Q(t) = 1 - P(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \qquad (1.2)$$

функция плотности (частота отказов) $f(t) = a(t) = \dfrac{dF(t)}{dt} = \lambda e^{-\lambda t}$

с математическим ожиданием $T = \int\limits_0^{\infty} P(t)dt = 1/\lambda$,

дисперсией времени безотказной работы

$$D = \int\limits_0^{\infty} t^2 f(t)dt - T^2 = 1/\lambda^2 \text{ и}$$

среднеквадратичным отклонением $\sigma = \sqrt{D} = 1/\lambda$, которое равно математическому ожиданию.

Формула (1.2) является знаменитым в теории надежности экспоненциальным (иногда его называют показательным) распределением, настолько знаменитым, что обозначение параметра этого распределения отображалось на обложках ряда книг по надежности. Эта формула получена из формулы Пуассона и свидетельствует, во-первых, о том, что параметр пуассоновского потока отказов совпадает с интенсивностью отказов объекта, и, во-вторых, о постоянной интенсивности внезапных отказов. Связывая этот результат с предыдущими рассуждениями о постоянстве интенсивности отказов средств информационной техники на основных этапах их жизненного цикла в стационарных условиях функционирования, можно полагать, что экспоненциальное распределение времени до отказа применимо при оценках нижнего уровня надежности информационной техники. Причина того, что речь идет об оценках только нижнего уровня надежности кроется в свойствах пуассоновского распределения, которые базируются на неопределенности исходной информации и принятой гипотезе об отсутствии последействия, ординарности, стационарности. По мере накопления новых сведений об условиях возникновения отказов точность расчетов повысится. Однако при этом надо учитывать не только внезапные отказы, но и возможности возникновения во времени других типов отказов.

I.1.3.2. Постепенные отказы

Постепенный отказ – отказ, возникающий в результате постепенного изменения значений одного или нескольких параметров объекта. Постепенные отказы наблюдаются главным образом в периферийном оборудовании информационной техники из-за износа и старения как механических элементов вследствие трения, вибраций, деструктивных климатических воздействий, так и, к сожалению, электронных элементов вследствие тех же деструктивных климатических воздействий, а также попадания смазочных масел и пыли. Конструкции и технологии изготовления современных принтеров, ксероксов, факсов, сканирующих устройств и др. обеспечивают возможность оперативной замены отказавших узлов. Однако это не исключает возникновения в них постепенных отказов. Эти обстоятельства показывают, что существуют два типа постепенных отказов:

– *Отказ вследствие изнашивания*: отказ, вероятность возникновения которого возрастает с течением времени из-за накапливаемых повреждений, вызванных трением в составных механических элементах.

– *Отказ вследствие старения*: отказ, вероятность возникновения которого возрастает из-за внешних возмущающих воздействий. Как и в предыдущих поколениях электронной техники, хотя и в меньшей степени, отказы вследствие старения обусловлены следующими основными причинами:

• Высокая температура и влажность в стойках аппаратуры, приводящие к растрескиванию изоляции, нарушению паек, коррозии или электролизу;

• Загрязнение воздуха (например, пылью, солями, сернистым газом), являющееся причиной коррозии и нарушений контактов;

• Удары и вибрации, ослабляющие жесткость монтажа и вызывающие закорачивание проводников, термоудары (из-за включений и выключений питания);

• Внешние воздействия при обслуживании и применении и др.

Для вычисления надежности объектов с типичным износом используется нормальное распределение (или распределение Гаусса). Оно зависит от двух параметров: математического ожидания времени работы до отказа T_0 и среднеквадратичного отклонения наработки на отказ σ. Плотность нормального распределения имеет колоколообразную форму, симметричную относительно среднего значения T_0. Нормальная плотность распределения отлична от нуля при $t < 0$. Этот недостаток несущественен, если $T_0 >> \sigma$. При этом условии частью кривой распределения при $t < 0$ можно пренебречь. Если это условие не выполняется, то использование нормального распределения приводит к погрешностям. Часть кривой распределения при $t < 0$ отсекают. Получают усеченное нормальное распределение.

В качестве модели отказов по причине износа или старения используются распределения Вейбулла-Гнеденко, а также распределение Эрланга. Следует отметить, что при большом значении числа r (уже при $r > 10$) распределение Эрланга трансформируется в нормальное распределение. При этом сохраняется математическая простота, присущая операциям над распределением Эрланга. В качестве модели случайного времени до восстановления широко применяется логарифмически нормальное распределение.

I.1.4. Скрытые отказы

В соответствии с [8] все отказы любого технического объекта разделяются на явные и скрытые. *Явный отказ* – отказ, обнаруживаемый визуально или штатными методами и средствами контроля и диагностирования при подготовке объекта к применению или в процессе его применения по назначению. ***Скрытый отказ*** – отказ, не обнаруживаемый визуально или штатными методами и средствами контроля и диагностирования, но выявляемый при проведении технического обслуживания или другими устройствами по внешним признакам. Эти определения затрагивают одну из центральных проблем надежности информационных систем – проблему оперативности обнаружения отказов. Дело в том, что любой отказ в ИС – скрытый. Это следует из того очевидного факта, что ни один отказ не может обнаруживаться мгновенно. Речь идет о длительности обнаружения. Если в системах общего назначения имеется возможность после обнаружения факта отказа заново выполнить предусмотренные задачи или часть из них, то в системах, реализующих информационные технологии в реальном масштабе времени, такая возможность отсутствует, поскольку необнаруженный своевременно отказ приводит к невыполнению задач управления.

В реальных средствах информационной техники в составе ИС всегда имеется естественный резерв времени, иначе – время перерыва в работе. Это объясняется следующим. Информационные системы выполняют предусмотренные задачи в реальном масштабе времени в жесткие директивные сроки, называемые циклами управления. Информационная составляющая команды управления подчиненным объектом дискретно изменяется по определенной траектории. При правильном выполнении информационного процесса расчетная траектория управления уточня-

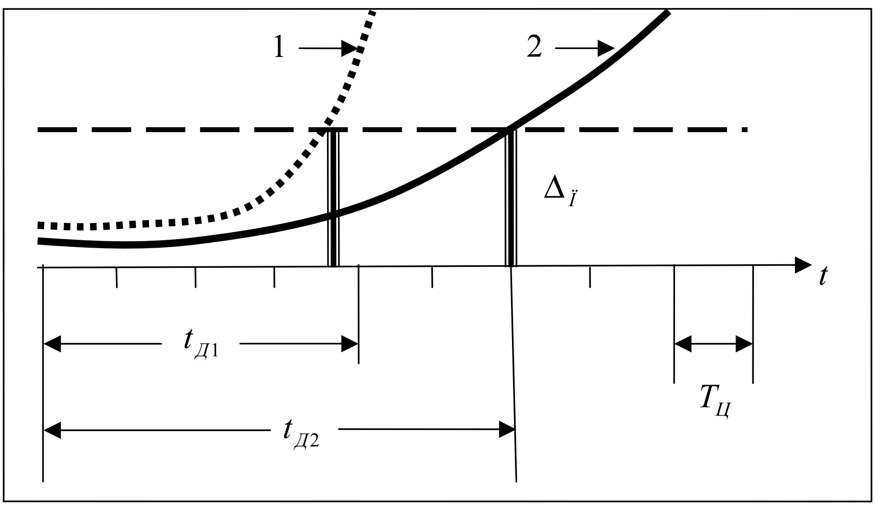

Рис. I.1.4. ***Качественные характеристики зависимости допустимого времени перерыва в работе $t_Д$ ИС от инерционности объекта управления, предельно допустимого отклонения $\Delta_П$ и длительности цикла управления $T_Ц$***

ется с периодичностью, равной длительности цикла управления $T_Ц$, а ее отклонения Δ от истинных значений находятся в допустимых пределах. На рис. I.1.4 проиллюстрирована зависимость времени перерыва в работе от инерционности объекта управления. Если в течение нескольких циклов вследствие отказов техники и вызванных ими или другими причинами ошибок в управлении траектория не уточняется, то отклонения расчетных значений от истинных достигают предельного значения $\Delta_П$. Это значит, что естественный резерв времени исчерпан и система находится на грани отказа, который может наступить в очередном цикле управления, если не будут устранены ошибки в управлении. Превышение предельной величины $\Delta_П$ вызывает срыв управления. Время, в течение которого отклонение расчетной траектории управления от истинной траектории достигает предельной величины, называют допустимым временем перерыва в работе $t_Д$ информационных систем. Чем менее инерционен объект управления (траектория 1 на рис. I.1.4), тем быстрее наступает предельное отклонение и тем меньше значение $t_Д$ и наоборот (траектория 2 на рис. I.1.4). Это допустимое время обычно в несколько раз превышает длительность цикла управления.

Наличие естественного резерва времени в информационных системах позволяет регулировать уровень их безотказности даже при отсутствии структурной избыточности. Покажем это, предварительно обозначив случайное время существования *i*-го скрытого отказа как ν_i, которое представляет собой сумму времени обнаружения $t_{обнi}$ и времени устранения $t_{уi}$ отказа (рис. I.1.5). Если время ν_i меньше или равно допустимому времени $t_Д$, то этим отказом в расчетах надежности ИС можно пренебречь, поскольку система успевает своевременно адаптироваться к данному отказу. В противоположном случае (*(i+1)*-ый отказ на рис. I.1.5 будет зафиксирован как отказ ИС.

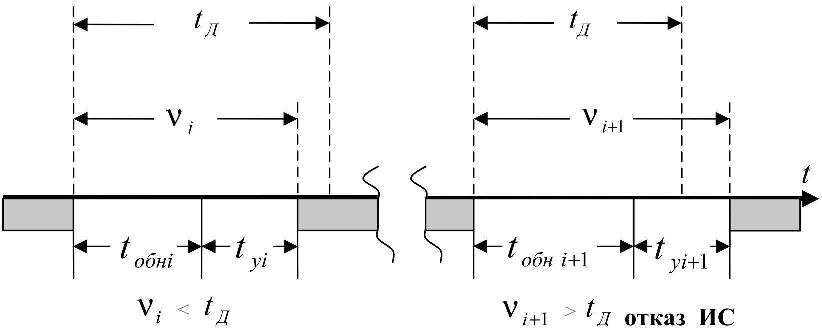

Рис. I.1.5. ***Иллюстрация взаимосвязи длительности скрытого отказа с допустимым временем перерыва в работе***

Чтобы повысить безотказность системы, нужно было бы, с одной стороны, увеличить допустимое время $t_Д$, а с другой стороны, уменьшить время обнаружения и устранения скрытого отказа. Поскольку ИС взаимодействует с конкретными объектами управления, характеризующимися определенной инерционностью, то следует рассматривать время $t_Д$ как заданное и не подлежащее искусственной регулировке. Вместе с тем известно много способов уменьшения времени существования скрытого отказа.

I.1.5. Сбои и перемежающиеся отказы

Подавляющая часть информационной техники – это дискретная техника. Она сформирована на базе цифровых устройств, которые с позиций надежности принципиально отличаются от аналоговых объектов тем, что подвергаются воздействию более опасных угроз, чем отказы техники, а именно: сбоев, самоустраняющихся и перемежающихся отказов.

Термин «сбой» трактуется неоднозначно. В частности предполагается, что вследствие ухода параметров дискретных элементов и устройств к границам рабочей области возникают неустойчивые состояния и элемент (устройство, система) в течение некоторого времени прекращает выполнение своих функций. Правильная работа аппаратуры в этом случае восстанавливается самопроизвольно, без вмешательства извне. Эта позиция нашла отражение в стандарте [8] , где ***сбой определяется как самоустраняющийся отказ, приводящий к кратковременному нарушению работоспособности.*** Причинами ухода параметров дискретных элементов к границам рабочей области могут быть изменения температуры, влажности, старение элементов, загрязнение контактов, влияние пыли и т.д. Такой подход сформировался при исследовании надежности электронных вычислительных машин (ЭВМ) общего назначения в начале 60-х годов XX столетия. Применительно к ЭВМ второго поколения было установлено, что интенсивность обнаруженных событий, не связанных с ремонтом техники и приводящих к кратковременному нарушению работоспособности устройств, в 20 раз выше интенсивности отказов, для устранения которых требуется проведение ремонта техники (такие отказы часто называются устойчивыми). При этом средняя длительность сбоев в исследованных ЭВМ общего назначения соответствовала одной – двум машинным операциям. Указанные результаты исследований в отношении соотношения интенсивности кратковременных и устойчивых нарушений работоспособности наблюдались и при эксплуатации последующих поколений вычислительной техники. Установлено, что по мере дальнейших изменений параметров и пересечения ими установленных границ области работоспособности дискретных элементов возникал так называемый ***перемежающийся отказ*** – *многократно возникающий самоустраняющийся отказ одного и того же характера.*

Принципиальная особенность изложенной позиции специалистов в отношении сбоев состоит в том, что ***рассматриваются только кратковременные нарушения работоспособности техники без взаимосвязи с реализуемыми информационными***

технологиями. Понимание этого позволяет избежать недоумений и путаницы в мнениях практиков, которые имели место длительное время. Правильное толкование содержания сбоя типа кратковременного самоустраняющегося отказа и связанного с ним перемежающегося отказа позволяет выработать рациональную стратегию обеспечения надежности и повышения эффективности эксплуатации информационной техники в информационно – вычислительных центрах, в информационных системах общего назначения.

I.1.6. Другие виды отказов

По характеру возникновения на различных этапах жизненного цикла отказы информационной техники ИС разделяются на конструктивные, производственные, эксплуатационные, деградационные и ресурсные.

Конструктивные отказы – отказы, возникающие по причинам, связанным с несовершенством или нарушениями установленных правил и/или норм проектирования и конструирования.

Производственные отказы – отказы, возникающие по причинам, связанным с несовершенством или нарушением установленного процесса изготовления или ремонта, выполняемого на ремонтном предприятии.

Эксплуатационные отказы – отказы, возникающие по причинам, связанным с нарушениями установленных правил и/или условий эксплуатации.

Деградационные отказы – отказы, обусловленные естественными процессами старения, изнашивания, коррозии и усталости при соблюдении всех установленных правил и/или норм проектирования, изготовления и эксплуатации.

Ресурсные отказы – отказы, в результате которых устройства информационной техники достигают предельного состояния.

Конструктивные и производственные отказы в большинстве своем проявляются на этапе приработки системы. Небольшая часть из них примерно с постоянной интенсивностью и достаточно редко проявляется в процессе эксплуатации системы. Эксплуатационные отказы обычно возникают по вине обслуживающего персонала. Чем выше квалификация, тем меньше эксплуатационных отказов. По мере повышения качества подготовки обслуживающего персонала интенсивность эксплуатационных отказов убывает.

Деградационные и ресурсные отказы характерны для завершающего этапа жизненного цикла системы – для этапа ее старения. Ранее отмечалось, что для информационно – управляющих систем массовое старение и износ оборудования маловероятны. Отказы этого типа возможны лишь в отдельных элементах периферийного оборудования информационной техники.

По степени влияния на другие элементы и устройства отказы бывают зависимые и независимые. ***Независимый отказ*** – отказ, не обусловленный влиянием других отказов. ***Зависимый отказ*** – отказ, обусловленный влиянием других отказов. На этапах разработки и производства информационной техники задача обеспечения независимости возможных отказов решается конструктивными и технологическими мерами.

По степени влияния на возможность дальнейшего функционирования информационной системы отказы разделяются на *полные и частичные*. Для их определения введем понятия функционирование и подготовка к функционированию информационной техники ИС.

<u>Функционирование</u> – состояние, при котором выполняется не менее допустимого количества и типов предусмотренных функциональных задач. При этом не исключается возможность восстановления отдельных отказавших технических средств,

которые в данном состоянии не привлекаются к решению задач. Подготовка к функционированию – состояние, в котором обслуживающим персоналом проводятся работы по обеспечению возможностей ИС выполнять все предусмотренные задачи. Иначе говоря, – это работы по обеспечению максимальной готовности ИС к функционированию. К состояниям подготовки следует отнести локализацию и устранение обнаруженных отказов, функциональные контроли технических средств, контроль сохранности магнитных носителей информации, профилактическое обслуживание информационной техники.

Переход системы в подмножество подготовки к функционированию может произойти либо по организационным причинам (проведение профилактического обслуживания, хранение, транспортировка, и т.д.), либо в результате возникновения такого события, когда дальнейшее функционирование ИС согласно техническим требованиям невозможно вследствие того, что из-за отказов составных средств не выполняется или неправильно выполняется более допустимого количества и типов функциональных задач. Это событие представляет собой ***полный отказ ИС.***

Подмножества состояний функционирования и подготовки к функционированию ИС с небольшим допущением можно полагать непересекающимися. Допущение относится к тому обстоятельству, что и в том, и в другом подмножествах состояний допускается восстановление отказавших составных технических средств. Это обстоятельство будет иметь ощутимое влияние только в тех случаях, когда скорости восстановления отказавших средств информационной техники и перераспределения задач на эти средства соизмеримы. В этих случаях можно полагать, что накопление отказов в информационной технике ИС отсутствует. На практике такая возможность встречается чрезвычайно редко.

Система переходит в подмножество состояний функционирования при совместном выполнении следующих условий: в результате обслуживания имеется достаточное количество исправных технических средств и устранены обнаруженные программные и другие ошибки. Система остается в этом же подмножестве и при событиях невыполнения или неправильного выполнения менее или равного допустимому количеству и типам функциональных задач. Такие события относятся к категории ***частичных отказов ИС***.

Контрольные вопросы

1. Приведите определение и перечислите основные свойства информационной технологии.

2. Перечислите и поясните основные признаки информационной системы.

3. Каковы объекты исследования структурной и функциональной надежности информационных систем?

4. Перечислите и поясните основные свойства структурной надежности систем.

5. Раскройте аббревиатуру RAM.

6. В чем состоит проблема определения критерия отказа информационной системы?

7. Какой тип отказов (внезапные отказы или постепенные) характерен для информационных систем и почему?

8. В чем заключается проблема скрытых отказов?

9. При каких условиях допустимо продолжение работы информационной системы при наличии частичных отказов?

Глава I.2. ПОКАЗАТЕЛИ СТРУКТУРНОЙ НАДЕЖНОСТИ

Все показатели структурной надежности относятся к одной из двух категорий: количественные показатели, качественные показатели. **Количественный показатель** – это «мерило» одного или нескольких свойств надежности. **Качественный показатель** надежности – это результат обработки мнений заказчика или пользователя, или эксперта, или разработчика, или их совместных мнений. Итогом такой обработки может быть, например, такой результат как «надежность объекта A не хуже надежности объекта B» или «объект A обладает приемлемой надежностью». Качественные показатели нередко имеют субъективный характер. Поэтому предпочтение отдается в основном количественным показателям надежности.

Каждое из свойств надежности может быть описано количественно с помощью некоторой переменной, значение которой характеризует надежность объекта относительно данного свойства. Эту переменную называют показателем данного свойства надежности или ***единичным показателем*** надежности. Меру надежности объекта относительно совокупности нескольких свойств называют ***комплексным показателем*** надежности объекта (системы). Рассмотрим применяемые единичные и комплексные показатели надежности объектов.

I.2.1.Единичные показатели надежности

При рассмотрении единичных показателей надежности будем следовать правилу «от простого к сложному», которое в нашем случае означает переход от обсуждения показателей надежности невосстанавливаемых объектов к обсуждению показателей надежности восстанавливаемых объектов. *Единичные показатели надежности невосстанавливаемых объектов* характеризуют меры надежности объекта относительно свойства его безотказности. Иначе говоря, рассчитывают (оценивают) надежность объекта применительно только к характеристикам потока возникающих в нем отказов. *Единичные показатели надежности восстанавливаемых объектов* кроме свойств безотказности характеризуют меры надежности объекта и в отношении безотказности, и в отношении его ремонтопригодности (в части восстанавливаемости объекта).

Единичные показатели надежности невосстанавливаемых объектов

Для невосстанавливаемых объектов используются следующие показатели надежности [8]:

1. Вероятность безотказной работы P(t) – есть вероятность того, что время работы объекта до отказа окажется больше или равно заданному времени t

$$P(t) = P(\varsigma \geq t) = 1 - F(t), \tag{2.1}$$

где ς – случайное время работы объекта до отказа или наработка на отказ, $F(t) = P(\varsigma < t)$ – интегральная функция распределения случайной величины ς ($\varsigma < t$).

Показатель *вероятность безотказной работы* обладает следующими свойствами:

– при $t = 0$ $P(t) = 1$. Это означает, что до начала работы и в момент включения в работу объект предполагается полностью исправным;

– при $0 < t$ $0 < P(t) < 1$. *Вероятность безотказной работы* – непрерывная, убывающая во времени функция;

– при $t \to \infty$, $P(t) \to 0$. Это означает, что объект не может сколь угодно долго находиться в работоспособном состоянии.

В международых стандартах EN 50126[12] и МЭК 62278 [13] этот показатель обозначается как $R(t)$ и трактуется как «безотказность (вероятность успеха)».

2. Вероятность отказа Q(t) – вероятность того, что время работы объекта до отказа окажется меньше заданного времени *t*

$$Q(t) = 1 - P(t) = F\,(t)\,. \tag{2.2}$$

Если *P(t)* – надежность системы, то *Q(t)* – ненадежность системы.

В международных стандартах [9,12,13 и др.] этот показатель обозначается как $F(t)$.

3. *Частота отказов* $a(t)$ представляет собой плотность распределения времени безотказной работы или дифференциальную функцию этого распределения

$$a(t) = f(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = -\frac{dP(t)}{dt}. \tag{2.3}$$

В международных стандартах этот показатель обозначается как $Z(t)$.

3. Интенсивность отказов λ(t) – это отношение плотности вероятности к вероятности безотказной работы:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)} = -\frac{dP(t)}{P(t)dt} = \frac{a(t)}{P(t)}. \tag{2.4}$$

Следует подчеркнуть различие между показателями $a(t)$ и $\lambda(t)$. Вероятность $a(t)$ характеризует в интервале времени $t, t+dt$ вероятность отказа объекта, взятого произвольным образом из группы объектов, причем неизвестно в каком состоянии (работоспособном или неработоспособном) находится данный объект. Вероятность $\lambda(t)$ характеризует в интервале времени $t, t+dt$ вероятность отказа объекта, взятого из группы объектов, которые остались работоспособными к моменту времени *t*. Вместе с тем, для надежных систем ($P(t) \geq 0.99$) допустима в практических расчетах соответствующая замена показателя $a(t)$ на показатель $\lambda(t)$. Допускаемая ошибка на практике составляет примерно 1-2% и, как правило, не превышает погрешности определения показателей частоты и интенсивности отказов.

Рассмотренные единичные показатели безотказности связаны между собой – зная одну из функций *P(t)*, *Q(t)*, *a(t)*, *λ(t)*, можно определить три остальные. Из формулы (2.4) следует, что

$$\frac{dP(t)}{P(t)} = -\lambda(t)dt .$$

Интегрируя данное выражение, получим

$$\int_0^t \lambda(x)dx = \ln P(t)$$

Откуда

$$P(t) = \exp(-\int_0^t \lambda(x)dx) . \qquad (2.5)$$

Если $\lambda(x) = \lambda = const$, то тогда

$$P(t) = e^{-\lambda t} \text{ и } a(t) = f(t) = \lambda e^{-\lambda t} .$$

Этот случай достаточно широко распространен на практике эксплуатации информационных систем и характеризует экспоненциальное распределение времени безотказной работы объекта.

4. Средняя наработка до отказа (среднее время работы объекта до первого отказа) T_{CP} – это математическое ожидание времени работы до первого отказа:

$$T_{CP} = M_1 = \int_0^\infty tf(t)dt = -\int_0^\infty tdP(t).$$

Пределы несобственного интеграла изменяются от 0 до ∞, так как время не может быть отрицательным.

Интегрируя по частям, получим

$$T_{CP} = -t\,P(t)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty P(t)dt = \int_0^\infty P(t)dt. \qquad (2.6)$$

где $t\,P(t)\Big|_0^\infty = 0$, так как при верхнем пределе *P(t)* быстрее стремится к нулю, чем *t* стремится к бесконечности.

В международных стандартах этот показатель обозначается как **MTTF** и трактуется как «среднее время до отказа».

Взаимосвязь показателей безотказности показана в табл. I.2.1.

Таблица I.2.1. Взаимосвязь показателей безотказности

Формулы для определения показателей безотказности				
	$P(t)$	$a(t)$	$\lambda(t)$	T_{CP}
$P(t)$	–	$-\dfrac{dP(t)}{dt}$	$-\dfrac{1}{P(t)}\dfrac{dP(t)}{dt}$	$\int_0^\infty P(t)dt$
$a(t)$	$\int_t^\infty a(x)dx$	–	$\dfrac{a(t)}{\int_t^\infty a(x)dx}$	$\int_0^\infty ta(t)dt$
$\lambda(t)$	$\exp(-\int_0^t \lambda(x)dx)$	$\lambda(t)\exp(-\int_0^t \lambda(x)dx)$	–	$\int_0^\infty e^{-\int_0^t \lambda(x)dx} dt$

Единичные показатели надежности восстанавливаемых объектов

В состав показателей надежности объектов информационных систем обычно входят показатели безотказности 2.1-2.6, а также:

6. ***Средняя наработка на отказ*** T_0 – математическое ожидание времени между соседними отказами

$$T_0 = \int_0^\infty [1 - F_1(t)]dt\,, \tag{2.7}$$

где $F_1(t)$ – функция распределения времени до отказа от момента восстановления работоспособного состояния объекта после предыдущего отказа.

В международных стандартах этот показатель обозначается как **MTBF** и трактуется как «среднее время между отказами». Кроме того, рекомендуется применять показатель **MUT** – среднее время исправной работы объекта.

Очевидно, что **MUT ≤ MTBF,** поскольку определяет реальное время использования объекта в работоспособном состоянии.

Если $F_1(t) \approx F(t)$, то значение средней наработки на отказ с достаточной для практики точностью совпадает со значением средней наработки до отказа. Данное обстоятельство характерно для объектов информационных систем.

В состав единичных показателей надежности восстанавливаемых объектов входят следующие показатели ремонтопригодности:

7. ***Вероятность восстановления*** $Q_B(t)$ – вероятность того, что отказавший объект будет восстановлен в течение заданного времени *t*. Эта характеристика представляет собой функцию распределения времени восстановления

$$Q_B(t) = G(t)\,.$$

Очевидно, что

$$0 \le G(t) \le 1; G(0) = 0; G(\infty) = 1.$$

8. Частота восстановления $a_B(t)$ – плотность распределения времени восстановления

$$a_B(t) = dG(t)/dt \tag{2.8}$$

9. Интенсивность восстановления $\mu(t)$ – условная плотность распределения времени восстановления для момента времени t при условии, что до этого момента восстановление объекта не произошло. Таким образом,

$$\mu(t) = \frac{a_B(t)}{1 - G(t)} \tag{2.9}$$

Если, $G(t) = 1 - e^{-\mu \cdot t}$ то

$$a_B(t) = \mu \cdot e^{-\mu \cdot t} \text{ и } \mu(t) = \mu = const .$$

10. Среднее время до восстановления T_B (**MTTR**)

В составе времени до восстановления объекта информационной техники целесообразно [14] выделить следующие составные элементы времени:

1. Время доступа. Оно включает в себя время от момента осознания того, что отказ существует (от момента обнаружения скрытого отказа) до начала поиска места отказа, т.е. удаление крышек и экранов, подключение проверочного оборудования и др.

2. Время диагностирования. Его называют также временем поиска отказа. В это время проводят настройку испытательного оборудования (например, настройку переносного компьютера или генератора), проведение ряда проверок, интерпретацию полученной информации (она может поддерживаться алгоритмами), получение заключений и принятие решения о корректирующих действиях.

3. Получение запасных частей. Запасные части могут использоваться из имеющегося состава ЗИП, сниматься с неисправного объекта или с идентичного резервного узла какой – то другой части системы.

4. Время замены. Это время охватывает удаление отказавшего ТЭЗ (типового элемента замены), за которым следует установка и, при необходимости, подключение элемента замены. ТЭЗ является заменяемым изделием, внутри которого не осуществляется поиск отказа. Время замены в значительной мере зависит от выбора ТЭЗ и таких особенностей механической конструкции, как разъемы.

5. Время проверки. Оно включает в себя подтверждение того, что отказа больше не существует и что объект информационной техники работоспособен. Может оказаться возможным возвращение объекта в работу до завершения проверки. В этом случае несмотря на то, что работа по восстановлению продолжается, это время не входит во время простоя системы.

6. Время подналадки. В результате введения в объект нового модуля может потребоваться провести дополнительные настройки. Эти временные затраты относятся к времени восстановления, но могут лежать вне времени простоя объекта.

К пассивным действиям по восстановлению относятся затраты времени на *снабжение запасными частями, испытательными средствами и рабочей силой,* а также затраты времени на *административные действия (составление отчета об отказе, распределение заданий на ремонт, замену рабочей силы, официальные перерывы, обсуждения и т.д.).*

Математическое определение среднего времени до восстановления следующее:

$$T_B = MTTR = \int_0^{\infty} [1 - G(t)] dt .$$

Учитывая формулы (2.8) и (2.9) и то, что $G(0) = 0$, получим

$$G(t) = 1 - \exp[-\int_0^t [1 - \mu(x)] dx .$$

Тогда

$$T_B = MTTR = \int_0^{\infty} \exp[-\int_0^t \mu(x) dx] dt . \qquad (2.10)$$

Если в практических расчетах принять упрощенное допущение о постоянной интенсивности восстановления $\mu(t) = \mu = const$, то можно пользоваться простыми формулами

$$T_B = MTTR = \frac{1}{\mu} \text{ и } \mu = \frac{1}{T_B} \qquad (2.11)$$

11. Среднее время простоя MDT *(обозначим в виде* $T_{ПР}$*)*

В состав времени простоя объекта информационной техники входят элементы времени восстановления, пронумерованные как 2,3,4,5, а также *время осознания*, т.е. время обнаружения скрытого отказа, когда состояние отказа становится явным.

Очевидно, что показатели MDT и MTTR не равны. В ряде случаев, когда время существования скрытого отказа достаточно велико, MDT > MTTR. В отдельных случаях возможно обратное соотношение этих единичных показателей, т.к. в составе MDT не учитывается время подналадки и возможно время проверки.

12. Параметр потока отказов $\omega(t)$ – математическое ожидание числа отказов, происшедших за единицу времени, начиная с момента t. Это показатель средней частоты отказов восстанавливаемого объекта в коротком отрезке времени $\Delta t \to 0$. Он отличается от приведенного выше показателя *частоты отказов* для невосстанавливаемых объектов тем, что в данном случае, в том же коротком отрезке времени, предусматривается мгновенное восстановление отказов или если на испытания поставлена группа объектов, то отказавший объект немедленно заменяется новым.

Между параметром потока отказов $\omega(t)$ (средней частотой отказов) и частотой отказов $a(t)$ существует прямая зависимость

$$\omega(t) = a(t) + \int_0^t \omega(\tau) a(t-\tau) d\tau . \qquad (2.12)$$

Уравнение (2.12) является интегральным уравнением Вольтерра второго порядка с разностным ядром, которое обычно решается численными методами с использованием метода последовательных приближений по формуле

$$\omega_{i+1}(t) = a(t) + \int_0^t \omega_i(\tau) a(t-\tau) d\tau .$$

Вычисление продолжается до тех пор, пока не будет установлено совпадение $\omega_{i+1}(t)$ и $\omega_i(t)$ с допустимой погрешностью.

Параметр потока отказов обладает следующими важными свойствами:

• для любого момента времени независимо от закона распределения времени безотказной работы параметр потока отказов больше, чем частота отказов, т.е. $\omega(t) > a(t)$;

• независимо от закона распределения времени безотказной работы восстанавливаемого объекта при длительной его эксплуатации поток отказов становится стационарным

$$\lim_{t\to\infty} \omega(t) = {}^{1}\!/_{T_0}\,.$$

Предел, к которому стремится средняя частота отказов при длительной эксплуатации объекта, равен величине, обратной средней наработке до отказа.

Некоторые соотношения:

• если интенсивность отказов объекта $\lambda(t)$ – возрастающая функция времени, то

$$\lambda(t) > \omega(t) > a(t)\,;$$

• если $\lambda(t)$ – убывающая функция, то

$$\omega(t) > \lambda(t) > a(t)\,;$$

• *при экспоненциальном законе распределения времени безотказной работы* параметр потока отказов равен интенсивности отказов и обратно пропорционален средней наработке до отказа

$$\omega(t) = \lambda(t) = \lambda = {}^{1}\!/_{T_0}\,.$$

I.2.2. Комплексные показатели надежности

13. Функция готовности (нестационарный коэффициент готовности) $K_Г(t)$ – вероятность того, что в момент времени t объект работоспособен

$$K_Г(t) = \sum_{i \in S_P} P_i(t), \tag{2.13}$$

где S_P – множество работоспособных состояний объекта, $S_P \subset \mathrm{S}$ и S – множество всех состояний объекта, $P_i(t)$ - вероятность пребывания объекта в момент времени *t* в работоспособном состоянии *i*.

Особый практический интерес представляет случай, когда объект может находиться только в одном из двух состояний: S_0 – работоспособное, S_1 – неработоспособное состояние. При этом во многих случаях предполагается, что поток отказов является простейшим с параметром λ, а время восстановления подчинено экспоненциальному закону с интенсивностью μ. В соответствии с формулой (2.13) функция готовности объекта с одним работоспособным состоянием равна

$$K_Г(t) = P_0(t).$$

Для описанных условий функция готовности объекта определяется хорошо известной в теории надежности формулой

$$K_Г(t) = P_0(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t}.$$

Введем обозначение $\lambda/\mu = \rho$. Тогда

$$K_\Gamma(t) = \frac{1}{1+\rho} + \frac{\rho}{1+\rho}\exp[-(1+\rho)t\mu]$$

Иногда вводят в рассмотрение усредненную функцию готовности [15] на интервале *(0, t)*. Этот показатель определяет, сколько времени в среднем рассматриваемый объект находится в исправном состоянии

$$\overline{K}_\Gamma(t) = \frac{1}{t}\int_0^t K_\Gamma(t)dt\,.$$

14. Коэффициент готовности K_Γ – это вероятность того, что объект находится в работоспособном состоянии в сколь угодно большой от начала отсчета момент времени. Практически это означает, что мы не имеем никакой информации о том, в каком состоянии находился объект в какой – либо момент в прошлом. *Функция готовности – это по существу нестационарный коэффициент готовности*. С помощью нестационарного коэффициента осуществляется вероятностный прогноз состояния объекта в некоторый момент времени *t* при условии, что в настоящий момент (это и есть начало отсчета времени в данном случае, т.е. *t=0)* объект находится в известном состоянии. *Коэффициент готовности – это стационарное значение функции готовности*

$$K_\Gamma = \lim_{t\to\infty} K_\Gamma(t)\,. \qquad (2.14)$$

Следует отметить, что пределом усредненной функции готовности также является величина

$$K_\Gamma = \lim_{t\to\infty} \overline{K}_\Gamma(t)\,.$$

Отсюда можно дать другую интерпретацию коэффициента готовности – это доля времени, в течение которого объект находится в работоспособном состоянии при условии, что время наблюдения очень велико.

Промежуток времени безотказной работы можно рассматривать как случайную величину с определенным законом распределения и конечным математическим ожиданием. Аналогично можно рассматривать и время восстановления. Поэтому на достаточно большом интервале времени процесс возникновения отказов и последующих за ними восстановлений устанавливается в том смысле, что вероятность появления на некотором промежутке времени события отказа зависит только от длины этого промежутка.

Если оценивать произвольный, но достаточно большой промежуток времени t, то согласно эргодической теореме можно рассматривать вероятности P_0 и P_1 как долю времени, в течение которого объект находится в работоспособном или неработоспособном состоянии. Таким образом, величина $P_0 \cdot t$ представляет собой время, в течение которого объект работоспособен, а $P_1 \cdot t$ – время, в течение которого происходит восстановление. Если за время t было N отказов объекта, то средние времена безотказной работы и восстановления будут соответственно равны

$$T_0 = P_0 \frac{t}{N}; T_B = P_1 \frac{t}{N}. \text{ Откуда } \frac{P_0}{T} = \frac{P_1}{T_B} \text{ и } P_1 = \frac{T_0}{T_B} P_0.$$

Так как $P_0 + P_1 = 1$,

$$\text{то } K_Г = P_0 = \frac{1}{1 + \frac{T_B}{T_0}} = \frac{T_0}{T_0 + T_B} \qquad (2.15)$$

Формула (2.15) неизменна для любых законов распределения отказов и восстановлений объекта. Эта формула находит широкое применение в России при решении теоретических и практических задач.

В международной практике коэффициент готовности трактуется несколько иначе [11,12]:

$$K_Г = A = \frac{MUT}{MUT + MDT}. \qquad (2.16)$$

Для информационной техники затраты на техническое обслуживание и простои техники по организационным причинам на несколько порядков меньше времени ее работоспособного состояния. Поэтому допустимо примерное равенство MUT и MTBF и, следовательно, формула (2.16) преобразуется к виду

$$K_Г = \frac{T_0}{T_0 + T_{ПР}}, \qquad (2.17)$$

поскольку MTBF = T_0 и MTD =$T_{ПР}$.

Вернемся к частному, но как уже ранее отмечалось, характерному для объектов информационных систем случаю экспоненциальных законов распределения отказов и восстановлений объекта. С учетом формулы (2.15), выражение (2.14) преобразуется к виду

$$K_Г(t) = K_Г + (1 - K_Г)\exp(-\frac{t}{T_В K_Г}).$$

При малом значении времени t можно пользоваться следующей приближенной формулой расчета функции готовности простого объекта с экспоненциальными законами отказов и восстановлений

$$K_Г(t) \approx K_Г + (1 - K_Г)(1 - \frac{t}{K_Г T_В}) \approx 1 - \frac{t}{T}.$$

В свою очередь, при больших значениях $t \to \infty$ $K_Г(t) \approx K_Г$.

Таким образом, при малых значениях времени функция готовности совпадает с вероятностью безотказной работы объекта $P(t)$, а при больших значениях времени t – с коэффициентом готовности. Если до момента θ вместо функции $K_Г(t)$ использовать функцию $P(t)$, а после момента θ величину $K_Г$, то максимальная ошибка будет иметь место в точке θ. В этой точке величины $K_Г$ и $P(t)$ совпадают. Отсюда следует

$$\exp(-\theta/T) = \frac{T}{T + T_В} \text{ и } \theta = -T \ln K_Г.$$

Подставляя выражение θ в формулу (2.16), получим

$$K_Г(\theta) = K_Г + (1 - K_Г)\exp(\frac{T \ln K_Г}{T_В K_Г}) = K_Г + (1 - K_Г)K_Г^{\frac{1}{1-K_Г}}. \quad (2.18)$$

Относительная ошибка указанного порядка применения показателей $P(t)$ и $K_Г$ вместо функции готовности оценивается как [16]

$$\delta \approx (1 - K_Г)K_Г^{\frac{K_Г}{1-K_Г}}.$$

15. Коэффициент неготовности (простоя) объекта $K_{НГ} = K_П$ – вероятность того, что объект неработоспособен (находится на обслуживании) в произвольный достаточно удаленный от начала отсчета момент времени.

$$K_{НГ} = 1 - K_{Г}. \tag{2.19}$$

Нестационарный коэффициент неготовности является дополнительным к нестационарному коэффициенту готовности

$$K_{НГ}(t) = 1 - K_{Г}(t).$$

16. Функция оперативной готовности (нестационарный коэффициент оперативной готовности) $K_{ОГ}(t, \tau_{З})$ – вероятность того, что объект исправный в момент времени t проработает безотказно в течение времени решения задачи $\tau_{З}$

$$K_{ОГ}(t, \tau_{З}) = \frac{K_{Г}(t)}{T_{СР}} \int_{\tau_{З}}^{\infty} P_1(t)dt, \tag{2.20}$$

где $K_{Г}(t)$ – функция готовности, $T_{СР}$ – средняя наработка до отказа, $P_1(t) = 1 - F_1(t)$ ($F_1(t)$ – функция распределения времени до отказа от момента восстановления работоспособного состояния объекта после предыдущего отказа).

При экспоненциальном законе распределения наработки между отказами с интенсивностью λ формула (2.20) преобразуется к выражению

$$K_{ОГ}(t, \tau_{З}) = \frac{K_{Г}(t)}{T_{СР}} \int_{\tau_{З}}^{\infty} P(t)dt = \frac{K_{Г}(t)}{T_{СР}} \int_{\tau_{З}}^{\infty} e^{-\lambda t}dt = K_{Г}(t)e^{-\lambda\tau_{З}}.$$

Между функцией оперативной готовности и функцией готовности имеется естественная связь

$$\lim_{\tau_{З} \to 0} K_{ОГ}(t, \tau_{З}) = K_{Г}(t).$$

Существует связь и между функцией оперативной готовности и вероятностью безотказной работы в течение времени решения задачи $\tau_З$

$$\lim_{t\to 0} K_{ОГ}(t, \tau_З) = P_1(\tau_З).$$

17. Коэффициент оперативной готовности (стационарный коэффициент оперативной готовности) $K_{ОГ}(\tau_З)$ – вероятность того, что объект работоспособен в произвольный достаточно удаленный от начала отсчета момент времени и проработает безотказно в течение времени решения задачи $\tau_З$

$$K_{ОГ}(\tau_З) = \lim_{t\to\infty} K_{ОГ}(t, \tau_З) = \frac{1}{T_0 + T_{ПР}} \int_{\tau_З}^{\infty} P_1(t)dt\,. \qquad (2.21)$$

При экспоненциальном законе распределения наработки между отказами с интенсивностью λ формула (2.19) преобразуется к известному выражению

$$K_{ОГ}(\tau_З) = K_Г P_1(\tau_З)\,. \qquad (2.22)$$

18. Коэффициент сохранения эффективности $K_{ЭФ}(t)$ – отношение эффективности функционирования системы с реальной надежностью к эффективности функционирования системы с идеальной надежностью. Данный показатель применим к сложным информационным системам и сетям, при функционировании которых имеют место частичные отказы. При возникновении частичного отказа система не способна выполнять все предусмотренные задачи – часть из них остается за рамками функционирования системы. В таких случаях говорят, что из-за ненадежности некоторых составных элементов система продолжает работать, но с пониженной эффективностью. Показатель $K_{ЭФ}(t)$ отражает вклад исправно работающих элементов (объектов) системы в сохранение ее эффективности функционирования.

Математическое определение и методы оценки данного показателя надежности наиболее полно описаны в работах [17,18], где в качестве достаточно общих и практически проверенных рекомендуются: метод усреднения по траекториям, метод усреднения по состояниям, метод усреднения по требованиям.

Общая формула оценки показателя $K_{ЭФ}(t)$ *методом усреднения по траекториям* имеет следующий вид

$$K_{ЭФ}(t_P) = \int\limits_{J} (1 - W_j) dP_j(t_P) \,, \qquad (2.23)$$

где $W_j = \dfrac{E_0 - E_j}{E_0}$ – относительное снижение (потери) эффективности системы на j-ой траектории функционирования (весовой коэффициент траектории функционирования системы $j \in J$, где J – множество всех возможных траекторий функционирования системы), $dP_j(t_P)$ – элемент вероятности надежной реализации на заданном интервале t_P данной траектории.

Под траекторией функционирования системы понимается совокупность всех состояний системы, отличающихся друг от друга уровнем эффективности. Подразумевается, что переходы в другие состояния системы производятся в течение времени t_P вследствие отказов и восстановлений составных объектов (элементов) системы. В общем случае траекторию можно представить в виде ступенчатой линии, у которой высота каждой ступеньки соответствует определенному уровню эффективности (производительности, пропускной способности, оперативности, стоимости или другим характеристикам, принятым в качестве показателя эффективности системы). Длина ступеньки – время пребывания системы в состоянии с данным уровнем эффективности.

Метод усреднения по траекториям является наиболее общим, принципиально не ограниченным ни особенностями системы, ни типом показателя его эффективности. Этот метод применим для систем как кратковременного, так и длительного действия. Однако возможности практического применения метода ограничены из–за большой сложности вычисления интеграла (2.23). Вместе с тем, имеют место ситуации, когда время выполнения работы t_P относительно невелико. В этих реальных случаях система обычно находится в одном из состояний эффективности в течение всего времени t_P и тогда интеграл (2.23) можно преобразовать к виду

$$K_{ЭФ} = \sum_{S} (1-\omega_s) P_s,$$

где $\omega_s = W_{j=s}$ – весовой коэффициент, $P_s = P_{j=s}(t_P)$ – вероятность того, что система окажется к началу работы в состоянии $s \in S$ и останется в этом состоянии в течение всего времени работы t_P. Таким образом, оценка эффективности сводится к *усреднению по состояниям,* что и определяет название метода. Данный метод позволяет получить приемлемую по точности оценку для систем кратковременного действия и заниженную по точности оценку для больших интервалов времени t_P, причем оценка тем хуже, чем больше длительность этого интервала.

Если информационная система многоканальная или/и многофункциональная, то ее работа может быть представлена как процесс обслуживания различных групп заявок (задач). Группы могут различаться как по параметрам потоков требований и их обслуживания, так и по характеру решаемых задач. Часто удается выделить из состава системы такие подсистемы, каждая из которых обслуживает определенную группу заявок (так называемые контуры обслуживания) и/или определить время занятости системы обслуживанием задач каждой группы (разделить контуры обслуживания по времени). Тогда оценка коэффициента сохранения эффективности системы может быть осуществлена методом *усреднения по требованиям*

$$K_{\text{ЭФ}} = \sum_{V} (1 - \omega_\nu) R_\nu ,$$

где ω_ν – относительное снижение эффективности системы из-за отказа в обслуживании ν-й группы требований ($\nu \in V$). Фактически это весовой коэффициент ν-го контура обслуживания. R_ν – показатель надежности системы, вычисленный применительно к требованию ν-го типа.

Если бы система имела только два состояния: работа – восстановление, то под показателем $K_{\text{ЭФ}}(t)$ подразумевался показатель $P(t)$ для невосстанавливаемых систем или $K_{Г}(t)$ для восстанавливаемых систем.

Общим недостатком рассмотренных методов оценки коэффициента сохранения эффективности систем является необходимость определения весовых коэффициентов $W_j; \omega_s; \omega_\nu$, что связано с большими практическими трудностями. В работе [5] предложена методика и алгоритм полунатурного моделирования указанных весовых коэффициентов и показателя $K_{\text{ЭФ}}(t)$ в целом.

I.2.4. Выбор показателей структурной надежности информационных систем

При выборе показателей надежности объекта следует учитывать основные рекомендации:

• Общее число показателей надежности должно быть по возможности минимальным;

• Система показателей надежности должна быть удобной в практическом применении, наглядной и сравнимой;

• Выбранные показатели надежности должны иметь простой физический смысл;

• Выбранные показатели надежности должны допускать возможность проведения подтверждающих оценок на этапе проектирования (аналитических расчетов или имитационного моделирования);

• Выбранные показатели надежности должны допускать возможность статистической (опытной) оценки по результатам эксплуатации или при проведении специальных испытаний;

• Выбранные показатели надежности должны допускать задание норм надежности в количественной форме;

• При выборе показателей надежности должны учитываться условия использования информационных ИС.

По условиям использования различают три класса объектов ИС:

1. Сложные стационарные системы длительного непрерывного использования с возможностью восстановления отказавших составных элементов в процессе эксплуатации;

2. Бортовые системы многоразового использования (восстановление возможно при подготовке к функционированию);

3. Бортовые системы одноразового использования (восстановление невозможно).

Рекомендации по применению тех или иных показателей надежности для каждого класса объектов ИС приведены в табл. I.2.2. Символом «+» отмечены рекомендуемые показатели, символом « – » – не рекомендуемые показатели. Для объектов класса 1 единичные показатели безотказности применять не имеет смысла, т.к. эти объекты представляют собой сложные многофункциональные системы с частичными отказами. В этих условиях, во – первых, определение интегральных показателей безотказности весьма проблематично, и, во – вторых, физический смысл интегральных показателей безотказности практически отсутствует.

Для объектов класса 2 целесообразно применение всех перечисленных в табл. I.2.2 показателей надежности. Это позволит оценить уязвимости при проектировании надежности и эксплуатации системы и обеспечить рациональное управление надежностью бортовых информационно – управляющих систем многоразового использования. Для объектов класса 3 можно ограничиться применением только показателей безотказности.

Таблица I.2.2. Показатели надежности, рекомендуемые для типовых классов объектов

Класс объекта	$P(t)$	$\alpha(t)$	$\lambda(t)$	$\omega(t)$	$T_{ср}$	$T_о$
1	-	-	-	+	-	-
2	+	+	+	+	+	+
3	+	+	+	-	+	-
Класс объекта	$Q_В(\tau)$	$\alpha_В(t)$	$\mu(t)$	$T_В$	$К_Г$	$К_{ОГ}(\tau_З)$
1	+	+	+	+	+	+
2	+	+	+	+	+	+
3	-	-	-	-	-	-

I.2.5. Примеры определения показателей надежности при известных законах распределения отказов и восстановлений

I.2.5.1.Характерные математические модели отказов и восстановлений

Для математического описания случайных величин отказов и восстановлений в практике надежности информационных систем широкое распространение получили следующие законы распределения, а именно: экспоненциальное распределение, распределение Вейбулла, нормальный, усеченный нормальный и логарифмически нормальный законы, распределение Эрланга (см. табл. I.2.3).

Таблица I.2.3. Применяемые в практике надежности основные законы распределения отказов и восстановлений

Основные законы распределения	**Функции распределения (вероятности отказов) $F(t)$=$Q(t)$**
Экспоненциальный	$F(t)=1-e^{-\lambda\cdot t}$, где λ – параметр распределения
Вейбулла-Гнеденко	$F(t)=1-e^{-\lambda_0\cdot t^B}$, где λ_0 и B – параметры распределения
Нормальный (гауссовский)	$F(t)=1-\Phi(\frac{t-T_0}{\sigma})$, где Φ – табулированный интеграл Лапласа, T_0 и σ – параметры закона. *В случае усеченного нормального закона* $F(t)=1-\frac{\Phi(\frac{T_0-t}{\sigma})}{\Phi(\frac{T_0}{\sigma})}$
Релея	$F(t)=1-e^{-\frac{t^2}{2\cdot c^2}}$, где c – параметр распределения
Гамма-распределения (Эрланга при k=1,2,…)	$F(t)=1-e^{-t/T_0}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{t^i}{T_0^i i!}$ T_0 – математическое ожидание случайного времени наработки до отказа

Читателю полезно иметь перед глазами выражения наиболее распространенных единичных показателей безотказности применительно к каждому из указанных законов распределения. К ним относятся: вероятность безотказной работы *P(t),* вероятность отказа *Q(t),* частота отказов *a(t)*, интенсивность отказов *λ(t)*, математическое ожидание времени наработки до отказа T_{CP}. Кроме того, представляют практический интерес формулы расчета показателей ремонтопригодности при условии логарифмически нормального закона распределения времени восстановления. Речь идет о таких показателях как, вероятность восстановления $Q_B(\tau)$, частота восстановления $a_B(\tau)$, интенсивность восстановления $\mu(\tau)$, среднее время восстановления T_B.

• ***Экспоненциальный закон распределения отказов***. Как уже отмечалось в п.I.1.1, этот закон широко распространен в практике расчетов структурной надежности информационно – управляющих систем. Экспоненциальное распределение хорошо описывает поведение системы в период нормальной эксплуатации, когда интенсивность отказов λ = const. Это распределение не учитывает износа элементов системы и применимо к объектам с простейшим потоком отказов. Применительно к этому закону перечисленные показатели надежности выражаются следующим образом:

$$P(t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t},$$

$$Q(t) = F(t) = 1 - e^{-\lambda t},$$

$$a(t) = -\frac{dP(t)}{dt} = \lambda e^{-\lambda t}; \qquad (2.24)$$

$$\lambda(t) = \lambda;$$

$$T_{CP} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}.$$

• ***Закон распределения Вейбулла – Гнеденко.*** Закону Вейбулла – Гнеденко хорошо подчиняется распределение отказов в объектах, содержащих большое количество однотипных неремонтируемых элементов (полупроводниковых приборов, микромодулей и т. д.). Особенностью распределения Вейбулла-Гнеденко является то, что с изменением параметра закона B меняется характер зависимости показателя надежности от времени. При $B < 1$ интенсивность отказов будет монотонно убывающей функцией, при $B > 1$ – возрастающей. Данное свойство позволяет соответствующим подбором параметров λ_0 и B обеспечить хорошее совпадение результатов опытных данных с аналитическими выражениями параметров надежности.

Поведение системы на участке приработки хорошо описывается законом распределения Вейбулла – Гнеденко с параметром $B < 1$, а на участке старения $B > 1$. Показатели надежности объекта при данном законе распределения отказов имеют следующий вид:

$$P(t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda_0 \cdot t^B}; \quad Q(t) = F(t) = 1 - e^{-\lambda_0 \cdot t^B},$$

где λ_0 и B – параметры закона;

$$a(t) = -P'(t) = \lambda_0 \cdot B \cdot t^{B-1} e^{-\lambda_0 \cdot t^B};$$

$$\lambda(t) = \frac{a(t)}{P(t)} = \lambda_0 B t^{B-1}; \tag{2.25}$$

$$T_{CP} = \int_0^\infty P(t)dt = \lambda_0^{-\frac{1}{B}} \cdot \Gamma(1 + \frac{1}{B}),$$

где $\Gamma \cdot (1 + \frac{1}{B})$ – табулированная гамма-функция

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \cdot e^{-t} dt.$$

При значении параметра $B=1$ распределение Вейбулла – Гнеденко преобразуется в экспоненциальное распределение. Это следует в результате подстановки данного значения параметра B в приведенные выше формулы, включая формулу средней наработки до отказа T_{CP}, поскольку табулированная гамма-функция от целочисленных параметров равна 1. Таким образом, экспоненциальное распределение – частный случай распределения Вейбулла – Гнеденко.

• ***Нормальный закон распределения отказов.*** Нормальное распределение или распределение Гаусса используется для вычисления надежности объектов, для которых типичен износ. Отказы объектов носят постепенный характер вследствие старения элементов. Этот же закон распределения иногда может быть принят при описании случайного времени восстановления объекта. Плотность нормального распределения имеет колоколообразную форму, симметричную относительно среднего значения наработки до отказа или среднего времени восстановления. Применительно к этому закону показатели безотказности выражаются следующим образом:

$$P(t) = 1 - F(t) = 1 - \Phi(t, T, \sigma);$$

$$Q(t) = F(t) = \Phi(t, T, \sigma);$$

где
$$\begin{array}{l} \Phi(t, T, \sigma) = 0.5 + \Phi_0(\mathrm{s}), \text{ если } \mathrm{s} \geq 0 \\ \Phi(t, T, \sigma) = 0.5 - \Phi_0(\mathrm{s}), \text{ если } \mathrm{s} < 0 \end{array},$$

$$s = \frac{t - T}{\sigma},$$

$$\Phi_0(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^s \exp(-\frac{t^2}{2}) dt, \text{ при } s = /\frac{t - T}{\sigma}/,$$

$$a(t) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-T)^2}{2 \cdot \sigma^2}}; \tag{2.26}$$

$$\lambda(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \frac{e^{-\frac{(t-T)^2}{2 \cdot \sigma^2}}}{[1 - \Phi(t, T, \sigma)]}.$$

где Φ – табулированный интеграл Лапласа, T – математическое ожидание времени наработки до отказа, σ – среднеквадратичное отклонение времени наработки до отказа.

Следует отметить, что параметры этого закона распределения на практике определяются по статистическим данным следующим образом:

$$\hat{T} = \frac{\sum_{i=1}^{n} T_{\mathrm{i}}}{n} \text{ и } \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (T_{\mathrm{i}} - \hat{T})^2}{n-1}}.$$

Здесь так называемая «шапочка»($\wedge$) над показателем надежности означает его оценку по статистическим данным.

Нормальная плотность распределения отлична от нуля при $t < 0$. Этот недостаток несущественен, если $T >> \sigma$. При этом условии частью кривой распределения при $t < 0$ можно пренебречь. Если это условие не выполняется, то использование нормального распределения приводит к существенным погрешностям. В этих случаях часть кривой распределения при $t < 0$ отсекают и получают ***усеченное (нормированное) нормальное распределение.*** Показатели безотказности имеют следующий вид:

$$P(t) = \frac{\Phi(\frac{T_0 - t}{\sigma})}{\Phi(\frac{T_0}{\sigma})}.$$

$$\lambda(t) = \frac{e^{-\frac{(t-T_0)^2}{2\cdot\sigma^2}}}{\sqrt{2\cdot\pi}\cdot\sigma\cdot\Phi(\frac{T_0 - t}{\sigma})}. \quad (2.27)$$

$$T_{0yc} = T_0 + \frac{\sigma\cdot e^{\frac{-T_0^2}{2\cdot\sigma^2}}}{\sqrt{2\cdot\pi}\cdot\Phi(\frac{T_0}{\sigma})}.$$

Для описания случайного времени до восстановления в ряде случаев применяется ***логарифмически нормальный закон.*** Заметим, что неотрицательная случайная величина времени восстановления τ называется распределенной логарифмически нормально, если ее логарифм $Z = \lg\tau$ распределен по нормальному закону.

Показатели восстанавливаемости объекта при этом имеют следующий вид:

- *вероятность восстановления объекта*

$$Q_B(\tau) = \Phi(\vartheta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\vartheta}\exp(-\frac{x^2}{2})\,dx, \quad (2.28)$$

где $\vartheta = \dfrac{\lg\tau - T_Z}{\sigma_Z}$ и T_z, σ_z – соответственно математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение случайной величины $Z = \lg\tau$.

– *частота восстановлений*

$$a_B(\tau) = \frac{1}{\sigma_z \tau \sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{\vartheta^2}{2}); \qquad (2.29)$$

– интенсивность восстановления

$$\mu(\tau) = \frac{\frac{1}{\sigma_Z \tau \sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{\vartheta^2}{2})}{1 - \Phi(\vartheta)}; \qquad (2.30)$$

– *среднее время до восстановления*

$$T_B = \exp(T_z + \frac{\sigma_z^2}{2}). \qquad (2.31)$$

Параметры этого закона распределения T_Z, σ_Z на практике определяются по статистическим данным длительностей восстановления $\tau_i (i = 1...n)$ и их логарифмических значений $\tau_{Zi} = \lg \tau_i$.

• ***Распределение Эрланга.*** Этот закон распределения имеет универсальный характер и широко используется для описания случайных величин отказов и восстановлений в информационных системах. Показатели надежности объекта при данном законе распределения имеют следующий вид:

$$P(t) = \exp(-\lambda\, t) \sum_{i=0}^{r-1} \frac{(\lambda\, t)^i}{i!},$$

$$Q(t) = 1 - \exp(-\lambda\, t) \sum_{i=0}^{r-1} \frac{(\lambda\, t)^i}{i!}, \qquad (2.32)$$

где λ, r – параметры распределения Эрланга,

$$a(t) = \frac{\lambda\ (\lambda\ t)^{r-1}}{(r-1)!} \exp(-\lambda\ t),$$

$$\lambda(t) = \frac{\lambda\ (\lambda\ t)^{r-1}}{\sum\limits_{i=0}^{r-1} \frac{(\lambda\ t)^i}{i!}}, \qquad (2.33)$$

$$T = \frac{r}{\lambda}$$

Целочисленный параметр r определяет порядок распределения Эрланга. При r=1 (распределение Эрланга первого порядка) данное распределение трансформируется в экспоненциальное распределение с параметрами $\lambda(t) = \lambda = const$ и $T = \frac{1}{\lambda}$. При большом значении порядка закона (например, r > 10) форма

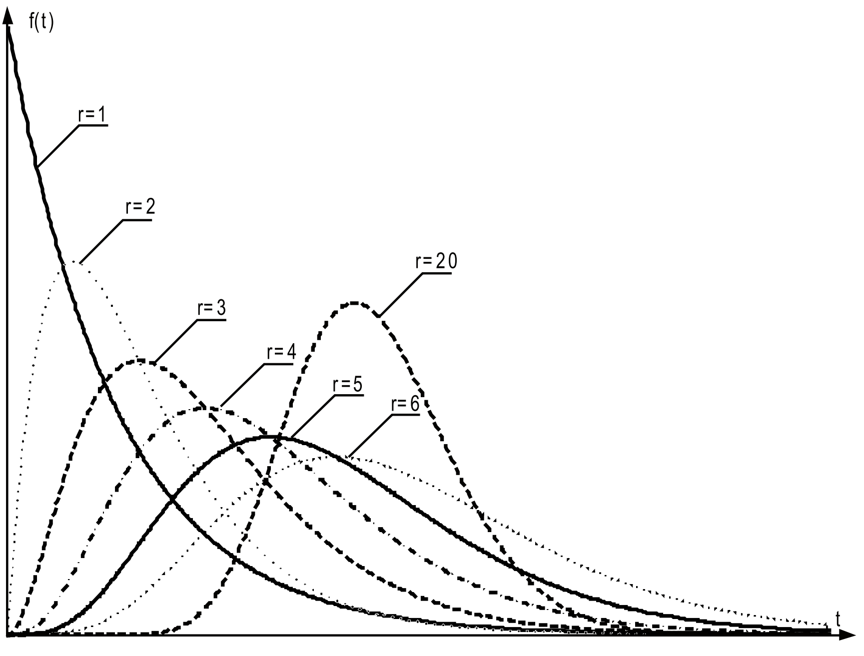

Рис. I.2.1. Семейство распределений Эрланга порядка r

функции плотности распределения Эрланга приобретает колоколообразный вид, такой же, как и у функции плотности нормального распределения (рис. I.2.1.).

I.2.5.2. Численные примеры

Пример I.2.1. ***Экспоненциальное распределение отказов***

Наблюдалась работа четырех однотипных серверов. В первом сервере зафиксировано и устранено 7 отказов при суммарной наработке $t_1 = 21300$ ч. Во втором сервере – 5 отказов при $t_2 = 20800$ ч. В третьем сервере – 8 отказов при $t_3 = 21100$ ч, В четвертом сервере – 3 отказа при $t_4 = 19200$ ч. Требуется оценить показатели безотказности сервера в течение заданного времени *t = 10 ч.* при условии, что может быть принят экспоненциальный закон распределения отказов сервера.

Решение.

1. По статистическим данным с помощью формулы (2.24) оценивается средняя наработка до отказа

$$\hat{T}_{CP} = \frac{\sum_{i=1}^{4} t_i}{\sum_{i=1}^{4} n_i} = \frac{82400}{23} = 3583 \ ч .$$

Затем по формулам (2.41) определяются другие показатели надежности

2. $\hat{\lambda} = 1 \big/ \hat{T}_{CP} = 2.8 \cdot 10^{-4} 1/ч$;

3. $\hat{P}(10) \approx e^{-2.8*10^{-3}} \approx 1 - 2.8 \cdot 10^{-3} \approx 1 - 3 \cdot 10^{-3}$;

4. $\hat{Q}(10) \approx 0.003$;

5. $\hat{a}(t) \approx 2.8 \cdot 10^{-4}(1-3.10^{-3}) \approx 2.75 \cdot 10^{-4}$

Пример I.2.2. ***Распределение Вейбулла – Гнеденко отказов***

Известно, что закон распределения времени безотказной работы комплекта периферийных устройств информационной системы по статистическим данным не противоречит закону Вейбулла – Гнеденко, если принять его параметры B = 1,5; $\lambda_0 = 10^{-7}\frac{1}{ч}$. Требуется оценить показатели безотказности данного комплекта в течение времени работы t = 1000 часов

Решение.

По формулам (2.25) рассчитывают

1. $\hat{P}(1000) \approx e^{-10^{-6}1000^{1,5}} \approx e^{-0,032} \approx 0,97.$

2. $\hat{a}(1000) \approx 10^{-6}1,5 \cdot 1000^{0,5}0,97 = 4.6 \cdot 10^{-5}\frac{1}{\text{ч}}.$

3. $\hat{\lambda}(1000) \approx \frac{4.6 \cdot 10^{-5}}{0,97} \approx 4.7 \cdot 10^{-5}\frac{1}{\text{ч}}.$

4. $\hat{T}_{CP} \approx (4.7.10^{-5})^{-\frac{1}{1,5}} \cdot \Gamma(1+\frac{1}{1,5}) \approx 4760$ ч.

Пример I.2.3. ***Расчет показателей восстанавливаемости объекта при логарифмически нормальном распределении случайного времени восстановления***

При длительной непрерывной эксплуатации манфрейма зафиксировано 9 отказов. Численные значения длительностей восстановления манфрейма после каждого отказа приведены в следующей таблице:

$\tau_1(ч)$	$\tau_2(ч)$	$\tau_3(ч)$	$\tau_4(ч)$	$\tau_5(ч)$	$\tau_6(ч)$	$\tau_7(ч)$	$\tau_8(ч)$	$\tau_9(ч)$
0.3	1.4	0.5	4.4	0.2	0.5	3.1	0.4	0.3

Известно, что время восстановления может быть описано логарифмически нормальным распределением. Требуется определить показатели восстанавливаемости манфрейма в течение $\tau = 2ч$.

Решение.

1. Определяют исходные параметры функции распределения времени восстановления в следующем порядке:

– находят логарифмические значения длительностей восстановления (смотри приведенную ниже таблицу):

τ_{Z1}	τ_{Z2}	τ_{Z3}	τ_{Z4}	τ_{Z5}	τ_{Z6}	τ_{Z7}	τ_{Z8}	τ_{Z9}
$\lg\tau_1$	$\lg\tau_2$	$\lg\tau_3$	$\lg\tau_4$	$\lg\tau_5$	$\lg\tau_6$	$\lg\tau_7$	$\lg\tau_8$	$\lg\tau_9$
–0.52	0.15	–0.30	0.64	–0.70	–0.30	0.49	–0.38	–0.52

– оценивают параметры функции распределения времени восстановления, где так называемая «шапочка» ($\wedge$) над параметром функции восстановления означает его оценку по статистическим данным:

$$\hat{T}_Z \approx \frac{\sum_{i=1}^{9} \tau_{Zi}}{9} \approx -0.16\,;$$

$$\hat{\sigma}_Z \approx \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{9}(\tau_{Zi} - T_Z^*)^2}{9-1}} \approx 0.47.$$

2. По формулам (2.28) и таблицам для нормального распределения определяют вероятность восстановления объекта за 2 часа

$$\hat{Q}_B(2) = \Phi(\vartheta) \approx 0.34 \text{ при } \vartheta = \frac{\lg 2 - \hat{T}_z}{\hat{\sigma}_z} = 0.98\,.$$

3. По формулам (2.29), (2.30) и (2.31) определяют:

– Частоту восстановления $\hat{a}_B(2) \approx 0.30$;

– Интенсивность восстановления $\hat{\mu}_B(2) \approx 0.45$ 1/ч;

– Среднее время восстановления $\hat{T}_B \approx 0.95$ *ч.*

Пример I.2.4. ***Расчет комплексных показателей надежности объекта***

По статистическим данным известно, что случайное время между отказами объекта энергообеспечения информационной системы может быть описано распределением Эрланга с параметрами $\hat{\lambda} = 10^{-4} 1/ч$ и $r = 2$. Предполагается, что функция распределения времени до первого отказа совпадает с функцией распределения времени между отказами объекта. Среднее время до восстановления отказа составляет T_B=3 *ч*. Требуется определить коэффициенты готовности и неготовности (простоя) объекта и коэффициент оперативной готовности при условии, что время решения задачи равно $\tau_З$=0.5 *ч*.

Решение.

1. По формуле $T_{CP} = \dfrac{2}{\lambda}$ для распределения Эрланга второго порядка определяют среднюю наработку до первого отказа $\hat{T}_{CP} \approx \dfrac{2}{10^{-4}} \approx 2.10^4$ *ч.*

2. По условию совпадения функций распределения времени до первого отказа и между отказами принимают равенство показателей средней наработки на отказ и средней наработки до отказа $\hat{T}_{CP} \approx \hat{T}_0$.

3. По формулам (2.17) и (2.19) определяют коэффициенты готовности и неготовности объекта

$$\hat{K}_{Г} \approx \frac{\hat{T}_0}{\hat{T}_0 + T_B} \approx \frac{2 \cdot 10^4}{2 \cdot 10^4 + 3} \approx 1 - 10^{-4},$$

$$\hat{K}_{НГ} = 1 - \hat{K}_{Г} \approx 10^{-4}.$$

4. Рассчитывают коэффициент оперативной готовности для условий задачи при параметре распределения Эрланга $k = 2$

$$\hat{K}_{ОГ}(\tau_З) \approx \hat{K}_{Г} \exp(-\lambda\tau_З)(1 + \lambda\tau_З) \approx 1 - 2.10^{-4}.$$

Контрольные вопросы

1. В чем принципиальное различие между единичными показателями структурной надежности «частота отказов» и «интенсивность отказов»?

2. При каком условии возможно ограничиться показателем интенсивности отказов и принимать его равным частоте отказов?

3. В чем отличие между показателями средней наработки до отказа и средней наработки на отказ?

4. Как для различных интервалов времени соотносятся параметр потока отказов и частота отказов объекта?

5. При каком условии функция готовности совпадает с коэффициентом готовности объекта?

6. При каких условиях коэффициент оперативной готовности преобразуется в функцию готовности, а при каких условиях – в вероятность безотказной работы объекта?

7. Какие методы оценки коэффициента сохранения эффективности применяются на практике?

8. Какие законы распределения случайной наработки до отказа характерны для объектов информационных систем?

9. Какие законы распределения случайного времени до восстановления типичны для цифровых устройств и систем?

10. При каких значениях целочисленного параметра распределение Эрланга преобразуется в экспоненциальное, нормальное распределение, распределение Релея случайного времени безотказной работы объекта соответственно?

Глава I.3. МАРКОВСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА НАДЕЖНОСТИ

I.3.1. Марковские цепи

На всех этапах жизненного цикла информационных систем для обеспечения их надежности широко применяется математическое моделирование на основе Марковских цепей.

В 1907г. выдающийся русский ученый А.А.Марков опубликовал работу, в которой определил и исследовал случайные процессы, получившие в дальнейшем в мировой технической литературе название *Марковских.* Он рассмотрел простую и очень полезную форму зависимости между случайными величинами, образующими вероятностный процесс, описание которого заключается в следующем.

Рассматривается последовательность экспериментов со следующими свойствами. Известно конечное число исходов экспериментов $s_1, s_2, ..., s_j, ..., s_n$. Вероятность исхода эксперимента s_j либо вовсе не зависит от исходов предшествующих экспериментов, либо зависит лишь от исхода единственного эксперимента, непосредственно предшествующего данному эксперименту. Эта вероятность задается числами p_{ij}, представляющими вероятность исхода s_j данного эксперимента, при условии, что предшествующий эксперимент имел исход s_i. Исходы $s_1, s_2, ..., s_j, ..., s_n$ называются *состояниями*, а числа p_{ij} – *вероятностями переходов.*

На рис. I.3.1 приведен пример реализации описанной выше случайной последовательности в предположении одинакового

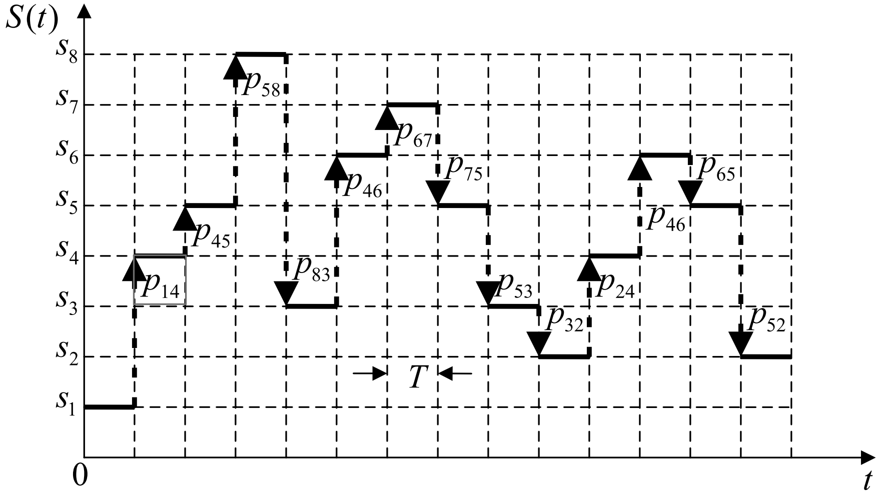

Рис. I.3.1. Пример Марковской случайной последовательности

постоянного времени T пребывания в каждом из состояний. Рассмотренная случайная последовательность смены состояний является Марковской. ***Ее отличительная особенность – это отсутствие последействия***, т.е. будущие состояния зависят от прошлых состояний только через настоящее состояние s_i. Другими словами, ***выбор будущего состояния*** s_j ***зависит от настоящего состояния и не зависит от того, когда и каким образом система перешла в настоящее состояние.***

Марковские цепи подразделяются на ***дискретные и непрерывные*** [19]. Приведенный на рис. I.3.1 пример Марковской случайной последовательности относится к классу дискретных Марковских цепей. Они характеризуются следующими тремя свойствами:

1. Марковское свойство (отсутствие последействия).

2. Множество состояний системы конечно $\{1,2,...,n\}$ или счетно $\{1,2,...\}$.

3. Время пребывания случайного процесса в каждом состоянии s_i постоянное или мгновенное.

Непрерывные Марковские цепи (Марковские процессы) отличаются от дискретных только третьим свойством – ***время пребывания в каждом состоянии непрерывно и случайно, причем длительность этого времени распределена по экспоненциальному закону.***

Как дискретные, так и непрерывные Марковские цепи бывают *однородными* или *неоднородными*.

Если вероятности переходов p_{ij} ***не зависят от количества шагов m между состояниями (количества переходов), т.е. не зависят от выбора начального момента времени, то такая цепь называется однородной.*** В этих цепях вероятности переходов стационарны во времени. Модели надежности сложных технических систем строятся, главным образом, с помощью однородных дискретных и непрерывных Марковских цепей.

На основании Марковского свойства (отсутствие последействия) справедлива следующая формула вычисления за *m* шагов вероятностей переходов $p_{ij}^{(m)}$ [22]:

$$p_{ij}^{(m)} = \sum_k p_{ik}^{(m-1)} p_{kj}\,,\ m=2,3,\ldots$$

Это равенство означает, что для попадания из текущего состояния s_i в состояние s_j за *m* шагов необходимо сначала попасть в состояние s_k за *(m-1)* шагов, а затем за один шаг перейти из состояния s_k в состояние s_j. Вероятность этих двух независимых событий равна произведению вероятностей каждого из них, и если просуммировать эти произведения по всем возможным промежуточным состояниям s_k, то получится вероятность $p_{ij}^{(m)}$.

Марковские цепи с дискретным или непрерывным параметром *конечны*, если количество состояний ограничено, и *бесконечны* в противном случае.

Основной задачей исследования Марковских цепей является нахождение стационарной вероятности P_i того, что система находится в состоянии s_i. Обозначим через $P_i^{(m)}$ вероятность того, что система на *m*-м шаге перемещения в пространстве состояний находится в состоянии s_i. Тогда распределение P_i называется *стационарным*, если при его выборе в качестве начального распределения вероятностей (т.е. при $P_i^{(0)} = P_i$) для всех *m* получают равенство $P_i^{(m)} = P_i$.

Существует важное понятие *эргодичность.* Состояние s_i называют эргодическим, если оно является *возвратным и апериодическим.* ***Для однородной эргодической Марковской цепи всегда существуют предельные вероятности***

$$\lim_{m\to\infty} P_i^{(m)} = P_i, \tag{3.1}$$

не зависящие от начального распределения вероятностей. Более того, имеет место одна из следующих двух возможностей:

• Все состояния цепи *невозвратные* или все *возвратные нулевые.* Тогда стационарные вероятности P_i пребывания системы в возможных состояниях определяются как $P_i = 0$ для всех *i* и стационарного распределения вероятностей не существует.

Существует понятие *возвратного ненулевого* состояния. Для его пояснения найдем среднее время между соседними пребываниями в состоянии s_i дискретной Марковской цепи с постоянным временем T пребывания в каждом из промежуточных состояний и в состоянии s_i:

$$\tau_{ii} = T\sum_{m=1}^{\infty} mP_{ii}^{(m)}.$$

Состояние s_i называется *возвратным нулевым*, если $\tau_{ii} = \infty$, и *возвратным ненулевым*, если $\tau_{ii} < \infty$.

• Все состояния цепи возвратные ненулевые, и тогда $P_i > 0$ для всех *i*. В этом случае вектор $\vec{P} = (P_1, ..., P_n)$ является стационарным распределением вероятностей, причем

$$P_i = \frac{T}{\tau_{ii}}.$$

Заметим, что случайные величины P_i однозначно определяются следующими равенствами:

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = 1; \tag{3.2}$$

$$P_i = \sum_j P_j p_{ji}. \tag{3.3}$$

Формула (3.2) является *нормирующим условием для стационарных (финальных) вероятностей* P_i *и определяет полную группу событий.* Формула (3.3) определяет количественную связь стационарной вероятности P_i с другими стационарными вероятностями Марковской цепи. Она задана бинарным отношением на множестве состояний S.

I.3.2. Переходные вероятности и интенсивности переходов

I.3.2.1. Переходные вероятности

Для построения моделей надежности информационных систем с помощью математического аппарата ***дискретных*** Марковских цепей должны быть заданы:

– переходные вероятности $p_{ij}(m)$, где $i, j = 1, 2, ...n$, n – число состояний в системе;

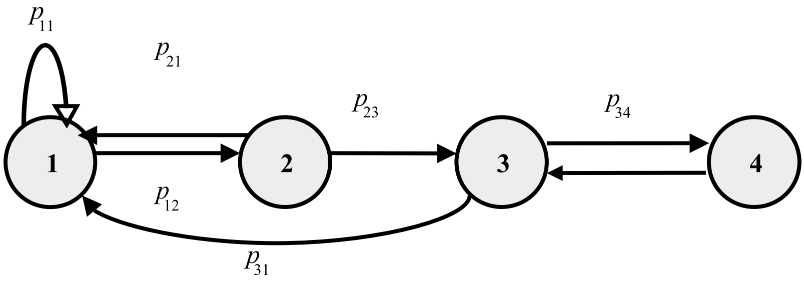

Рис I.3.2. Граф состояний системы согласно примеру 3.1

– m – номер шага для расчета соответствующей дискретной величины времени;

– вектор $\vec{P}_i(0)$ начальных вероятностей.

При *однородной* Марковской цепи (которая при решении задач надежности находит наибольшее применение) переходные вероятности не зависят от номера шага и остаются неизменными в течение всего времени функционирования системы, т.е.

$$p_{ij}(0) = p_{ij}(1) = ... = p_{ij}(m) = p_{ij}\,.$$

Матрица $\Pi = (p_{ij})$ переходных вероятностей задается также как и матрица связности, с тем лишь отличием, что вместо булевых элементов $< x_i, \mathrm{x_j} >$ в ней содержатся вероятности переходов p_{ij}. На рис. I.3.2 показан фрагмент графовой модели надежности системы. Применительно к ориентированному графу Марковской цепи, показанному на рис. I.3.2, матрица переходных вероятностей имеет следующий вид:

$$\Pi = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 & 0 \\ p_{21} & 0 & p_{23} & 0 \\ p_{31} & 0 & 0 & p_{34} \\ 0 & 0 & p_{43} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Матрица переходных вероятностей характеризуется двумя важными свойствами:

• Матрица Π всегда ***квадратная*** размерности $n \times n$, где n – количество состояний в системе (вершин в графовой модели);

• Матрица Π – ***стохастическая,*** т.е. $\sum_i p_{ij} = 1$ (сумма всех переходных вероятностей, приписанных дугам, исходящим из вершины s_i, равна 1, так как они образуют полную группу событий). Если в данной вершине есть петля, то она также расценивается как исходящая дуга. Следует отметить, что если задана матрица Π, то разметка дуг графа не обязательна. И наоборот, если дуги графа размечены, то не обязательно задавать матрицу Π.

I.3.2.2. Интенсивности переходов

Для однородной ***непрерывной*** Марковской цепи переходные вероятности являются функциями времени и удовлетворяют следующим трем условиям:

$$1.\, p_{ij}(t) \geq 0;$$

$$2.\, \sum_j p_{ij}(t) = 1;$$

$$3.\, p_{ij}(t+\tau) = \sum_k p_{ik}(t) p_{kj}(\tau).$$

Кроме того, справедливо следующее четвертое условие (условие стохастической непрерывности):

$$4.\ \lim_{t\to 0} p_{ij}(t) = p_{ij}(0) = \begin{cases} 1, & \mathrm{i} = \mathrm{j}; \\ 0, & \mathrm{i} \neq \mathrm{j}. \end{cases}$$

Последнее условие означает, что для системы, находящейся в состоянии s_i, вероятность перехода в иное состояние при $t \to 0$ также стремится к нулю.

Марковскую цепь, удовлетворяющую указанным четырем условиям, принято называть ***стандартной*** Марковской цепью.

Для стандартной Марковской цепи переходные вероятности дифференцируемы при всех $t \geq 0$ и при этом всегда существует предел λ_{ij}:

$$\lambda_{ij} = p_{ij}(0) = \lim_{t \to 0} \frac{p_{ij}(t) - p_{ij}(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{p_{ij}(t)}{t}, \text{ при } i \neq j.$$

Предельные величины λ_{ij} играют важнейшую роль в теории Марковских цепей с непрерывным временем. Величины λ_{ij} ($i \neq j$) – неотрицательны и конечны: $0 \leq \lambda_{ij} < \infty$. Они называются ***интенсивностями переходов*** из состояния s_i в состояние s_j, т.е. из *i* в *j*.

Из условия $\sum_j p_{ij}(t) = 1$ и соотношения для λ_{ij} путем предельного перехода получаем

$$-\lambda_{ii} = \sum_{i \neq j} \lambda_{ij} . \qquad (3.4)$$

Состояние s_i, для которого выполняются условия $\lambda_{ij} < \infty$ и (3.4) называется *регулярным* состоянием.

I.3.3. Методы решения Марковских моделей надежности

I.3.3.1. Основные методы решения эргодических Марковских моделей надежности

Метод матричного уравнения

Во многих практических задачах расчета надежности состояния моделей исследуемых систем сообщаются друг с другом. Это означает, что случайный дискретный процесс может «выйти» из любого состояния. В результате динамика смены состояний модели системы соответствует эргодической Марковской цепи.

Задача состоит в определении стационарных (финальных) вероятностей однородной Марковской цепи, т.е. вектора $\vec{P} = (P_1, P_2, ..., P_n)$ (n – число состояний Марковской модели надежности) при известной матрице переходных вероятностей Π и векторе $\vec{P}^{(0)}$ начальных вероятностей.

Используя определение вероятностей переходов, найдем вектор вероятностей состояний на первом шаге:

$$\vec{P}^{(1)} = \vec{P}^{(0)}\Pi .$$

Аналогично на втором шаге

$$\vec{P}^{(2)} = \vec{P}^{(1)}\Pi = (\vec{P}^{(0)}\Pi)\Pi = \vec{P}^{(0)}\Pi^2 .$$

Обобщая это рассуждение, приходим к уравнению

$$\vec{P}^{(m)} = \vec{P}^{(m-1)}\Pi = \vec{P}^{(0)}\Pi^m . \qquad (3.5)$$

Уравнение (3.5) описывает динамику однородного дискретного Марковского процесса.

Согласно уравнению (3.4), находим, что

$$\lim_{m\to\infty} \vec{P}^{(m)} = \lim_{m\to\infty} \vec{P}^{(m-1)}\Pi .$$

В п. I.3.1 было установлено, что стационарные распределения вероятностей задаются равенством (3.1), которое представляется векторным уравнением

$$\lim_{m\to\infty} \vec{P}^{(m)} = \vec{P} .$$

Следовательно,

$$\vec{P} = \vec{P} \cdot \Pi . \tag{3.6}$$

Согласно формуле (3.6) ***решение для всех стационарных вероятностей пребывания Марковской цепи в каждом из n состояний (вектор $\vec{P}$) не зависит от начального распределения вероятностей.*** Это очень важный практический результат. Он позволяет находить неизвестный вектор – столбец вероятностей $\vec{P}$ только по заданной матрице переходных вероятностей путем умножения неизвестного вектора – строки $\vec{P}$ размерности $1 \times n$ на матрицу П размерности $n \times n$. В результате получается система из n алгебраических уравнений с n неизвестными. Решение этой системы осуществляется с помощью нормирующего условия (3.2).

Пример I.3.1. Пусть модель надежности системы описывается эргодической Марковской цепью, показанной на рис.I.3.2. Матрица переходных вероятностей для этой цепи имеет вид:

$$\Pi = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 & 0 \\ p_{21} & 0 & p_{23} & 0 \\ p_{31} & 0 & 0 & p_{34} \\ 0 & 0 & p_{43} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Все переходные вероятности заданы.

Требуется определить формульные выражения неизвестных стационарных вероятностей P_i пребывания системы в каждом из четырех состояний.

Решаем с помощью матричного уравнения (3.6) следующим образом:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} = (P_1, P_2, P_3, P_4) \begin{bmatrix} p_{11} p_{12} 0..0 \\ p_{21} 0..p_{23} 0 \\ p_{31} 0..0..p_{34} \\ 0...0...p_{43} 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 = P_1 p_{11} + P_2 p_{21} + P_3 p_{31} \\ P_2 = P_1 p_{12} \\ P_3 = P_2 p_{23} + P_4 p_{43} \\ P_4 = P_3 p_{34} \end{bmatrix}$$

Выразим все неизвестные стационарные вероятности через P_1:

$$P_2 = P_1 p_{12};$$

$$P_3 = P_1 \frac{p_{12} p_{23}}{1 - p_{34} p_{43}};$$

$$P_4 = P_1 \frac{p_{12} p_{23} p_{34}}{1 - p_{34} p_{43}}.$$

С учетом нормирующего условия (3.2), находим

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = P_1 (1 + p_{12} + \frac{p_{12} p_{13}}{1 - p_{34} p_{43}} + \frac{p_{12} p_{13} p_{34}}{1 - p_{34} p_{43}}) = P_1 \cdot A = 1.$$

Следовательно,

$$P_1 = 1/A; P_2 = \frac{p_{12}}{A}; P_3 = \frac{p_{12} p_{23}}{A(1 - p_{34} p_{43})}; P_4 = \frac{p_{12} p_{23} p_{34}}{A(1 - p_{34} p_{43})}.$$

Метод миноров

Приведенная схема определения стационарных вероятностей эргодической Марковской цепи удобна для слабо связанных состояний систем. Рассмотрим более универсальный способ определения вероятностей P_i. С этой целью преобразуем матричное уравнение (3.6) к виду:

$$\vec{P} - \vec{P} \cdot \Pi = \vec{P}(I - \Pi) = 0 \text{ или } \vec{P} \cdot D = 0, \tag{3.7}$$

где 0 – нулевая матрица, I – единичная матрица (в ней единицы на главной диагонали, а в остальных – нули).

Система уравнений (3.7) с учетом нормирующего условия (3.2) имеет единственное решение

$$P_i = \frac{D_i}{\sum\limits_{i \in S} D_i}, \tag{3.8}$$

где D_i – главный минор определителя матрицы D, получаемый вычеркиванием i-ой строки и i-го столбца матрицы.

Данный метод решения матричного уравнения получил названия *метода миноров*. При большом числе состояний модели надежности системы нахождение миноров определителя матрицы D становится затруднительным. Эту сложность удается преодолеть с помощью графовых методов, изложенных в главе I.4.

I.3.3.2. Метод дифференциальных уравнений А.Н. Колмогорова

Динамика изменения надежности информационных систем, поведение которых описывается непрерывной однородной Марковской цепью, моделируется с помощью дифференциальных уравнений выдающегося российского математика А.Н.Колмогорова [20, 21, 22].

Пусть $\Pi(t)$ – матрица переходных вероятностей однородной непрерывной Марковской цепи. Определим данную матрицу следующим образом:

$$\dot{\Pi}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Pi(t+\Delta t) - \Pi(t)}{\Delta t}.$$

Используя соотношение Колмогорова, можно записать

$$\Pi(t+\Delta t) = \Pi(t) \cdot \Pi(\Delta t).$$

Следовательно,

$$\dot{\Pi}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \Pi(t) \frac{\Pi(\Delta t) - I}{\Delta t}, \qquad (3.9)$$

где I – единичная матрица.

Из определения интенсивностей переходов и формулы (3.9) следует, что

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Pi(\Delta t) - I}{\Delta t} = \Lambda,$$

где $\Lambda = (\lambda_{ij})$ - матрица интенсивностей переходов.

Для непрерывной однородной Марковской цепи получаем уравнения

$$\dot{\Pi}(t) = \Pi(t) \cdot \Lambda \qquad (3.10)$$

Или в скалярной форме

$$\dot{P}_{ij}(t) = \sum_{ijk \in S} p_{ij}(t) \lambda_{jk}(t).$$

Уравнения (3.10) называются уравнениями Колмогорова. Решение этой матричной системы при начальном условии $\Pi(0)=1$ определяет матрицу переходных вероятностей $\Pi(t)$ как функцию времени.

По аналогии с дискретными Марковскими цепями справедливо основное векторно – матричное соотношение для однородных непрерывных цепей

$$\vec{P}(t)=\vec{P}(0)\cdot\Pi(t)\,.$$

Дифференцируя это соотношение и учитывая уравнения (3.10), получим

$$\frac{d\,\vec{P}(t)}{dt}=\vec{P}(t)\Lambda=\Lambda^{T}\,\vec{P}(t) \tag{3.11}$$

Или в скалярной форме

$$\dot{P}_i(t)=\sum_{ij\in S}\lambda_{ji}P_j(t)\,,$$

где с помощью символа λ_{ji} обозначена интенсивность перехода системы из состояния s_j в состояние s_i.

Уравнения (3.11) называются дифференциальными уравнениями Колмогорова.

Учитывая, что $-\lambda_{ii}=\sum\limits_{i\neq j}\lambda_{ij}$, можно записать

$$\dot{P}_i(t)=-P_i(t)\sum_{i=j}\lambda_{ij}+\sum_{i\neq j}\lambda_{ji}P_j(t)\,,\text{ где }\dot{P}_i(t)=\frac{dP_i(t)}{dt}\,. \tag{3.12}$$

Из выражения (3.12) следует правило составления дифференциальных уравнений Колмогорова. Оно формируется следующим образом [22]:

В левой части каждого дифференциального уравнения стоит производная вероятности состояния, а правая часть содержит столько членов, сколько дуг Марковской графовой модели надежности системы связано с данным состоянием. Если дуга ориентирована из данного состояния, соответствующий член уравнения включается со знаком «минус»; если в данное состояние – со знаком «плюс»; каждый член равен произведению интенсивности перехода, соответствующей данной дуге, на вероятность того состояния, из которого исходит дуга.

I.3.3.4.Расчеты стандартных показателей надежности

Вероятность безотказной работы. При нахождении вероятности безотказной работы необходимо в графе Марковской модели вместо всех состояний отказов ввести поглощающие состояния. Это фактически означает, что все подмножество неработоспособных состояний $\overline{S}_P$ (см. п.1.2) представляется одним эквивалентным поглощающим состоянием, т.е. (что равнозначно) обращаются в нуль все интенсивности переходов из состояний отказа. Учитывая эти соображения, примем следующее обозначение: $S(i)$ – множество состояний, в которые возможен переход из данного состояния s_i (при $S(i) \subset S$); $S_P \bigcup \overline{\mathrm{S}}_P = \mathrm{S}$.

Для каждого состояния работоспособности $i \in S_P$ справедливо следующее дифференциальное уравнение:

$$\dot{P}_i(t) = -P_i(t) \sum_{j \in S(i)} \lambda_{ij} + \sum_{j \in S_P} \lambda_{ji} P_j(t). \qquad (3.13)$$

Если Марковская графовая модель содержит k состояний работоспособности, то может быть составлено k дифференциальных уравнений. Все эти вероятности и начальные условия $\vec{P}(0)$ используются для нахождения вероятности безотказной работы. С этой целью к записанной системе дифференциальных уравнений применяется преобразование Лапласа, в результате чего получается в изображениях Лапласа система алгебраических уравнений:

$$z\omega_i(z) - P_i = -\omega_i(z)\sum_{j\in S(i)}\lambda_{ij} + \sum_{j\in S_P}\lambda_{ji}\omega_j(z). \tag{3.14}$$

При этом $$\sum_{i=1}^{k} z\omega_i(z) = 1,$$

где $\omega_i(z) = \int_0^\infty P_i(t)e^{-zt}dt$ – преобразование Лапласа для вероятности $P_i(t)$.

Систему уравнений (3.14) удобно записать в операторной форме:

$$a_{11}\omega_1(z) + a_{12}\omega_2(z) + ... + a_{1k}\omega_k(z) = c_1,$$

$$a_{21}\omega_1(z) + a_{22}\omega_2(z) + ... + a_{2k}\omega_k(z) = c_2,$$

....

$$a_{k1}\omega_1(z) + a_{k2}\omega_2(z) + ... + a_{kk}\omega_k(z) = c_n$$

где a_{ij} – коэффициент при j-м члене в i-й строке; c_i – i-й свободный член.

Данную систему алгебраических уравнений можно решить, используя правило Крамера:

$$\omega_i(z) = D_i(z) / D(z), \tag{3.15}$$

где $D(z)$ – определитель системы алгебраических уравнений, $D_i(z)$ – тот же определитель, в котором i –й столбец заменен на столбец свободных членов.

Далее находят преобразование Лапласа вероятности безотказной работы системы:

$$\omega(z) = \sum_{i \in S_P} \omega_{\mathrm{i}}(z) = \frac{1}{D(z)} \sum_{i \in S_P} \mathrm{D}_{\mathrm{i}}(z).$$

Коэффициент готовности, средняя наработка до отказа и средняя наработка на отказ. *Коэффициент готовности* определяется как сумма стационарных (финальных) вероятностей пребывания системы в множестве работоспособных состояний:

$$K_Г = \sum_{i \in S_P} P_i .$$

По определению среднюю наработку до отказа системы находят путем интегрирования вероятности безотказной работы

$$T_{CP} = \int_0^\infty P(t)dt = \left[\int_0^\infty e^{-zt} P(t)dt \right]_{z=0} = \omega(z)\Big|_{z=0}$$

Таким образом, чтобы найти среднюю наработку до отказа (или между отказами) достаточно решить систему алгебраических уравнений (3.15) при условии, что z=0

$$-\dot{P}_i(0) = -\omega_i(0) \sum_{j \in S(i)} \lambda_{ij} + \sum_{j \in S_P} \lambda_{ji} \omega_j(0). \qquad (3.16)$$

При этом для определения *средней наработки до отказа* в качестве начальных условий принимаются: $P_i(0)=1$ и $P_j(0)=0$ для $s_P, s_j \in S\ ; i \neq j$, где s_i – исходное состояние системы.

Для определения *средней наработки между отказами* в качестве начальных условий принимаются:

$$P_i(0) = \frac{P_i}{\sum_{j \in S_P} P_j}\ . \qquad (3.17)$$

Эти «взвешенные» вероятности предназначены для вычисления начальных условий пребывания системы в любом из множества работоспособных состояний.

I.3.4. Примеры построения и решения Марковских моделей надежности

I.3.4.1. Анализ надежности восстанавливаемого контролируемого устройства в предположении идеальной надежности средств контроля

Постановка задачи

Рассматривается одно устройство. Какая-либо естественная или искусственная избыточность, в том числе структурное резервирование, отсутствует. В процессе работы возможно нарушение работоспособности устройства. Любое нарушение работоспособности устройства расценивается как его отказ. Предполагается, что все отказы имеют внезапный характер. Устройство охвачено одноуровневым контролем. Под одноуровневым контролем понимается введение в состав устройства встроенных аппаратных, программных, программно – аппаратных средств контроля и диагностирования, а также применение функциональных контролей, которые в совокупности правильно обнаруживают отказы устройства. Средства одноуровневого контроля в дальнейшем будем называть *штатными средствами* контроля. Эффективность контроля оценивается *вероятностью правильного обнаружения отказов* α – это комплексный показатель эффективности средств контроля, учитывающий полноту охвата устройства контролем и диагностикой, непрерывность, своевременность и достоверность результатов контроля и диагностирования, возможности применяемых функциональных контролей. Обозначим элементарное событие обнаружения отказа каким – либо одним *i*-ым средством контроля *(i=1…N)* как A_i. Тогда сложное событие *A*, состоящее в том, что осуществляется хотя бы одно из событий $A_1, \ldots, A_N$, равно $A = \sum_{i=1}^{N} A_i$.

Отсюда вероятность правильного обнаружения отказа устройства α есть вероятность суммы конечного числа событий:

$$\alpha = P\{A\} = P\{\sum_{i=1}^{N} A_i\} = 1 - P\{\prod_{i=1}^{N} \overline{A_i}\} = 1 - \prod_{i=1}^{N} \overline{\alpha}_i .$$

В свою очередь, $\overline{\alpha} = 1 - \alpha = \prod_{i=1}^{N} \overline{\alpha_i}$.

Средства встроенного контроля и диагностирования, а также функционального контроля не контролируются (второй уровень контроля отсутствует).

Предполагаем, что штатные средства контроля идеально надежны.

Обнаружение отказа возможно как штатными, так и в ряде случаев нештатными средствами. Под событиями обнаружения *нештатными средствами* будем понимать события обнаружения отказов визуальным путем (в результате осмотра устройства или по косвенным признакам наблюдений за показаниями индикаторов), а также с помощью других устройств, не предназначенных для обнаружения отказов данного устройства. Каждое событие обнаружения возможного отказа нештатными средствами анализируется обслуживающим персоналом. Это позволяет принять с большой долей уверенности, что отказ обнаружен правильно (отсутствует ошибка первого рода) и отсутствует также ложное обнаружение (ошибка второго рода), а также предположить, что как штатные, так и нештатные средства обнаружения отказов идеально надежны.

Задача заключается в исследовании стационарных вероятностных и временных показателей надежности устройства со встроенным аппаратным контролем с учетом неидеальных характеристик эффективности и надежности средств контроля, а также возможности обнаружения пропущенного средствами контроля отказа (скрытого отказа) нештатными средствами [23].

Модель надежности устройства

Граф состояний устройства с одноуровневым контролем показан на рис. I.3.3. Вершинам (состояниям) графовой модели рис. I.3.3 приписаны случайные времена возникновения отказа,

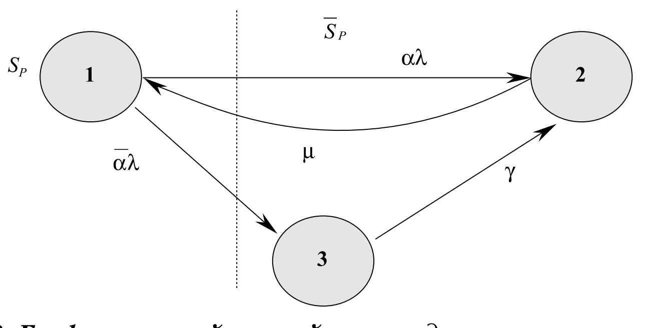

Рис. I.3.3. Граф состояний устройства с одноуровневым контролем в предположении идеальной надежности средств контроля.

восстановления устройства после отказа, длительности контроля нештатными средствами. Законы распределения этих случайных величин на практике устанавливаются приблизительно, только с некоторой долей гарантии. Поэтому для получения уверенности в результатах исследования примем, что какой-либо предварительной информации, проливающей свет на поведение указанных случайных величин, нет. Это означает, что потоки этих случайных величин обладают свойствами стационарности – на равных отрезках времени наблюдения за работой устройства произойдет примерно равное количество отказов, ординарности – вероятность возникновения одновременно двух и более отказов одного устройства чрезвычайно мала, отсутствия последействия – отказы не зависимы между собой. Другими словами, это означает, что их поведение может моделироваться формулой простейшего потока (потока Пуассона). При этих условиях интенсивности отказов λ, восстановлений μ, обнаружений нештатными средствами γ являются постоянными величинами, а распределения указанных случайных величин экспоненциальными

Ребрам графа на рис. I.3.3 приписаны интенсивности переходов. Так, из состояния 1 исходят два ребра, которым приписаны интенсивности $\alpha\lambda$ и $\overline{\alpha}\lambda$ соответственно. Это означает, что исходный поток отказов устройства разделяется на два составных потока, один из которых включает обнаруженные штатными средствами с вероятностью α события отказов, второй поток – не обнаруженные с вероятностью $\overline{\alpha}=1-\alpha$ события отказов. Первый поток поступает на восстановление работоспособности устройства (состояние 2). Второй поток поступает в состояние 3 обнаружения отказов нештатными устройствами. Итак, состояния графа:

1 – состояние исправности устройства:

2 – состояние восстановления, которое наступает либо после обнаружения отказа основного оборудования с вероятностью α,

либо по истечении некоторого (обычно большого) времени существования скрытого отказа основного оборудования, когда факт этого отказа каким-то образом проявился.

3 – состояние скрытого отказа устройства.

Экспоненциальные законы распределения отказов и восстановлений устройства позволяют для моделирования его надежности применить непрерывный Марковский случайный процесс и описать поведение устройства дифференциальными уравнениями А.Н.Колмогорова:

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -\lambda P_1(t) + \mu P_2(t);$$

$$\frac{dP_2(t)}{dt} = \alpha\lambda P_1(t) - \mu P_2(t) + \gamma P_3(t);$$

$$\frac{dP_3(t)}{dt} = \overline{\alpha}\lambda P_1(t) - \gamma P_3(t).$$

Здесь $P_1(t), P_2(t), P_3(t)$ - вероятности пребывания устройства в соответствующих состояниях в течение времени *t.*

Вектор начальных вероятностей состояний надежности устройства:

$$P_1(0) = 1;\ P_2(0) = 0;\ P_3(0) = 0.$$

В установившемся режиме работы устройства после его включения данные дифференциальные уравнения преобразуются в алгебраические, поскольку

$$\frac{dP_i(t)}{dt}\Big|_{t\to\infty} = 0 \text{ и } P_i(t)\Big|_{t\to\infty} = P_i.$$

Таким образом,

$$0 = -\lambda P_1 + \mu P_2;$$

$$0 = \alpha\lambda P_1 - \mu P_2 + \gamma P_3; \qquad (3.18)$$

$$0 = \overline{\alpha}\lambda P_1 - \gamma P_3.$$

Здесь P_1, P_2, P_3 – финальные (установившиеся) вероятности пребывания устройства в соответствующих состояниях, причем $P_1 + P_2 + P_3 = 1$, поскольку они образуют полную группу событий.

Для решения системы алгебраических уравнений (3.18) выразим все финальные вероятности через вероятность P_1:

$$P_2 = \frac{\lambda}{\mu} P_1; \; P_3 = \frac{\overline{\alpha}\lambda}{\gamma} P_1.$$

Следовательно,

$$P_1 (1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\overline{\alpha}\lambda}{\gamma}) = 1 \text{ и}$$

$$P_1 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\overline{\alpha}\lambda}{\gamma}} = \frac{1}{H}; \; P_2 = \frac{\lambda/\mu}{H}; \; P_3 = \frac{\overline{\alpha}\lambda/\gamma}{H}.$$

Эти результаты достаточны для определения стационарных вероятностных и временных показателей надежности исследуемого устройства.

Показатели надежности

Критерий отказа устройства. Обозначим все множество состояний как $S=\{1,2,3\}$. Множество работоспособных состояний $S_P=\{1\}$. Множество неработоспособных состояний

$$\overline{S_P}=\{2,3\}\text{, где } S_P\bigcup\overline{S}_P=S \text{ и } S_P\bigcap\overline{S}_P=0.$$

Коэффициент готовности есть вероятность пребывания устройства в работоспособном состоянии, т.е. в состоянии «1». Следовательно,

$$K_\Gamma=P_1=\frac{1}{1+\dfrac{\lambda}{\mu}+\dfrac{\overline{\alpha}\lambda}{\gamma}}=\frac{T_0}{T_0+T_B+\overline{\alpha}T_{ОБН}}. \qquad (3.19)$$

где $T=1/\lambda;T_B={}^1\!/_\mu;T_{ОБН}={}^1\!/_\gamma$, $T;T_B;T_{ОБН}$ – среднее наработка на отказ, среднее время до восстановления и среднее время обнаружения скрытого отказа устройства нештатными средствами соответственно. При идеальной эффективности штатных средств контроля, когда $\alpha=1,\overline{\alpha}=0$ формула (3.19) преобразуется к виду

$$K_\Gamma=\frac{\mu}{\mu+\lambda}=\frac{T_0}{T_0+T_B}, \qquad (3.20)$$

Аналогичный результат имеет место, если $\overline{\alpha}\neq 0,\gamma\to\infty$. При стремящейся к бесконечности интенсивности обнаружения скрытого отказа нештатными средствами подразумевается, что время обнаружения отказа этими средствами практически мгновенно, поскольку $T_{ОБН}=\dfrac{1}{\gamma}\to 0$.

Таким образом, как при предположении идеальной эффективности штатных средств контроля, так и при предположении мгновенного времени обнаружения скрытого отказа нештатными средствами полученная формула коэффициента готовности (3.19) преобразовывается в формулу (3.20), заданную стандартом [8]. Следовательно, формула (3.20) применима только при указанных выше предпосылках, что не соответствует практическим условиям. Полученная формула коэффициента готовности устройства (3.19) более корректна – она учитывает скрытые отказы и реальные ограничения в эффективности штатных средств контроля и длительности обнаружения пропущенных отказов нештатными средствами.

Для иллюстрации значимости полученного результата рассмотрим практический пример. Пусть средняя наработка на отказ устройства равна $T_0 = \frac{1}{\lambda}$=100 ч., среднее время до восстановления – $T_B = \frac{1}{\mu}$=8 ч., вероятность пропуска отказа штатными средствами контроля – $\overline{\alpha} = 0.3$, среднее время обнаружения скрытого отказа нештатными средствами $T_{ОБН} = \frac{1}{\gamma} = 48$ч. Тогда, в соответствии с формулой (3.19), $K_Г$=0.82, а коэффициент неготовности (простоя) $K_{НГ} = K_{ПР} = 1 - K_Г$=0.18. Если же руководствоваться формулой (3.20), то $K_Г$=0.93 и $K_{ПР} = 0.07$. Таким образом, просчеты в планировании эксплуатации устройства по коэффициенту простоя могут составлять в данном случае более чем в 2 раза.

Рассмотрим временные показатели надежности устройства. К ним в соответствии со стандартом [8] относятся:

– средняя наработка до отказа $T_{СР} = \frac{1}{\lambda}$;

– средняя наработка на отказ T_0;

Представляет практический интерес определение среднего времени пребывания устройства в состоянии отказа – среднего времени простоя $T_{ПР}$.

Для определения перечисленных показателей воспользуемся формулами, приведенными в работах [24, 25]

$$T_0 = \frac{\sum\limits_{i \in S_P} P_i}{\sum\limits_{i \in S_P} P_i \sum\limits_{j \in \overline{S_P}} \lambda_{ij}}; \tag{3.21}$$

$$T_{ПР} = \frac{\sum\limits_{i \in \overline{S}_P} P_i}{\sum\limits_{i \in \overline{S}_P} P_i \sum\limits_{j \in S_P} \lambda_{ij}} \tag{3.22}$$

Применительно к нашей задаче $S_P = \{1\}$, $\overline{S_P} = \{2,3\}$. Руководствуясь формулой (3.21) и графом на рис.I.3.3, находим

$$T_0 = \frac{P_1}{P_1(\alpha\lambda + \overline{\alpha}\lambda)} = T_{CP} = \frac{1}{\lambda}.$$

Следовательно, для восстанавливаемого устройства без избыточности с постоянными интенсивностями отказов и восстановлений совпадают формульные выражения средней наработки до отказа и средней наработки на отказ, т.е. $T_O = T_{CP}$.

Среднее время пребывания устройства в состоянии отказа (среднее время простоя) определяется по формуле (3.22) в следующем виде:

$$T_{ПР} = \frac{P_2 + P_3}{P_2\mu} = \frac{\frac{\lambda}{\mu} + \frac{\overline{\alpha}\lambda}{\gamma}}{\lambda} = T_B + \overline{\alpha}T_{ОБН}.$$

Показатель готовности определен стандартом [2] в виде:

$$A = \frac{MUT}{MUT + MDT}. \tag{3.23}$$

Поскольку допускается замена показателя MUT на показатель средней наработки на отказ MTBF $= T$, то формула (3.18) может быть преобразована к виду:

$$A = \frac{MUT}{MUT + MDT} = \frac{MTBF}{MTBF + MDT},$$

или, что одно и то же, к виду

$$K_Г = \frac{T_0}{T_0 + T_{ПР}}, \text{ где}$$

$$K_Г = A; MTBF = T_0; T_{ПР} = MDT.$$

Таким образом, коэффициент готовности устройства есть отношение среднего интервала работы к сумме средних интервалов работы и простоя устройства, т.е.

$$K_Г = \frac{T_0}{T_0 + T_{ПР}} = \frac{T_0}{T_0 + T_В + \overline{\alpha} T_{ОБН}}.$$

Установленное выражение коэффициента готовности как отношение временных интервалов совпадает с полученным ранее через финальные вероятности выражением (3.18).

В целом международные стандарты [7, 12, 13] более реально, чем стандарт [8], определяет общий подход к определению формульного выражения коэффициента готовности устройства.

Установленное двумя способами формульное выражение коэффициента готовности контролируемого восстанавливаемого устройства со скрытыми отказами (3.19) отвечает концептуальным положениям международного стандарта и позволяет определять наиболее существенные направления повышения готовности каждого устройства и системы в целом.

I.3.4.2. Анализ надежности восстанавливаемого контролируемого устройства при неидеальной надежности средств контроля

Постановка задачи

В условиях предыдущего примера снимается ограничение о том, что встроенные средства контроля идеально надежны. В реальных условиях сложно создать высоконадежные средства контроля, обеспечивающие высокую гарантию обнаружения отказа. Это связано с тем, что эффективность встроенных средств аппаратного контроля напрямую зависит от (дополнительного) оборудования. Причем, эта связь имеет нелинейный характер – скорость роста оборудования превышает скорость роста эффективности средств контроля. Обозначим объем основного оборудования как W_o, а контрольного оборудования – $W_{к_o} = f(\alpha)$. Тогда объем оборудования устройства в целом определяется суммой $W_у = W_о + W_k$.

Предполагается, что при обнаружении отказа основное устройство восстанавливается. В противном случае возникает отказ, который может существовать некоторое (порой значительное) время до его обнаружения нештатными средствами. Отказ аппаратуры контроля по принятой предпосылке не вызывает отказ основного устройства. При одноуровневом контроле отказ средств контроля не обнаруживается и при последующем отказе основной аппаратуры возникает отказ устройства [26].

В работе [27] предложена эвристическая формула оценки вероятности правильного обнаружения отказов α

$$\alpha = 1 - \exp(-\delta \cdot \Delta W_{к}) ,$$

где $\delta \cong 5...10$ – нормировочный коэффициент, учитывающий сложность устройства,

$$\Delta W_{к} = \frac{W_{к}}{W_{o} + W} .$$

В дальнейшем принимаем в условиях данной задачи, что *контроль одноуровневый, потоки отказов, восстановлений, а также скрытых отказов основного устройства являются простейшими с параметрами λ, μ и γ соответственно*. Интенсивность отказов контрольного оборудования прямо пропорциональна его объему.

Задача заключается в исследовании показателей надежности устройства со встроенным аппаратным контролем с учетом неидеальных характеристик эффективности и надежности средств контроля, а также возможности обнаружения пропущенного средствами контроля отказа (скрытого отказа) нештатными средствами (визуально либо косвенным путем).

Марковская модель надежности устройства

Граф состояний устройства с одноуровневым контролем показан на рис. I.3.4, где вершиной «0» показано состояние исправности основного и контрольного оборудования устройства. Вершиной «1» показано состояние отказа контрольного оборудования, которое не влияет на работу основного устройства. Состояние 2 – состояние восстановления, которое наступает либо после обнаружения отказа основного обо-

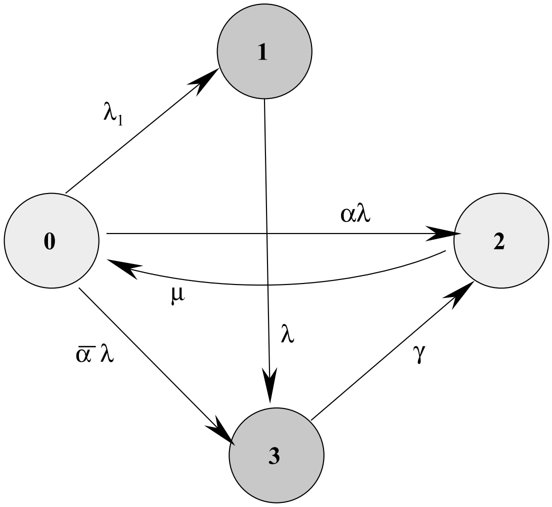

Рис. I.3.4. Граф состояний устройства с одноуровневым контролем

рудования с вероятностью α, либо по истечении некоторого (обычно большого) времени существования скрытого отказа основного оборудования, когда факт этого отказа каким-то образом проявился.

Вершиной «3» показано состояние скрытого отказа устройства. В данное состояние устройство попадает либо по причине отказа средств контроля и последующего отказа основного оборудования, либо по причине пропуска отказа средствами контроля. Во втором случае принято, что нецелесообразно учитывать надежность средств контроля, поскольку они уже не выполнили свою функцию обнаружения отказа.

В данной задаче множество работоспособных состояний $S_p = (0, 1)$; множество неработоспособных состояний $\overline{S}_p = (2, 3)$.

Вектор начальных вероятностей состояний надежности устройства (рис. I.3.4):

$$P_0(0) = 1;\ P_1(0) = 0;\ P_2(0) = 0;\ P_3(0) = 0.$$

Система дифференциальных уравнений А. Н. Колмогорова (определяется по графу состояний):

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -(\lambda + \lambda_1)P_0(t) + \mu P_2(t);$$

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = \lambda_1 P_0(t) - \lambda P_1(t); \qquad (3.24)$$

$$\frac{dP_2(t)}{dt} = \alpha\lambda P_0(t) - \mu P_2(t) + \gamma P_3(t);$$

$$\frac{dP_3(t)}{dt} = \overline{\alpha}\lambda P_0(t) + \lambda P_1(t) - \gamma P_3(t),$$

где $\sum_{i=0}^{3} P_i(t) = 1$.

В системе дифференциальных уравнений (3.24) состояния отказа 2 и 3 являются *отражающими*. Это позволяет найти показатели готовности, в частности, стационарные коэффициенты готовности и неготовности.

При $t \to \infty$ в стационарном режиме работы системы имеют место следующие соотношения:

$$P_i(t) = P_i \text{ и } \frac{dP_i(t)}{dt} = 0 \text{, где } i = 0, 1, 2, 3.$$

Система алгебраических уравнений (при $t \to \infty$) определяется из системы дифференциальных уравнений (3.24) в следующем виде:

$$-(\lambda+\lambda_1)P_0+\mu P_2=0;$$

$$\lambda_1 P_0-\lambda P_1=0;$$

$$\alpha\lambda P_0-\mu P_2+\gamma P_3=0;$$

$$\overline{\alpha}\lambda P_0+\lambda P_1-\gamma P_3=0.$$

$$\sum_{i=0}^{3}P_i=1.$$

В результате решения находим стационарные вероятности пребывания модели надежности устройства во всех состояниях:

$$P_0=\frac{\lambda\mu\gamma}{\lambda\mu\gamma+\lambda_1\mu\gamma+(\lambda+\lambda_1)\lambda\gamma+(\overline{\alpha}\lambda+\lambda_1)\lambda\mu};$$

$$P_1=\frac{\lambda_1\mu\gamma}{\lambda\mu\gamma+\lambda_1\mu\gamma+(\lambda+\lambda_1)\lambda\gamma+(\overline{\alpha}\lambda+\lambda_1)\lambda\mu}; \qquad (3.25)$$

$$P_2=\frac{(\lambda+\lambda_1)\lambda\gamma}{\lambda\mu\gamma+\lambda_1\mu\gamma+(\lambda+\lambda_1)\lambda\gamma+(\overline{\alpha}\lambda+\lambda_1)\lambda\mu};$$

$$P_3=\frac{(\overline{\alpha}\lambda+\lambda_1)\lambda\mu}{(\lambda+\lambda_1)\gamma(\lambda+\mu)+(\overline{\alpha}\lambda+\lambda_1)\lambda\mu};$$

Коэффициент готовности устройства определяется суммой вероятностей пребывания устройства в работоспособных состояниях «0» и «1»:

$$K_Г = P_0 + P_1 = \frac{(\lambda + \lambda_1)\mu\gamma}{(\lambda + \lambda_1)\gamma(\lambda + \mu) + (\overline{\alpha}\lambda + \lambda_1)\lambda\mu}. \qquad (3.26)$$

В свою очередь, коэффициент неготовности (простоя) устройства:

$$K_П = P_2 + P_3 = 1 - K_Г = 1 - P_0 - P_1 = \frac{\lambda\left[(\lambda + \lambda_1)\gamma + (\overline{\alpha}\lambda + \lambda_1)\mu\right]}{(\lambda + \lambda_1)\gamma(\lambda + \mu) + (\overline{\alpha}\lambda + \lambda_1)\lambda\mu}.$$

Определим показатели безотказности, в частности среднюю наработку до отказа и среднюю наработку между отказами. С этой целью запишем систему дифференциальных уравнений Марковской модели устройства с *поглощающими* состояниями отказа 2 и 3:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -(\lambda + \lambda_1)P_0(t);$$

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = \lambda_1 P_0(t) - \lambda P_1(t); \qquad (3.27)$$

$$\frac{dP_2(t)}{dt} = \alpha\lambda P_0(t);$$

$$\frac{dP_3(t)}{dt} = \overline{\alpha}\lambda P_0(t) + \lambda P_1(t),$$

Дифференциальные уравнения (3.27) получены из системы дифференциальных уравнений (3.24) при условии обращения в нуль интенсивностей переходов из состояний отказа 2 и 3.

Средняя наработка до отказа устройства определяется с помощью следующего выражения, составленного из коэффициентов первых двух уравнений (3.26) для работоспособных состояний:

$$T_{CP} = -\frac{D_0(0)}{D(0)} = -\frac{\begin{array}{r} 0 \\ 1 \end{array}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & -\lambda \end{vmatrix}}{\begin{array}{r} 0 \\ 1 \end{array}\begin{vmatrix} -(\lambda+\lambda_1) & 0 \\ \lambda_1 & -\lambda \end{vmatrix}} = \frac{\lambda+\lambda_1}{(\lambda+\lambda_1)\lambda} = \frac{1}{\lambda}$$

Заметим, что при вычислении показателя средней наработки до отказа в определителе $D_0(0)$ строка начального состояния (в данном случае состояния «0») заменяется единичным вектором – строкой.

В свою очередь, средняя наработка между отказами может вычисляться с учетом отношения (3.15):

$$T = -\frac{D^*(0)}{D(0)} = -\frac{\begin{array}{r} Д \\ 0 \\ 1 \end{array}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -(\lambda+\lambda_1) & 0 & P_0(0) \\ \lambda_1 & -\lambda & P_1(0) \end{vmatrix}}{\begin{array}{r} 0 \\ 1 \end{array}\begin{vmatrix} -(\lambda+\lambda_1) & 0 \\ \lambda_1 & -\lambda \end{vmatrix}} = \frac{P_0(0)+P_1(0)}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$$

поскольку

$$P_0(0)+P_1(0) = \frac{P_0}{P_0+P_1} + \frac{P_1}{P_0+P_1} = 1\,.$$

Поучительные результаты

Из данной модели можно получить ряд результатов, которые представляют самостоятельный практический интерес.

Рассмотрим коэффициент готовности данного устройства (3.26)

Если $\bar{\alpha}=1$ (отсутствует контроль основного устройства), то из формулы (3.26) следует:

$$K_Г=\frac{\mu\gamma}{\gamma(\lambda+\mu)+\lambda\mu}. \tag{3.28}$$

Полученное выражение означает, что при отсутствии контроля основного устройства коэффициент готовности зависит не только от интенсивности отказов и восстановлений, но и от длительности существования скрытого отказа ($1/\gamma$). Если предположить, что скрытые отказы обнаруживаются мгновенно $(\gamma\to\infty)$, то данная формула преобразовывалась бы в известную формулу коэффициента готовности:

$$K_Г=\frac{\mu}{\lambda+\mu}. \tag{3.29}$$

Такая возможность $(\gamma\to\infty)$ в природе не существует. В свою очередь, следует отдавать отчет, что общеизвестная приведенная во всех справочных пособиях *формула (3.29)* коэффициента готовности устройства *может быть корректно применима только при выполнении трех следующих условий:*

– средства обнаружения отказов (встроенные или внешние) гарантированно и мгновенно обнаруживают все без исключения отказы устройства;

– средства обнаружения отказов идеально надежны;

– случайные длительности отказов и восстановлений распределены по экспоненциальному закону.

Если третье условие еще можно с определенными допущениями принять, то *первые два условия нереальны*. Следовательно, традиционная *формула коэффициента готовности (3.28)* *всегда приводит к завышенным оценкам, причем отклонения расчетных значений от реальных могут достигать больших значений, что в большинстве своем трудно оценить.*

Вернемся к полученной ранее формуле коэффициента готовности контролируемого устройства (3.28) и учтем зависимость интенсивности отказов устройства контроля от вероятности α_1, т.е. от вероятности того, что это устройство правильно обнаруживает отказы рабочего устройства. При замене отношения объема контрольного оборудования к суммарному объему основного и контрольного оборудования $\frac{W_к}{W_0 + W_к}$ на эквивалентное отношение интенсивности отказа контрольного оборудования к суммарной интенсивности отказа основного и контрольного оборудования $\frac{\lambda_1}{\lambda + \lambda_1}$ при принятом предположении, что интенсивность отказов устройства прямо пропорциональна его объему, в соответствии с рекомендациями работы [25] получаем :

$$\lambda_1 = -\frac{\lambda \ln \overline{\alpha}_1}{\delta + \ln \overline{\alpha}_1},$$

Таким образом, $\lambda_1 = \varphi\lambda$, где $\varphi = \frac{\ln \overline{\alpha}}{\delta + \ln \overline{\alpha}}$, и формула расчета коэффициента готовности контролируемого устройства преобразуется к виду:

$$K_Г = \frac{\lambda(1+\varphi)\mu\gamma}{\lambda(1+\varphi)\gamma(\lambda+\mu) + \lambda^2(\overline{\alpha}+\varphi)\mu} = \frac{(1+\varphi)\mu\gamma}{(1+\varphi)\gamma(\lambda+\mu) + (\overline{\alpha}+\varphi)\lambda\mu}.$$

График зависимостей $\varphi = f(\overline{\alpha})$ показан на рис. I.3.5. Из данного графика следует, что объем (а, следовательно, и интенсив-

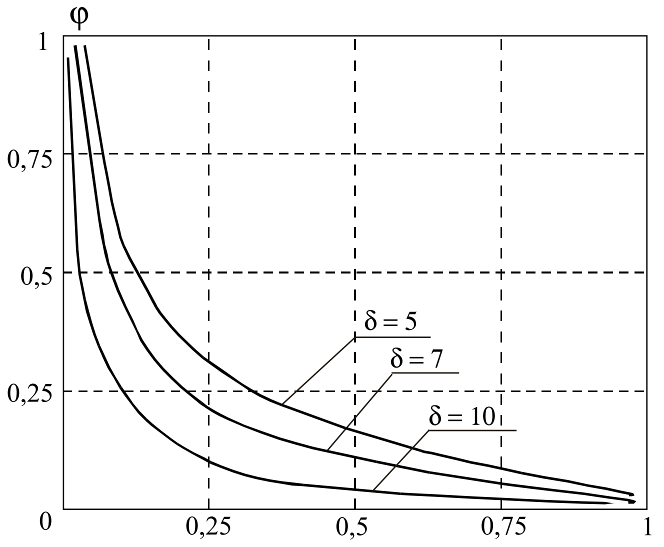

Рис. I.3.5. График зависимости $T_c/T_{c\,пред}$ от $\overline{\alpha}_1$ и ϕ.

ность отказов) контрольной аппаратуры должен нелинейно зависеть от вероятности пропуска отказа основного устройства. Если нужно добиться того, чтобы вероятность необнаружения (или неправильного обнаружения) отказа приближалась к нулю, то не исключено, что потребный объем контрольной аппаратуры превысит объем основного устройства (φ>1) или потребное время проведения контроля превысит предусмотренное время полезной работы. Так, например, при $\overline{\alpha} = 1 - \alpha = 0.01$ коэффициент $\varphi \approx 2$ и, следовательно, $W_k \approx 2W_0$. Из графиков также следует, что при $\overline{\alpha} \to 0$ коэффициент $\varphi \to \infty$. Заметим, что влияние нормировочного коэффициента δ на прогнозируемое значение интенсивности отказов аппаратуры контроля относительно невелико, особенно при реальных значениях вероятности $\overline{\alpha} \geq 0.1$.

Если принять, что $\alpha = 1$ (при условии $\varphi \to \infty$), находим, что коэффициент готовности снова определяется по идеализированной формуле (3.29), которая представляет собой оценку одного из двух предельных случаев:

1. $\alpha = 1$ при условии $\varphi \to \infty$,
2. $\gamma \to \infty$.

Оба эти случая представляют только познавательный интерес и *никогда не могут иметь место на практике.* Так, в первом случае для обнаружения всех возможных отказов устройства ($\alpha = 1$) потребуется неограниченно увеличивать объем контрольного оборудования, что недопустимо для практического изготовления устройства. Во втором случае требуется нештатными средствами сократить практически до нуля время существования ($\gamma \to \infty$) скрытого отказа. Такое требование на практике невыполнимо.

Особый интерес представляет *показатель средней наработки времени между скрытыми отказами*. По существу этот показатель должен быть больше средней наработки времени между отказами, поскольку не каждый отказ является необнаруженным, т.е. скрытым. В пределе, если бы все отказы не обнаруживались, то с определенной долей уверенности можно считать, что средняя наработка времени между скрытыми отказами равна средней наработке времени между всеми отказами. *Чем реже скрытые отказы, тем больше уверенности, что не произойдет непредвиденных опасных ситуаций.* Другими словами, *чем больше время между скрытыми отказами, тем меньше риски нарушения функционирования устройства.*

Определим показатели среднего времени между скрытыми отказами, а также среднего времени до восстановления и среднего времени простоя устройства. Эти временные показатели могут быть найдены различными известными способами, в том числе с помощью формул (3.21), (3.22). Применительно к показателю средней наработки между скрытыми отказами (обозначим его как T_c) множество граничных неработоспособных состояний включает только состояние 3 (рис. I.3.4). При этом в множество работоспособных состояний S_p входят состояния 0, 1 и 2. Матрица интенсивностей λ_{ij} переходов (см. граф на рис. I.3.4):

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -(\lambda+\lambda_1) & 0 & \mu & 0 \\ \lambda_1 & -\lambda & 0 & 0 \\ \alpha\lambda & 0 & -\mu & \gamma \\ \overline{\alpha}\lambda & \lambda & 0 & -\gamma \end{pmatrix}.$$

Таким образом, согласно формуле (3.21)

$$T_c = (P_0 + P_1 + P_2)\left[P_0\overline{\alpha}\lambda + P_1\lambda\right]^{-1} = \frac{1-P_3}{\lambda\left[\overline{\alpha}P_0 + P_1\right]} = \frac{(\lambda+\lambda_1)(\lambda+\mu)}{\lambda\mu(\overline{\alpha}\lambda+\lambda_1)},$$

где стационарная вероятность P_3 приведена в формуле (3.30).
С учетом соотношения $\lambda_1 = \varphi\lambda$

$$T_c = \frac{(\lambda+\mu)(1+\varphi)}{\lambda\mu(\overline{\alpha}+\varphi)}.$$

Рассмотрим два предельных случая:

1. $\alpha = 0, \varphi = 0$ $(\overline{\alpha} = 1)$ – случай отсутствия контроля;
2. $\alpha = 1,\ \varphi = \infty$ $(\overline{\alpha} = 0)$ – случай наличия полного достоверного контроля.

И в первом, и во втором случаях:

$$T_{c\ пред} \to \frac{\lambda+\mu}{\lambda\mu} = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}.$$

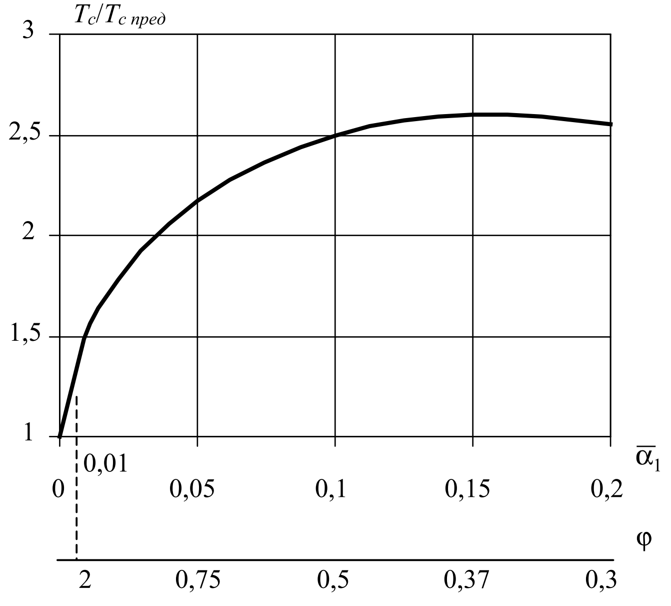

Рис. I.3.6. Графики зависимости $T_{ПР}/T_{ПР\,пред}$ от $\overline{\alpha}_1$ и γ

Довесок времени $\Delta T_{спред}$, равный $1/\mu$, обусловлен тем, что выход из состояния скрытого отказа всегда осуществляется через восстановление устройства. Функция $T_c = f_1(\varphi)$ выпукла и непрерывна, что означает наличие в ней экстремума. Нужно подбирать такое соотношение между φ и $\overline{\alpha}_1$, учитывая, что φ также является функцией от $\overline{\alpha}_1$, при котором имеет место оптимальное значение T_c.

На рис. I.3.6 приведены результаты расчетов зависимости выигрыша в наработке на скрытый отказ от $\overline{\alpha}_1$ и φ по отношению к предельным случаям. Эти результаты свидетельствуют о том, что максимальный выигрыш имеет место в интервале значений $\overline{\alpha}_1 = 0,1 - 0,2$. При этом наработка на скрытый отказ повышается примерно в 2,6 раза, объем контрольной аппаратуры составляет 1/3 от основной и вероятность правильного обнаружения отказов должна находиться на уровне 0,8–0,9. Достижение такой эффективности контроля при указанном объеме дополнительного оборудования вполне реальная задача.

Среднее время до восстановления устройства равно среднему времени пребывания в состоянии 2 (T_2), когда производится устранение отказа, $T_B = T_2 = \dfrac{1}{\mu}$.

Среднее время простоя устройства определяется временем пребывания системы в неработоспособных состояниях 2 и 3.

Для определения среднего времени простоя устройства воспользуемся формулой (3.22).

В условиях данной задачи:

$$T_{ПР} = (P_2 + P_3)(P_2\mu)^{-1} = \frac{(\lambda + \lambda_1)\gamma + (\overline{\alpha}\lambda + \lambda_1)\mu}{(\lambda + \lambda_1)\gamma\mu}.$$

В предельных случаях:

$$1. \alpha = 0, \varphi = 0 \quad (\overline{\alpha} = 1);$$

$$2. \ \alpha = 1, \varphi \to \infty \quad (\overline{\alpha} = 0):$$

$$T_{ПР\ пред} = \frac{\gamma + \mu}{\gamma\mu} = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\gamma}.$$

В обоих предельных случаях получили одинаковый результат. Найдем зависимости относительного изменения средней длительности простоя устройства от эффективности контроля и дополнительного контрольного оборудования при различных соотношениях между параметрами γ и μ.

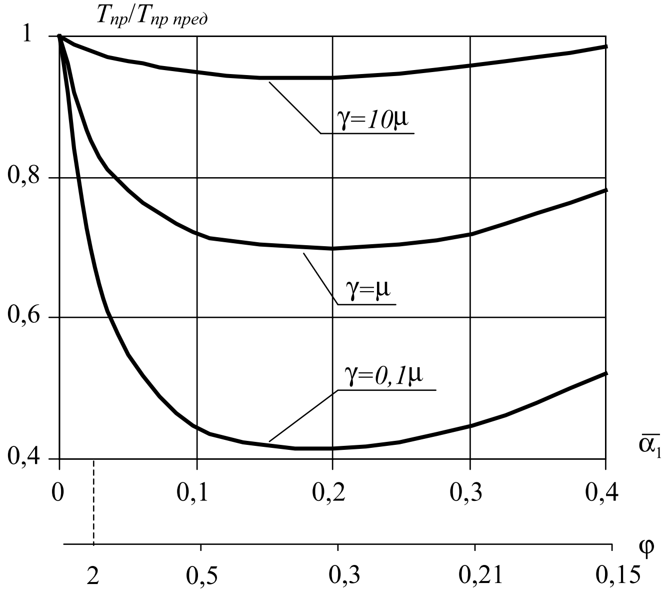

Рис. I.3.7. Графики зависимости $T_C / T_{C\,пред}$ от вероятности $\overline{\alpha}_1$

Отношение

$$T_{ПР} \big/ T_{ПР\,пред} = \frac{(1+\varphi)\gamma + (\overline{\alpha}+\varphi)\mu}{(1+\varphi)(\gamma+\mu)}$$

позволяет для различных значений вероятности необнаружения отказа $\overline{\alpha}$, коэффициента φ прироста дополнительного оборудования, средней длительности существования скрытого отказа $1/\gamma$ определить условия, при которых будет иметь место минимальное время простоя устройства. Полученные результаты расчетов приведены на рис. I.3.7. Они показывают, что *существует интервал вероятностей правильного обнаружения отказа устройства* $\alpha = 1 - \overline{\alpha}$ *на уровне 0,7 – 0,9, при котором наблюдается значительное (в 1,5 – 2 раза и более) сокращение длительности простоя устройства, если длительность скрытого отказа существенно больше длительности восстановле-*

ния. При этом рациональный объем дополнительного оборудования для обнаружения отказов не должен превышать 1/3 от объема основного оборудования устройства.

Контрольные вопросы:

1. Зависит ли выбор будущего состояния Марковской цепи от того, когда и каким образом система перешла в настоящее состояние?

2. В чем общность и отличие непрерывных Марковских цепей (Марковских процессов) от дискретных Марковских цепей?

3. Зависят ли значения стационарных вероятностей пребывания Марковской цепи в каждом из состояний от начального распределения вероятностей?

4. Приведите правило составления дифференциальных уравнений Колмоговорова при построении Марковской модели надежности объекта?

5. При каких значениях вероятности правильного обнаружения наблюдается значительное (в 1,5 – 2 раза и более) сокращение длительности простоя контролируемого устройства, если длительность скрытого отказа существенно больше длительности восстановления?

6. Какое рациональное соотношение между объемами основного оборудования контролируемого устройства и оборудования встроенных средств контроля?

Глава I.4. ГРАФОВЫЕ ПОЛУМАРКОВСКИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА НАДЕЖНОСТИ

I.4.1. Определение полумарковского случайного процесса

С помощью Марковских процессов можно построить достаточно точные модели надежности ряда устройств и систем. Они применяются при экспоненциальных законах распределения отказов и восстановлений. Но нередко встречаются случаи, когда распределение случайного времени пребывания системы в одном или нескольких состояниях отличается от экспоненциального. Например, допустимое время существования скрытого отказа в системе в ряде случаев не может превышать некоторой постоянной величины, или – распределение времени между перемежающимися отказами отличается от экспоненциального, или – интервал времени между функциональными контролями информационной техники постоянен и т.д. Отсюда потребность в применении в необходимых случаях полумарковских моделей надежности.

Определим полумарковский случайный процесс. Пусть имеется система, которая может принимать конечное или счетное множество дискретных состояний $s_0, s_2, ..., s_j, ..., s_n$. Развитие этой системы можно описать следующим образом. Если система находится в состоянии s_i,то с вероятностью p_{ij} она может перейти в состояние s_j. Время τ_{ij}, в течение которого система находится в состоянии s_i, зависит от состояний s_i и s_j. После перехода в состояние s_j система далее переходит в состояние s_k

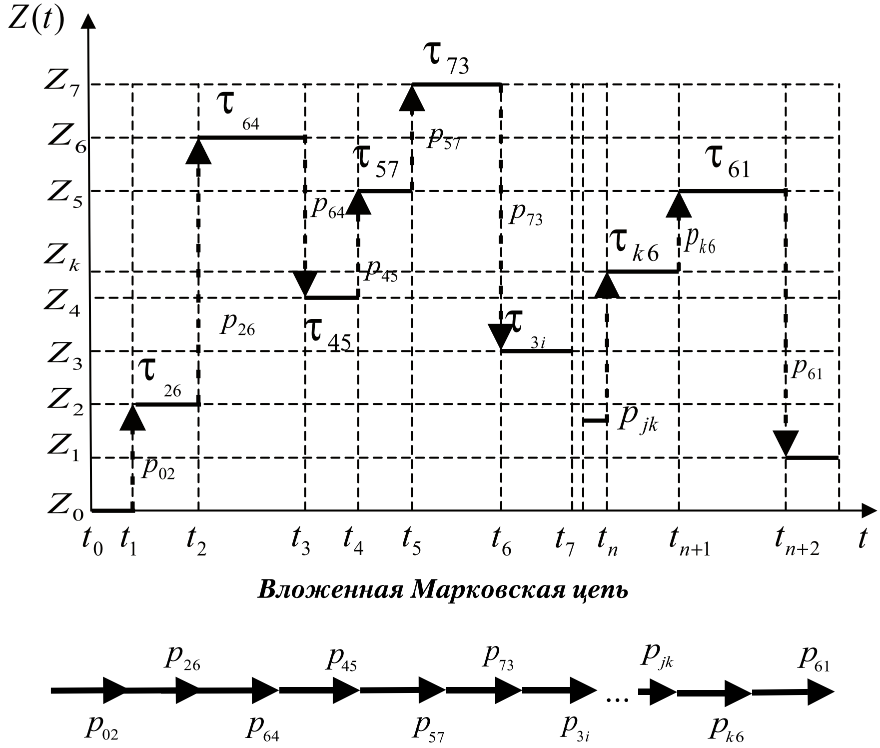

Рис. I.4.1. Пример возможной реализации полумарковского процесса

и т.д. Случайный процесс $\{ Z(t), t \geq 0 \}$, описывающий развитие системы во времени, называется полумарковским процессом (ПМП) [28].

Пример возможной реализации ПМП показан на рис. I.4.1. В начальный момент времени t_0 система находилась в состоянии s_0. В момент времени t_1 она скачком с вероятностью p_{02} переходит в состояние s_2. Таким образом, в полумарковской модели надежности системы должен быть предусмотрен переход ПМП от уровня $Z_0(t_1)$ к уровню $Z_2(t_1)$. В этом состоянии s_2 система находится в течение времени $t_2 - t_1$. Затем в момент времени t_2 с вероятностью p_{26} должно произойти очередное изменение ПМП модели надежности системы от уровня $Z_2(t_2)$ к уровню

$Z_6(t_2)$ и т.д. Возможны случаи возвратного перехода системы в прежнее состояние. Тогда вероятности перехода равны p_{ii}. В течение времени возможны переходы системы в начальное состояние и затем в какое-либо промежуточное или сразу в конечное состояние и др.

Рассмотренный пример иллюстрирует то, что ПМП содержит ***независимые*** случайные величины τ_{ij} (см. рис. I.4.1) а также ***однородную марковскую цепь,*** образованную переходными вероятностями p_{ij}, p_{jk}, p_{kl} и т.д. Эту цепь переходных вероятностей называют вложенной цепью Маркова в ПМП.

Обозначим матрицу переходных вероятностей вложенной цепи Маркова в виде $\Pi = (p_{ij})$, а функцию распределения длительности пребывания системы в состоянии s_i при условии, что следующий переход произойдет в состояние s_j, обозначим через $F_{ij}(t)$. Случайная величина τ_{ij} характеризует случайное время пребывания ПМП в состоянии s_i *при условии последующего его перехода из этого состояния в состояние* s_j. Поэтому функция распределения $F_{ij}(t)$ называется ***функцией распределения условного случайного времени*** τ_{ij}.

Допустим, что система проработала достаточно долго, чтобы состоялись все возможные ее переходы из состояния s_i во все другие смежные состояния. Совокупность всех интервалов времени пребывания системы в состоянии s_i до переходов в другие состояния определяется ***безусловным временем*** τ_i. Очевидно, что из состояния s_i в одни состояния система переходит чаще, в другие реже, что обусловлено значениями переходных вероятностей p_{i1}, $p_{i2},..., p_{ij}$, p_{in}. Поэтому функция распределения безусловного времени τ_i имеет следующий вид:

$$F_i(t) = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} F_{ij}(t) \qquad (4.1)$$

Данная функция распределения построена с учетом возможности перехода ПМП из состояния s_i в любое смежное с ним состояние s_j при условии, что $p_{ij} \neq 0$.

I.4.2. Формы задания полумарковских моделей надежности

Наибольшее распространение получили следующие три формы задания полумарковских моделей надежности [28]:

– Первая форма задания ПМП – задание вложенной цепью Маркова и матрицей функций распределения условных случайных времен пребывания системы в каждом из* состояний *процесса.

Входные данные:

1. матрица переходных вероятностей $\Pi = (p_{ij})$ (вложенная цепь Маркова);

2. матрица функций распределения условных случайных времен пребывания системы в каждом из s_i состояний $(F_{ij}(t))$;

3. вектор начальных вероятностей $(\pi_i), i = 1,...,n, i \in S$ пребывания системы в состояниях процесса.

Отсюда вычисляются математические ожидания условных и безусловных времен τ_{ij} и τ_i соответственно пребывания системы в каждом состоянии

$$s_i, s_j, i, j = 1,...,n; i, j \in s.$$

Так,

$$T_{ij} = \int_0^\infty [1 - F_{ij}(t)]dt, \qquad (4.2)$$

$$T_i = \int_0^\infty [1 - F_i(t)]dt = \int_0^\infty [1 - \sum_j p_{ij} F_{ij}(t)]dt = \int_0^\infty [1 - \sum_j P_{ij}(t)]dt \qquad (4.3)$$

или

$$T_i = \sum_{j \in S} p_{ij} T_{ij} \,. \qquad (4.4)$$

– Вторая форма задания ПМП – задание с помощью матрицы полумарковских вероятностей

<u>Входные данные</u>:

1. полумарковская матрица $(P_{ij}(t))$ – где каждая полумарковская вероятность есть вероятность перехода системы из состояния s_i в состояние s_j за время не большее, чем t;

2. вектор начальных вероятностей $(\pi_i), i = 1,...,n$ пребывания системы в состояниях процесса.

Полумарковские вероятности связаны с функциями распределения условных случайных времен пребывания системы в каждом из состояний следующим выражением:

$$P_{ij}(t) = p_{ij} F_{ij}(t) \,, \qquad (4.5)$$

где переходные вероятности, определяющие вложенную цепь Маркова, есть не что иное как стационарные значения полумарковских вероятностей, т.е.

$$p_{ij} = P_{ij}(\infty). \qquad (4.6)$$

В свою очередь, функции распределения условного времени находятся из формулы (4.5)

$$F_{ij}(t) = \frac{P_{ij}(t)}{p_{ij}}; \qquad (4.7)$$

а функции распределения безусловного времени пребывания системы в состоянии s_i находятся с учетом выражения (4.5) следующим образом:

$$F_i(t) = \sum_{j \in S} P_{ij}(t) = \sum_{j \in S} p_{ij} F_{ij}(t). \qquad (4.8)$$

С помощью формул (4.5)-(4.8) и формул (4.2) и (4.3) определяются математические ожидания условных T_{ij} и безусловных T_i времен пребывания системы в каждом отдельном состоянии.

– Третья форма задания ПМП – задание с помощью матрицы независимых случайных величин

Во многих практических задачах предварительно известны:

1. вектор функций распределения независимых случайных величин $(\upsilon_k), k = 1, 2, ..., r$, где $r \le n$, под воздействием которых осуществляются переходы системы в пространстве состояний,

2. вектор начальных вероятностей $(\pi_i), i = 1, ..., n$ пребывания системы в состояниях процесса.

Для задания ПМП выполняются следующие операции:

• строится граф состояний системы и каждой его вершине (состоянию) приписываются те $h \in r$ случайных величин, которые определяют возможность выхода из данной вершины;

• находятся плотности условных распределений $f_{ij}(t)$ того, что переход системы из состояния s_i в состояние s_j произошел в момент времени t под воздействием случайной величины υ_k. Из условия независимости случайных величин $\upsilon_{1,} \upsilon_2, ..., \upsilon_l$ следует, что

$$f_{ij}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P\{t < \upsilon_j < t + \Delta t; \upsilon_1, \upsilon_2, ..., \upsilon_l > t\}}{\Delta t} = g_{ij}(t) \prod_{j \ne h}^{h \in r} P_{ih}(t), \qquad (4.9)$$

где $g_{ij}(t) = \dfrac{dG_{ij}(t)}{dt}; P_{ih}(t) = 1 - G_{ih}(t); j, h \in r.$

• определяются плотности и функции распределения длительности пребывания в каждом из состояний ПМП

$$f_i(t) = \sum_{j \in S} f_{ij}(t);$$

$$F_i(t) = \int_0^t f_i(x)dx = \sum_{j \in S} \int_0^t f_{ij}(x)dx.$$

• находятся переходные вероятности p_{ij}, полумарковские вероятности $P_{ij}(t)$, математические ожидания условных T_{ij} и безусловных T_i времен пребывания ПМП в каждом из состояний

$$\begin{aligned} p_{ij} &= \int_0^\infty f_{ij}(t)dt; \\ P_{ij}(t) &= \int_0^t f_{ij}(x)dx; \\ T_{ij} &= \int_0^\infty t f_{ij}(t)dt; \end{aligned} \tag{4.10}$$

$$T_i = \int_0^\infty [1 - F_i(t)]dt = \int_0^\infty [1 - \sum_j P_{ij}(t)]dt = \int_0^\infty [1 - \int_0^t \sum_j f_{ij}(x) \cdot dx] \cdot dt$$

Таким образом, *при любой форме задания ПМП определение исходных параметров p_{ij}, T_{ij} и T_i для каждой вершины графа состояний системы не вызывает практических затруднений.*

При экспоненциальных законах распределения составных случайных величин ПМП трансформируется в Марковский случайный процесс с непрерывным временем. При этом имеет место равенство параметров $T_i = T_{ij}$ при различных индексах j, а исходные параметры определяются через интенсивности переходов. Действительно, если

$$f_{ij}(t) = \lambda_{ij} \exp(-t\sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij}),$$

то переходные вероятности равны

$$p_{ij} = \int_0^\infty f_{ij}(t)dt = \int_0^\infty \lambda_{ij} \exp(-t\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij})dt = \frac{\lambda_{ij}}{\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}}, \qquad (4.11)$$

а математические ожидания определяются как

$$T_i = T_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \int_0^\infty t\lambda_{ij} \exp(-t\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij})dt = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}}. \qquad (4.12)$$

I.4.3. Стационарные характеристики полумарковского процесса в задачах надежности

К основным стационарным характеристикам ПМП относятся:

• стационарные вероятности $\pi_i, i = 1,...,n; i \in S$ пребывания системы в произвольный момент времени в каждом из состояний s_i;

• средняя наработка на отказ T_0 и среднее время простоя $T_{ПР}$ системы.

Для определения *стационарной вероятности* π_i предположим, что ПМП совершил достаточно большое число переходов N в множестве 2^n различных состояний системы. В случае ПМП смена индексов (номеров) состояний системы образует однородную вложенную марковскую цепь. За N переходов однородная марковская цепь, вложенная в ПМП, побывает в состоянии s_i в среднем $N_i = P_i N$ раз, где P_i – стационарная вероятность пребывания в данном состоянии вложенной в ПМП однородной марковской цепи. Отсюда среднее время пребывания ПМП в состоянии s_i за те же N переходов

$$\hat{T}_i = P_i N T_i . \qquad (4.13)$$

Среднее время, необходимое ПМП на N переходов, определится выражением

$$\overline{T} = \sum_{i=1}^{n} \hat{T}_i = N \sum_{i=1}^{n} P_i T_i .$$

Кроме того, π_i есть вероятность застать ПМП в произвольный момент времени в состоянии s_i. Следовательно, за время T среднее время пребывания ПМП в данном состоянии равно

$$\hat{T}_i = \pi_i T = \pi_i N \sum_{i=1}^{n} P_i T_i \qquad (4.14)$$

Приравнивая выражения (4.12) и (4.13) и разрешая их относительно π_i, находим *стационарную вероятность* того, что регулярный ПМП находится в состоянии s_i в произвольный момент времени

$$\pi_i = \frac{P_i T_i}{\sum\limits_{j \in S} P_j T_j} (i, j = 1, ..., n; i, j \in S; \sum_{i \in S} \pi_i = 1) . \qquad (4.15)$$

Строгое обоснование справедливости этой формулы изложено в работе [28].

Таким образом, чтобы рассчитать стационарные вероятности π_i достаточно знать математические ожидания безусловного времени пребывания ПМП в каждом из состояний системы, а также стационарные вероятности P_i вложенной в ПМП однородной марковской цепи.

Пример I.4.1. Случайные величины пребывания системы во всех n состояниях системы распределены по экспоненциальному закону. Требуется определить стационарные вероятности пребывания системы в каждом из состояний.

Решение.

Для случая экспоненциальных распределений случайных величин имеет место выражение (4.12). Подставив его в (4.15), получим

$$\pi_i = \frac{P_i \dfrac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_{ij}}}{\sum\limits_{j=1}^{n} P_j \dfrac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_{ij}}} = P_i \text{, так как } \sum_{j=1}^{n} P_j = 1.$$

Для определения *временных показателей* T_0 и $T_{ПР}$ конечное множество состояний S системы в соответствии с критерием отказа подразделяется на два непересекающихся подмножества работоспособных состояний $S_P \subset S$ и неработоспособных $\overline{S}_P \subset S$ состояний, где $S_P \bigcup \overline{S}_P = 0$. Переход из подмножества S_P в подмножество $\overline{S}_P$ может осуществляться не из любого состояния работоспособности, а только граничного состояния (подмножество S_+). Аналогично переход из $\overline{S}_P$ в S_P может осуществляться из подмножества, принадлежащего подмножеству граничных неработоспособных состояний S_-.

Предполагаются известными:

• матрица переходных вероятностей однородной вложенной марковской цепи

$$\Pi = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ \dots \\ n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \dots & n \end{array} \\ \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \end{array}$$

• функции $F_{ij}(t)$ распределения длительности пребывания процесса в состоянии s_i при условии перехода в состояние s_j.

При этих условиях средняя наработка на отказ системы и среднее время простоя могут быть рассчитаны по следующим формулам [25]:

$$T_0 = \frac{\sum\limits_{i \in S_P} P_i T_i}{\sum\limits_{i \in S_+} P_i \sum\limits_{j \in \overline{S_P}} p_{ij}}, \tag{4.16}$$

$$T_{ПР} = \frac{\sum\limits_{i \in \overline{S_P}} P_i T_i}{\sum\limits_{i \in S_-} P_i \sum\limits_{j \in S_P} p_{ij}}, \tag{4.17}$$

где $T_i = \sum\limits_{j \in S} p_{ij} T_{ij}$ – среднее время пребывания ПМП в состоянии s_i;

$P_i = \dfrac{D_i}{\sum\limits_{j=1}^{n} D_j}$ – стационарная вероятность пребывания вложенной однородной марковской цепи в состоянии s_i, где

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \dots & n \end{array} \\ \Pi = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \dots \\ n \end{array} & \begin{pmatrix} 1-p_{11} & -p_{12} & \dots & -p_{1n} \\ -p_{21} & 1-p_{22} & \dots & -p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -p_{n1} & -p_{n2} & \dots & 1-p_{nn} \end{pmatrix} \end{array}$$

$D_i(D_j)$ – минор, получаемый вычеркиванием *i (j)* строки и *i (j)* столбца матрицы D.

I.4.4. Топологический полумарковский метод расчета надежности

I.4.4.1. Назначение графовых методов

Построение и решение Марковских и полумарковских моделей надежности традиционными методами в общем виде сводится к формированию системы однородных дифференциальных уровнений, описывающих поведение исследуемой системы, операторному преобразованию их, решению системы уравнений в операторной форме, обратному преобразованию и нахождению искомых показателей надежности. Такой путь всегда чреват математическими трудностями, особенно когда количество уравнений более десятка и проблематично корректно выполнить обратные преобразования решений системы уравнений, полученных в операторной форме. Поэтому в большинстве своем исследователи и, тем более практические работники, вынуждены вводить целый ряд допущений, которые коренным образом упрощают решение моделей надежности и позволяют получить показатели надежности рассматриваемых систем в аналитической или численной форме. Однако эти результаты уже далеки от истинных и возникает естественный вопрос: нужно ли стремиться к реализации традиционной схемы построения и решения моделей надежности систем.

Во многих задачах расчета надежности достаточно ограничиться стационарными показателями безотказности и готовности. В этих случаях переходят от модели дифференциальных уравнений к модели алгебраических уравнений, описывающих поведение системы в установившемся режиме, решают их, находят стационарные вероятности пребывания системы в каждом из возможных состояний, на основании критерия отказа системы с помощью указанных вероятностей находят показатели готовности и неготовности системы. Затем определяют стационарные показатели безотказности и ремонтопригодности систем, например, с помощью приведенных выше формул (4.16) и (4.17). Такие задачи не связаны с необходимостью применения операционного исчисления для построения и решения моделей надежности, искомые стационарные показатели надежности определяются достаточно строго. Однако, наряду с тем, что при данной схеме находится далеко не полный перечень показателей надежности, остается также по-прежнему открытой проблема большой размерности модели алгебраических уравнений. Поэтому даже при сравнительно небольшом числе состояний во многих случаях не удается аналитически описать искомые показатели надежности системы. Это обстоятельство не зависит от степени связности графовой модели системы – как при слабой связности, так и при сильной связности не меняются размерности матриц системы алгебраических уравнений, представляющей модель надежности исследуемой технической системы.

Вместе с тем, графовые модели надежности сложных систем, как правило, слабо связаны. Это обстоятельство побудило автора графовых полумарковских методов перейти от традиционной схемы решения линейных алгебраических уравнений по правилу Крамера к схеме разложений исходной графовой модели на составные подграфы, не содержащие выделенных вершин (например, неработоспособных состояний модели или состояний, находящихся на пути от одной вершины к другой, или начального состояния системы). При применении такой схемы оказалось достаточным для решения системы алгебраических уравнений ограничиться нахождением путей и контуров на графе, что в настоящее время хорошо формализовано. На этой основе нами разработаны полумарковские (в частном случае Марковские) графовые методы [29, 30, 31, 32, 33 и др.]. К ним относятся:

✓ Топологический полумарковский метод;

✓ Графовые методы моментов;

Графовые методы *позволяют*:

• строго или приближенно с приемлемой погрешностью определять стационарные показатели надежности систем как в аналитической форме, так и в численном виде с помощью формализованных правил и созданных на их основе алгоритмов;

• определять строгие нижние (***inf)*** и верхние (***sup)*** границы нестационарных показателей безотказности и готовности систем.

Основные отличительные признаки методов:

• пригодны для расчетов надежности систем с большим числом состояний (более ста):

• не накладываются ограничения на структуру исследуемой системы;

• не требуется преобразовывать исходный граф состояний;

• операционное исчисление не используется.

I.4.4.2. Исходные данные и понятия

Исходные данные:

- ориентированный граф состояний $G(S,H)$, где S – конечное множество вершин (состояний) системы; H – конечное множество дуг между вершинами *i, j* (состояния s_i, s_j);

- критерий отказа в виде множества работоспособных состояний $S_P \subset S$, множества неработоспособных $\overline{S_P} \subset S$, где $S_P \bigcap \overline{S_P} = \varnothing$, $S_P \bigcup \overline{S_P} = S$, а также начальное состояние 1 $\equiv s_1$ (или $i \equiv s_i$), где $s_1, s_P \subset S$;

- квадратная матрица ($F_{ij}(t)$) условных функций распределения времени пребывания системы в состояниях (вершинах) графа, матрица переходных вероятностей однородной вложенной марковской цепи Π и вектор распределения начальных вероятностей пребывания системы в соответствующих состояниях $\vec{\pi}$.

- заданное время работы системы t.

Если поведение системы описывается марковским случайным процессом, то достаточно задать матрицу интенсивностей переходов между соседними вершинами (λ_{ij}), где λ_{ij} – интенсивность отказов или восстановлений одного элемента системы при пребывании ее в *i*-м состоянии, в результате чего она переходит в соседнее *j*-е состояние.

Топологические понятия:

- *путь* – цепь последовательно соединенных однонаправленных дуг с началом в состоянии *i* и окончанием в состоянии *j*, вес пути $l^{ij} = \prod\limits_{i,r,j \in S} p_{ir} p_{rj}$, где p_{ir} – вероятность перехода за один шаг из *i*-го состояния в состояние *r*;

- *замкнутый контур* – это цепь последовательно соединенных однонаправленных дуг, в которой выход конечной вершины в цепи соединен с начальной вершиной в цепи;

- вес *j*-го контура $C_j = \prod\limits_{i,j \in S} p_{ij} p_{ji}$; петля есть частный случай замкнутого контура – в ней входящие и выходящие дуги сливаются в одну дугу, вес петли $C_j = p_{jj}$;

- *разложение графа* – часть графа, не содержащая выделенных вершин и связанных с ними дуг; вес разложения ΔG^i рассчитывается с учетом исключения из графа вершины i и связанных с ней дуг; вес разложения $\Delta G^i_{\overline{S_P}}$ рассчитывается с учетом дополнительного исключения из графа вершин множества неработоспособных состояний $\overline{S_P}$ и связанных с ними дуг; вес разложения ΔG^i_k рассчитывается с учетом исключения из графа вершины i, а также вершин, расположенных на k-м пути из начальной вершины в вершину i и связанных с ними дуг;

- *вес разложения (определитель)* находится по формуле Мезона

$$\Delta G = 1 - \sum_j C_j + \sum_{rj} C_r C_j - \sum_{irj} C_i C_r C_j + \ldots$$

Применение формулы Мезона позволяет значительно сократить трудоемкость вычислений миноров на разреженных матрицах, а матрица G, как правило, является разреженной.

I.4.4.3.Определение стационарных показателей надежности систем

• *стационарные вероятности пребывания модели в состояниях графа*

Если надежность системы моделируется с помощью графа состояний и полумарковского случайного процесса на этом множестве состояний, заданного матрицей переходных вероятностей и вектором безусловных математических ожиданий времени пребывания в каждом из состояний графа, то стационарные вероятности пребывания полумарковской модели в состояниях графа равны:

$$\pi_i = \frac{\Delta G^i T_i}{\sum_{i \in S} \Delta G^i T_i}, \tag{4.18}$$

Данная формула получена из формулы (4.15) [39]

где ΔG^i – вес разложения графа без состояния i, T_i – математические ожидания безусловного времени пребывания системы в состояниях i.

Заметим, что ΔG^i есть минор, получаемый на матрице G в результате вычеркивания i-й строки и i-го столбца.

• *Коэффициенты готовности и неготовности (простоя)*

$$K_{\Gamma} = \sum_{i \in S_P} \pi_i\,,\ K_{H\Gamma} = K_{\Pi P} = \sum_{i \in \overline{S}_P} \pi_i = 1 - K_{\Gamma} \tag{4.19}$$

Пример I.4.2. Исследуется восстанавливаемая система с однотипными дублированными процессорами (рис. 4.2).

Исходные данные: множество состояний системы $S = \{1, 2, 3\}$; критерий отказа – отказали оба процессора (состояние 3); множество работоспособных состояний $S_P = \{1, 2\}, S_p \subset S$; поскольку только одно неработоспособное состояние 3, то множество неработоспособных состояний совпадает с множеством граничных неработоспособных состояний $\overline{S}_P = S_- \equiv 3$; одно граничное работоспособное состояние $S_+ \in S_P; S_+ \equiv 2.$ Законы распределения отказов и восстановлений экспоненциальные с интенсивностями отказов и восстановлений λ и μ соответственно, одна ремонтная бригада, контроль идеальный.

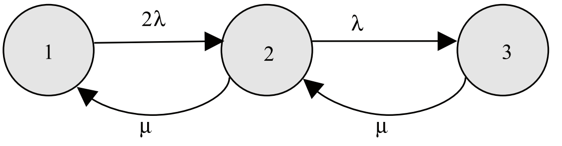

Рисунок I.4.2.

Определить формульные выражения стационарных вероятностей ПМП, коэффициентов готовности и простоя.

Решение.

1. Подготовительный этап:

$$p_{12}=\frac{2\lambda}{2\lambda}=1;\, p_{21}=\frac{\mu}{\lambda+\mu};\, p_{23}=\frac{\lambda}{\lambda+\mu},(p_{21}+p_{23}=1);\, p_{32}=\frac{\mu}{\mu}=1;$$

$$T_1=\frac{1}{2\lambda};T_2=\frac{1}{\lambda+\mu};T_3=\frac{1}{\mu};$$

$$l_1^{12}=p_{12}=1;l_1^{13}=p_{12}p_{23}=\frac{\lambda}{\lambda+\mu};l_1^{21}=p_{21}=\frac{\mu}{\lambda+\mu};$$

$$C_1=p_{12}p_{21}=\frac{\mu}{\lambda+\mu};C_2=p_{23}p_{32}=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}.$$

2. Определяют стационарные вероятности пребывания системы в каждом из состояний по формуле (4.18)

$$\pi_1=\frac{\Delta G^1T_1}{\Delta G^1T_1+\Delta G^2T_2+\Delta G^3T_3}=\frac{(1-C_2)T_1}{(1-C_2)T_1+T_2+(1-C_1)T_3}=$$

$$=\frac{\frac{\mu}{\lambda+\mu}\cdot\frac{1}{2\lambda}}{\frac{\mu}{\lambda+\mu}\cdot\frac{1}{2\lambda}+\frac{1}{\lambda+\mu}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\frac{1}{\mu}}=\frac{\mu^2}{\mu^2+2\lambda\mu+2\lambda^2}=\frac{1}{1+2\rho+2\rho^2},$$

где $\Delta G=1-C_1-C_2;\Delta G^1=1-0-C_2=1-C_2;\rho=\frac{\lambda}{\mu}$.

Аналогично

$$\pi_2 = \frac{\Delta G^2 T_2}{\Delta G^1 T_1 + \Delta G^2 T_2 + \Delta G^3 T_3} = \frac{\dfrac{1}{\lambda+\mu}}{\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}\cdot\dfrac{1}{2\lambda} + \dfrac{1}{\lambda+\mu} + \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\cdot\dfrac{1}{\mu}} =$$

$$= \frac{2\rho}{1+2\rho+2\rho^2},$$

где $\Delta G^2 = 1 - 0 - 0 = 1; \Delta G^3 = 1 - C_1 - 0 = 1 - C_1$.

$$\pi_3 = \frac{\Delta G^3 \cdot T_3}{\Delta G^1 \cdot T_1 + \Delta G^2 \cdot T_2 + \Delta G^3 \cdot T_3} = \frac{2\rho^2}{1+2\rho+2\rho^2};$$

3. Рассчитывают коэффициенты готовности и простоя

$$K_Г = \pi_1 + \pi_2 = \frac{1+2\rho}{1+2\rho+2\rho^2};$$

$$K_{ПР} = 1 - K_Г = 1 - \pi_1 - \pi_2 = \pi_3 = \frac{2\rho^2}{1+2\rho+2\rho^2}.$$

• ***Средняя наработка системы до отказа*** *(при начальном состоянии i)*

Если надежность системы моделируется с помощью графа состояний и полумарковского случайного процесса на этом множестве состояний, заданного матрицей переходных вероятностей и вектором безусловных математических ожиданий времени пребывания в каждом из состояний графа, а также начальным состоянием *i,* то средняя наработка до отказа системы определяется по следующей формуле:

$$T_{CP} = \frac{T_i \Delta G^i_{\overline{S}_P} + \sum\limits_{(k)} \sum\limits_{i,j} l^{ij}_k \Delta G^j_k T_j}{\Delta G_{\overline{S}_P}}; \qquad (4.20)$$

где $\Delta G^i_{\overline{S}_P}$ – вес разложения графа без начальной вершины i и множества неработоспособных состояний системы (вершин графа) $\overline{S}_P$ и связанных с ними дуг; l^{ij}_k – вес k-го пути из начальной вершины i в вершину j; $\Delta G_{\overline{S}_P}$ – вес разложения графа без множества неработоспособных состояний системы (вершин графа) $\overline{S}_P$ и связанных с ними дуг.

• ***Средняя наработка на отказ***

$$T_0 = \frac{\sum\limits_{i \in S_P} \Delta G^i \cdot T_i}{\sum\limits_{i \in S_+} \Delta G^i \sum\limits_{j \in \overline{S}_P} p_{ij}} \qquad (4.21)$$

где S_+ – множество граничных работоспособных состояний

• ***Среднее время простоя***

$$T_{ПР} = \frac{\sum\limits_{i \in \overline{S}_P} \Delta G^i \cdot T_i}{\sum\limits_{i \in S_-} \Delta G^i \sum\limits_{j \in S_P} p_{ij}} \qquad (4.22)$$

где S_- – множество граничных неработоспособных состояний.

Формулы (4.21) и (4.22) получены из формул (4.16) и (4.17) соответственно.

Пример I.4.3. В условиях примера I.4.2 определить формульные выражения временных показателей надежности дублированной системы.

Решение.

1. Находят по формуле (4.20) среднюю наработку до отказа

$$T_{CP} = \frac{T_1 \Delta G^1_{\overline{S}_P} + l_1^{12} \Delta G_1^2 T_2}{\Delta G_{\overline{S}P}} = \frac{T_1 + p_{12} T_2}{1 - C_1},$$

где $\Delta G^1_{\overline{S}_P} = 1; \Delta G_1^2 = 1; \Delta G_{\overline{S}_P} = 1 - C_1;$

следовательно,

$$T_{CP} = \frac{\frac{1}{2\lambda} + 1 \cdot \frac{1}{\lambda + \mu}}{\frac{\lambda}{\lambda + \mu}} = \frac{3\lambda + \mu}{2\lambda^2};$$

2. Определяют по формуле (4.21) среднюю наработку на отказ

$$T_0 = \frac{T_1 \Delta G^1 + T_2 \Delta G^2}{\Delta G^1 p_{13} + \Delta G^2 p_{23}} = \frac{T_1 (1 - C_2) + T_2 \cdot 1}{(1 - C_2) \cdot 0 + 1 \cdot p_{23}},$$

где $\Delta G^1 = 1 - C_2; \Delta G^2 = 1; p_{13} = 0;$

следовательно,

$$T_0 = \frac{\frac{1}{2\lambda} \cdot \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{1}{\lambda + \mu}}{\frac{\lambda}{\lambda + \mu}} = \frac{2\lambda + \mu}{2\lambda^2}.$$

3. Определяют по формуле (4.22) среднее время простоя

$$T_{ПР} = \frac{T_3 \Delta G^3}{\Delta G^3 p_{32}} = \frac{T_3(1-C_1)}{(1-C_1)\cdot p_{32}};$$

следовательно,

$$T_{ПР} = \frac{\frac{1}{\mu}\cdot\frac{\lambda}{\lambda+\mu}}{\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\cdot 1} = \frac{1}{\mu}$$

Пример I.4.4. При исходных условиях примера 1.4.2 за исключением того, что время до восстановления распределено не по экспоненциальному закону, а по закону Эрланга второго порядка, требуется установить формулы расчета коэффициентов готовности и простоя, а также показателей средней наработки до отказа, средней наработки на отказ и среднего времени простоя системы.

Решение.

1. Подготовительный этап:

- *каждому состоянию графа приписывают* случайные величины, под воздействием которых происходит переход ПМП в следующие состояния.

1. υ_1 с функцией распределения $F_{\upsilon_1}(t) = Q_{12}(t) = 1-\exp(-2\lambda t)$;

2. υ_2 с функцией распределения $F_{\upsilon_2}(t) = Q_{21}(t) = 1-(1+\mu\cdot t)\exp(-\mu\cdot t)$

3. υ_3 с функцией распределения $F_{\upsilon_3}(t) = Q_{23}(t) = 1-\exp(-\lambda\cdot t)$;

4. υ_4 с функцией распределения $F_{\upsilon_4}(t) = Q_{32}(t) = 1-(1+\mu\cdot t)\exp(-\mu\cdot t)$.

- *определяют функции плотности условного времени пребывания ПМП в состояниях графа* по формуле (4.9):

$$f_{12}(t) = g_{12}(t) \cdot 1 = 2\lambda \cdot \exp(-2\lambda \cdot t);$$

$$f_{21}(t) = g_{21}(t) \cdot P_{23}(t) = \mu^2 \cdot t \cdot \exp(-\mu - \lambda)t;$$

$$f_{23}(t) = g_{23}(t) \cdot P_{21}(t) = \lambda(1 + \mu \cdot t) \cdot \exp(-\lambda - \mu)t;$$

$$f_{32}(t) = g_{32}(t) \cdot 1 = \mu^2 \cdot t \cdot \exp(-\mu \cdot t)$$

- *определяют вероятности переходов и математические ожидания безусловного времени пребывания ПМП в состояниях графа* по формулам (4.10):

$$p_{ij} = \int_0^\infty f_{ij}(t)dt \ \text{ и } \ T_{ij} = \int_0^\infty t f_{ij}(t)dt;$$

$$T_i = \int_0^\infty [1 - \sum_j \int_0^t f_{ij}(x)dx] \cdot dt$$

Следовательно,

$$p_{12} = p_{32} = 1; p_{21} = \frac{\mu^2}{(\lambda + \mu)^2}; p_{23} = \frac{\lambda(\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)^2}$$

и

$$T_1 = \frac{`1}{2\lambda}; \quad T_2 = \frac{\lambda}{(\lambda + \mu)^2}; \quad T_3 = \frac{2}{\mu}$$

2. Находят с помощью формулы (4.18) коэффициенты готовности и простоя

$$K_Г = 1 - \pi_3 = 1 - \frac{\Delta G^3 \cdot T_3}{\Delta G^1 \cdot T_1 + \Delta G^2 \cdot T_2 + \Delta G^3 \cdot T_3}; \ K_{ПР} = \pi_3 ,$$

где

$$\Delta G^1 = 1 - C_2 = 1 - 1 \cdot p_{23} = p_{21} = \frac{\mu^2}{(\lambda + \mu)^2};$$

$$\Delta G^2 = 1;$$

$$\Delta G^3 = 1 - C_1 = 1 - 1 \cdot p_{21} = p_{23} = \frac{\lambda \cdot (\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)^2}$$

3. Определяют по формулам (4.20),(4.21) и (4.22) расчетные значения временных показателей надежности, имея в виду, что также, как и в примере I.4.3, сохраняются соотношения

$$\Delta G^1_{\overline{S_P}} = 1; \Delta G^2_1 = 1; \Delta G_{\overline{S_P}} = 1 - C_1,$$

а формульные выражения переходных вероятностей p_{ij} и математических ожиданий безусловного времени пребывания системы в соответствующих состояниях T_i подставляют по результатам подготовительного этапа данного примера. Например, среднюю наработку на отказ находят также, как и в примере I.4.3, в виде

$$T_0 = \frac{T_1 \Delta G^1 + T_2 \Delta G^2}{\Delta G^1 p_{13} + \Delta G^2 p_{23}} = \frac{T_1(1 - C_2) + T_2 \cdot 1}{(1 - C_2) \cdot 0 + 1 \cdot p_{23}} = \frac{T_1 \cdot p_{21} + T_2}{p_{23}},$$

с той особенностью, что в данную формулу подставляются параметры T_1, T_2, p_{21}, p_{23}, которые определены на подготовительном этапе данного примера.

I.4.5. Графовые полумарковские методы моментов

I.4.5.1.Прямой графовый метод моментов

Назначение метода моментов в том, чтобы по графу состояний с помощью процедуры отыскания путей и контуров на графе определить первые моменты времени пребывания системы в заданном множестве состояний (например, в множестве работоспособных состояний). Это позволит найти не только стандартные временные показатели надежности, но и их дисперсии и, что особенно важно, строгие верхние и нижние оценки вероятностных показателей надежности систем с большим числом состояний. Метод моментов основывается на следующем результате исследований по применению процедур на графах для решения сложных задач надежности систем.

Утверждение 1. Если надежность системы моделируется с помощью полумарковского случайного процесса с конечным множеством состояний S и известной матрицей переходных вероятностей $Q=(p_{ij})$, известными векторами безусловных $T=(T_i)$ и условных $T_1=(T_{ij})$ математических ожиданий времени пребывания системы в возможных состояниях, то n-й момент времени пребывания системы в заданном множестве состояний (например, в множестве работоспособных состояний S_P при начальном состоянии s_i) определяется следующим матричным выражением:

$$\bar{t}^{(n)}=(I-Q)^{-1}[T^{(n)}+\sum_{k=1}^{n-1}C_n^k T_1^{(n-k)}Q\bar{t}^{(k)}], \qquad (4.23)$$

где $\bar{t}^{(n)}=(\bar{t}_i^{(n)})$ – вектор n–х моментов времени до попадания процесса в множество неработоспособных состояний $\overline{S}_P$

$(S_P \bigcup \overline{S}_P = S; n = 1,2,3,...)$; I – единичный вектор; $T^{(n)} = (T_i^{(n)})$ – вектор n–х моментов; $T_1^{(n-k)} = (T_{ij}^{(n-k)})^T$ – транспонированная матрица $(n\text{-}k)$–х моментов.

Графовая форма выражения (4.23) имеет следующий вид:

$$\bar{t}_i^{(n)} = \frac{(T_i^{(n)} + \sum\limits_{m=1}^{n-1} C_n^m \sum\limits_{i,r} p_{ir} T_{ir}^{(n-m)} T_r^{(m)}) \Delta G_{\overline{S_P}}^i}{\Delta G_{\overline{S}_P}} +$$

$$+ \frac{\sum\limits_{i,j,l \in S_P} \sum\limits_{k} l_k^{ij} (T_j^{(n)} + \sum\limits_{m=1}^{n-1} C_n^m \sum\limits_{j,l} p_{jl} T_{jl}^{(n-m)} T_l^{(m)}) \Delta G_k^j}{\Delta G_{\overline{S_P}}} \tag{4.24}$$

где $i, r, j, l \in S_P, m \le n$.

• *При* $n = 1$ формула (4.24) преобразуется в выражение

$$\bar{t}_i = \frac{T_i \Delta G_{\overline{S}_P}^i + \sum\limits_{(k)} \sum\limits_{i,j} l_k^{ij} T_j \Delta G_k^j}{\Delta G_{\overline{S}_P}}, \tag{4.25}$$

которое представляет собой ***первый момент времени пребывания системы в множестве работоспособных состояний при начальном состоянии i***. *В частном случае, когда начальное состояние системы равно i, выражение (4.25) преобразуется в формулу расчета показателя надежности среднего времени до отказа системы, т.е. в этом случае* $\bar{t}_i = T_{CP}$ *(см. (4.20)).*

• *При* $n = 2$ ***определяют второй момент времени пребывания системы в множестве работоспособных состояний при начальном состоянии*** s_i. Если $i = 1$, то $s_i = s_1$ *и формула* *расчета второго момента времени до отказа системы имеет следующий вид:*

$$\bar{t}_1^{(2)} = \frac{(T_1^{(2)} + 2\sum_{i \in S_P} p_{1i} T_{1i} \bar{t}_i)\Delta G^1_{\overline{S_н}}}{\Delta G_{\overline{S}_P}} + \frac{\sum_{j,l \in S_P} \sum_k l_k^{1j} (T_j^{(2)} + 2\sum_l p_{jl} T_{jl} \bar{t}_l)\Delta G_k^j}{\Delta G_{\overline{S_P}}} \qquad (4.26)$$

где $1, i, j, l \in S_P$.

• Отсюда ***дисперсия наработки до отказа системы***

$$D_{CP} = \bar{t}_1^{(2)} - (T_{CP})^2; \qquad (4.27)$$

Аналогично можно определить третий и более высокие моменты времени пребывания системы в множестве работоспособных состояний.

Пример I.4.5. В условиях примера I.4.2 определить дисперсию времени до отказа дублированной системы.

Решение.

Находят математические ожидания условного времени и вторые моменты времени пребывания ПМП в каждом из трех состояний дублированной системы. При экспоненциальных законах распределения отказов и восстановлений условные математические ожидания совпадают с безусловными математическими ожиданиями времени пребывания в состояниях графа, т.е.

$$T_{12} = T_1 = \frac{1}{2\lambda}; \quad T_{21} = T_{23} = T_2 = \frac{1}{\lambda + \mu}; \quad T_{32} = T_3 = \frac{1}{\mu},$$

$$T_1^{(2)} = 2T_1^2 = \frac{1}{2\lambda^2}; \quad T_2^{(2)} = 2T_2^2 = \frac{2}{(\lambda + \mu)^2}; \quad T_3^{(2)} = 2T_3^2 = \frac{2}{\mu^2}.$$

Определяют второй начальный момент времени пребывания системы в области работоспособных состояний при начальном состоянии 1 с учетом результатов примера I.4.3.

$$\overline{t}_1^{(2)} = \frac{(T_1^{(2)} + 2p_{12}T_{12}\overline{t}_2)\Delta G^1_{\overline{S_P}} + p_{12}(T_2^{(2)} + 2p_{21}T_{21}\overline{t}_1)\Delta G_1^2}{\Delta G_{\overline{S}_P}} =$$

$$= \frac{2T_1^2 + 2T_1\overline{t}_2 + 2T_2^2 + 2p_{21}T_2\overline{t}_1}{1 - C_1} = \frac{(1+3\rho)^2 - 2\rho^2}{2\lambda^2\rho^2} = 2T_{CP}^2 - \frac{1}{\lambda^2}$$

поскольку в соответствии с примером I.4.2

$$p_{12} = \Delta G^1_{\overline{S_P}} = \Delta G_1^2 = 1; \Delta G_{\overline{S_P}} = 1 - C_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = \frac{\rho}{\rho + 1}.$$

Дисперсия времени пребывания системы в работоспособных состояниях равна

$$D_{CP} = \overline{t}_{CP}^{(2)} - T_{CP}^2 = T_{CP}^2 - \frac{1}{\lambda^2}$$

Полученные результаты в данном примере позволяют сделать следующие полезные выводы:

- при близких значениях показателей наработки на отказ и среднего времени восстановления каждого из двух устройств дублированной системы ($\rho \to 1$) и при экспоненциальных законах распределения дисперсия времени пребывания системы в работоспособных состояниях минимальна ($D_{CP} \to 0$). Этот результат полезен для систем с большим временем ремонта и не характерен для информационных систем. Он позволяет для указанного класса систем уверенно пользоваться результатами расчетов надежности дублирования;

– применительно к информационным системам следует исходить из того, что время восстановления устройства много меньше времени его исправной работы, а это означает, что $\rho << 1$. Следовательно, дисперсия времени пребывания дублированной системы в работоспособных состояниях при этих условиях очень велика, а среднеквадратичное отклонение времени пребывания системы в работоспособных состояниях с погрешностью, не превышающей второго порядка малости, совпадает со значением среднего времени до отказа дублированной системы, поскольку

$$T_{CP}^2 >> \frac{1}{\lambda^2} \text{ и } \sigma_{CP} = \sqrt{D_{CP}} \approx T_{CP}.$$

Этот результат свидетельствует о том, что закон распределения времени до отказа дублированной системы при указанных условиях может быть принят экспоненциальным. Этот результат также свидетельствует о том, что сложившееся ранее представление о высоком уровне наработки до отказа дублированной системы с быстрым восстановлением составных устройств не является бесспорным, поскольку разброс этого времени как в сторону увеличения, так и в сторону уменьшения соизмерим с его средним значением.

I.4.5.2. Операторный графовый метод моментов

В ряде задач прогнозирования и расчета надежности сложных систем удобно определять искомые моменты времени пребывания системы в множестве работоспособных состояний на основе решения системы дифференциальных уравнений в операторной форме.

Утверждение 2. Если надежность системы моделируется с помощью графа состояний, полумарковского случайного процесса на этом множестве состояний, то функция распределения времени до отказа системы в преобразованиях Лапласа при *i*-м начальном состоянии определяется выражением

$$\tilde{\Phi}_i(z)=\frac{\sum\limits_{j\in\overline{S}_P}\sum\limits_{k}\tilde{l}_k^{ij}(z)\cdot\Delta\tilde{G}_k^j(z)}{\Delta\tilde{G}_{\overline{S}_P}(z)}, \tag{4.28}$$

где $\tilde{l}_k^{ij}(z)$ – к-ый путь в преобразованиях Лапласа, ведущий из работоспособного состояния графа $i\in S_P$ в состояние отказа $j\in\overline{S}_P$; $\Delta\tilde{G}_k^j(z)$ – вес разложения графа в преобразованиях Лапласа без *j*-й вершины и вершин графа, расположенных на *к*-ом пути; $\Delta\tilde{G}_{\overline{S}_н}(z)$ – вес разложения графа без вершин множества отказовых состояний.

Из формулы (4.26) следует

– средняя наработка до отказа системы (при i=1)

$$T_{CP}=-\frac{\partial\tilde{\Phi}_1(z)}{\partial z}\Big|_{z=0}; \tag{4.29}$$

– дисперсия наработки системы до отказа

$$D_{CP}=\frac{\partial^2\tilde{\Phi}_1(z)}{\partial z^2}\Big|_{z=0}-\left[\frac{\partial\tilde{\Phi}_1(z)}{\partial z}\right]^2\Big|_{z=0}. \tag{4.30}$$

Пример I.4.6. В условиях примера I.4.2 определить среднюю наработку и дисперсию времени до отказа дублированной системы с помощью формул (4.28)-(4.30).

Решение.

Из формулы (4.28) следует, что функция распределения времени до отказа системы при начальном состоянии 1 в операторных преобразованиях имеет следующий вид:

$$\tilde{\Phi}_1(z) = \frac{\tilde{p}_{12}(z)\tilde{p}_{23}(z)}{1 - \tilde{p}_{12}(z)\tilde{p}_{21}(z)},$$

где $\tilde{l}_1^{13}(z) = \tilde{p}_{12}(z)\tilde{p}_{23}(z); \Delta\tilde{G}_1^3(z) = 1;$

$$\Delta\tilde{G}_{\bar{S}_P}(z) = 1 - \tilde{C}_1(z) = 1 - \tilde{p}_{12}(z)\tilde{p}_{21}(z).$$

В преобразовании Лапласа при экспоненциальных распределениях случайных величин

$$\tilde{p}_{12}(z) = \int_0^\infty e^{-zt} dF_1(t) = \int_0^\infty e^{-zt} d[1 - e^{-2\lambda t}] = \frac{2\lambda}{2\lambda + z};$$

$$\tilde{p}_{23}(z) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\int_0^\infty e^{-zt} dF_2(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\int_0^\infty e^{-zt} d[1 - e^{-(\lambda+\mu)t}] = \frac{\lambda}{\lambda + \mu + z};$$

$$\tilde{p}_{21}(z) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}\int_0^\infty e^{-zt} dF_2(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu + z}.$$

Таким образом,

$$\tilde{\Phi}_1(z) = \frac{\frac{2\lambda}{2\lambda + z} \cdot \frac{\lambda}{\lambda + \mu + z}}{1 - \frac{2\lambda}{2\lambda + z} \cdot \frac{\lambda}{\lambda + \mu + z}} = \frac{2\lambda^2}{2\lambda^2 + z(3\lambda + \mu + z)}.$$

На основании (4.29)

$$T_{CP} = \frac{\partial \tilde{\Phi}_1(z)}{\partial z^2}\Big|_{z=0} = \frac{-[(3\lambda+\mu)+2z]2\lambda^2}{[2\lambda^2+z(3\lambda+\mu+z)]^2}\Big|_{z=0} = \frac{3\lambda+\mu}{2\lambda^2}$$

В соответствии с формулой (4.30)

$$D_{CP} = \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_1(z)}{\partial z^2}\Big|_{z=0} - T_{CP}^2 = \frac{-16\lambda^6 + 8\lambda^4(3\lambda+\mu)^2}{16\lambda^8} - \frac{(3\lambda+\mu)^2}{4\lambda^4} =$$

$$\frac{(3\rho+1)^2}{4\lambda^2\rho^2} - \frac{1}{\lambda^2} = T_{CP}^2 - \frac{1}{\lambda^2}.$$

Таким образом, результаты примеров I.4.5 и I.4.6, полученные двумя разными способами графового метода моментов, идентичны, что подтверждает корректность изложенного метода.

I.4.5.3. Оценки нестационарных показателей надежности

• ***Вероятность отказа*** системы $\hat{Q}_C(t)$ может быть оценена по численным значениям первых n моментов времени пребывания системы во множестве работоспособных состояний с помощью, например, численного алгоритма [34], построенного на основе модифицированного симплекс – метода. Возможен другой путь оценки. Он заключается в следующем. Выбираются возможные законы распределения времени до отказа системы, задаются несколько характерных типичных значений времени работы, вычисляются для каждого закона значения функции распределения для каждого заданного времени. Исходные данные – численные значения первых моментов. Для однопараметрических законов (экспоненциальныого, Релея и др.) достаточно значения первого момента. Для двухпараметрических законов распределения (нормальный и его модификации, Вейбулла и др.) требуются численные значения двух первых моментов и т.д. Затем находят верхнее и нижнее значение среди всех рассчитанных чисел функций распределения. Эти значения и принимаются в качестве строгих верхних и нижних оценок вероятности отказа системы

$$\inf Q_C(t) < \hat{Q}_C(t) < \sup Q_C(t)\,, \tag{4.31}$$

где $\inf Q_C(t)$ и $\sup Q_C(t)$ – точные значения соответственно нижней и верхней границ вероятности отказа системы.

• ***Вероятность безотказной работы*** системы $\hat{P}_C(t)$ оценивается как

$$1-\sup Q_C(t) < \hat{P}_C(t) < 1-\inf Q_C(t)\,, \tag{4.32}$$

В свою очередь,

• ***интенсивность отказа системы***

$$\inf \lambda_C(t) < \hat{\lambda}_C(t) < \sup \lambda_C(t)\,,$$

где

$$\inf \lambda_C(t) = \frac{-[\sup P_C(t+\Delta t) - \sup P_C(t)]}{\sup P_C(t)\Delta t}\,; \tag{4.33}$$

$$\sup \lambda_C(t) = \frac{-[\inf P_C(t+\Delta t) - \inf P_C(t)]}{\inf P_C(t)\Delta t}\,. \tag{4.34}$$

Δt – выбираемый минимально возможный с точки зрения различимости результатов расчетов отрезок времени.

Пример I.4.7. Для дублированной системы вычислены значения первого и второго моментов времени пребывания в работоспособных состояниях 1 и 2. По этим значениям вычислены в момент времени t_1 функции распределения пяти выбранных законов. Эти результаты приведены в следующей таблице

Момент распред. времени	**Номер закона**				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
t_1	$21.0 \cdot 10^{-5}$	$20.4 \cdot 10^{-5}$	$21.3 \cdot 10^{-5}$	$20.8 \cdot 10^{-5}$	$20.2 \cdot 10^{-5}$
$t_1 + \Delta t$, $\Delta t = 05$ *ч*	$21.3 \cdot 10^{-5}$	$20.6 \cdot 10^{-5}$	$21.4 \cdot 10^{-5}$	$21.2 \cdot 10^{-5}$	$20.7 \cdot 10^{-5}$

Минимальные значения вероятности отказа системы помечены в клетках таблицы светло-серым цветом, максимальные значения – темно-серым.

Таким образом,

$$20.2 \cdot 10^{-5} < \hat{Q}_C(t) < 21.3 \cdot 10^{-5};$$

$$1 - 21.3 \cdot 10^{-5} < \hat{P}_C(t) < 1 - 20.2 \cdot 10^{-5};$$

$$\inf \lambda_C(t_1) < \hat{\lambda}_C(t_1) < \sup \lambda_C(t_1) \equiv 0.2 \cdot 10^{-5} < \hat{\lambda}_C(t_1) < 0.8 \cdot 10^{-5} (1/ч)$$

$$\text{где } \sup \lambda_C(t_1) = \frac{-(1 - 20.6 \cdot 10^{-5} - 1 + 20.2 \cdot 10^{-5})}{(1 - 20.2 \cdot 10^{-5}) \cdot 0.5} = 0.8 \cdot 10^{-5};$$

$$\inf \lambda_C(t_1) = \frac{-(1 - 21.4 \cdot 10^{-5} - 1 + 21,3 \cdot 10^{-5})}{(1 - 21.3 \cdot 10^{-5}) \cdot 0.5} = 0.2 \cdot 10^{-5}.$$

I.4.6. Алгоритм применения полумарковских графовых методов

Подготовительный этап

Определяют вероятности переходов p_{ij}, математические ожидания T_i и T_{ij} соответственно безусловного и условного времени, а также второй и, если это необходимо, третий моменты $T_i^{(2)}$ и $T_i^{(3)}$ времени пребывания системы в каждом из состояний; определяют веса путей l_k^{0i}, l_k^{ij} из начального состояния 1 во все состояния i графа системы, а также из любого i-го в любое j-ое состояние графа; определяют веса всех замкнутых контуров C_j графа.

Алгоритм расчета

Средняя наработка до отказа системы.

Определяют по формуле (4.20) в следующем порядке:

а) выделяют все k путей из начальной вершины 1 в вершину i графа;

б) относительно первого выделенного пути исключают из перечня замкнутых контуров те, которые имеют общие вершины с данным путем, а также вершины, принадлежащие к множеству;

в) рассчитывают вес ΔG_i^1 разложения графа относительно первого выделенного пути в такой последовательности:

- от единицы вычитают сумму весов C_j оставшихся контуров;

- к полученному результату прибавляют попарные произведения весов $C_r C_j$ контуров, не имеющих общих вершин;

- от полученного результата вычитают произведения весов троек контуров $C_j C_r C_j$, не имеющих общих вершин, и так далее по всем наборам несоприкасающихся контуров;

г) определяют произведение веса l_1^{1i} первого выделенного пути на вес ΔG_i^1 разложения графа;

д) повторяют операции б), в) и г) для второго, третьего, ..., k-го выделенных путей;

е) полученные результаты суммируют;

ж) изложенный цикл расчета повторяется для всех оставшихся вершин графа состояний системы, принадлежащих множеству S_P;

з) рассчитывают вес разложения графа $\Delta G_{\overline{S_P}}$ в такой же последовательности, что и вес ΔG_i^1. При этом из перечня замкнутых контуров C_j исключаются те, которые имеют вершины, принадлежащие множеству S_1;

и) рассчитывают вес разложения $\Delta G_{\overline{S_P}}^1$. При этом из перечня оставшихся после выполнения п. з) весов C_j исключают веса тех контуров, которые содержат начальную вершину 1.

Дисперсия наработки до отказа системы

а) определяют по формуле (4.25) средние времена $\overline{t_i}$ пребывания системы в множестве состояний S_P. Расчет выполняется точно также, как и показателя T_{CP}, с заменой начального состояния 1 на начальное состояние $i \in S_P$;

б) определяют по формуле (4.26) второй начальный момент $\overline{t_1}^{(2)}$ времени пребывания системы во множестве состояний S_P при начальном состоянии 1. Расчет выполняется с помощью операций а)... ж);

в) рассчитывают дисперсию наработки до отказа системы по формуле (4.27).

Средняя наработка на отказ системы вычисляется по формулам (4.21) и (4.22), где веса разложений на графе определяются с помощью процедур в), з), и).

Вероятность безотказной работы системы оценивается следующим образом:

- определяют по формуле (4.26) вторые начальные моменты $\overline{t_i}^{(2)}$ времени пребывания системы во множестве состояний S_P при начальных состояниях $i \in S_P$;

- по формуле (4.24) определяют третий начальный момент $\overline{t_1}^{(3)}$ времени пребывания системы во множестве состояний S_P при первом начальном состоянии;

- рассчитывают численные значения $\inf P_Б(t)$ и $\sup P_Б(t)$ по алгоритму [29].

Возможна оценка вероятности безотказной работы системы по численным значениям верхней и нижней границ вероятности отказа системы с помощью формулы (4.30).

Вероятность отказа системы оценивается по формуле (4.31).

Интенсивность отказов системы оценивается по формулам (4.33) и (4.34) с помощью итерационной процедуры, в которой на каждом шаге уменьшается интервал наблюдения Δt.

Правило остановки вычислений:

$$|\inf \lambda_C(t+\Delta t) - \inf \lambda_C(t)| \le \varepsilon;$$
$$|\sup \lambda_C(t+\Delta t) - \sup \lambda_C(t)| \le \varepsilon$$

где ε – заданная погрешность вычислений.

Среднее время простоя системы вычисляется по формуле (4.22), где веса разложений определяются с помощью процедур в),з), и).

Коэффициенты готовности и неготовности (простоя) системы определяются по формулам (4.18) и (4.19), где веса разложений графа находятся с помощью приведенных выше процедур в),з), и).

Все операции выделения путей и контуров на графе выполняются с помощью стандартной процедуры “поиск с возвращением”.

Приближенный алгоритм

Строгая оценка надежности сложных информационных систем с тысячами состояний известными методами практически невыполнима, а разработанными строгими графовыми методами затруднена по ряду причин. К ним относятся:

- требуется большое машинное время для отыскания троек, четвёрок и т.д. непересекающихся контуров на графе даже при применении эффективных стандартных процедур;

- для вычисления точных значений первых трёх моментов времени пребывания систем в множестве работоспособных состояний необходима большая подготовительная работа по определению первых трёх моментов времени пребывания системы в каждом из состояний системы, а также математических ожиданий условного времени пребывания системы в каждом из состояний.

Поэтому в состав изложенного выше алгоритма введена процедура приближённых вычислений весов разложений графа, позволяющая при обеспечении точности вычислений в допустимых пределах резко сократить время компьютерных вычислений.

Суть процедуры приближенных вычислений состоит в следующем.

Ранее было отмечено, что вес разложения графа вычисляется по формуле

$$\Delta G = 1 - \sum_{i} C_i + \sum_{i,j} C_i C_j - \sum_{i,j,r} C_i C_j C_r + \sum_{i,j,r,e} C_i C_j C_r C_e - \ldots$$

Для упрощения записи эту формулу запишем в следующем виде:

$$\Delta G = 1 - \sum C + \sum CC - \sum CCC + \sum CCCC - \ldots$$

где, $\sum C$ – сумма весов контуров, $\sum CC$ – сумма попарных произведений весов непересекающихся контуров, $\sum CCC$ – сумма произведений весов троек непересекающихся контуров, $\sum CCCC$ – сумма произведений весов четвёрок контуров, не имеющих общих вершин и т.д.

Из приведённой формулы вычисления весов разложений видно, что члены этой формулы знакопеременные, следовательно, если веса соседних членов одного порядка, то их результирующее влияние на вес разложения может быть незначительным. Чтобы убедиться в этом, проведено исследование в рамках ряда резервированных систем большой кратности, графы функционирования которых примерно в четыре раза более связаны, чем схемы «гибели и размножения», которые широко применяются в теории надёжности и в теории массового обслуживания. Из этого следует, что они содержат значительно больше контуров по сравнению с графами указанных схем.

Предметом исследования являлись отношения:

$$k_1 = \frac{\sum C}{\sum CCC + \sum CCCC}; \quad k_2 = \frac{\sum CC}{\sum CCC + \sum CCCC};$$

$$k_3 = \frac{\left|\sum C - \sum CC\ \right|}{\sum CCC + \sum CCCC}; \quad k_4 = \frac{\left|\sum CCC - \sum CC\,CC\right|}{\sum CCCC + \sum CCCCC}$$

в зависимости от количества и вершин графа.

Результаты исследований приведены на рис. I.4.3. Они свидетельствуют о том, что суммарные веса одиночных контуров или попарных произведений непересекающихся контуров на четыре и более порядков превышают суммарный вклад в веса разложений графов троек и четвёрок непересекающихся контуров (графики k_1 и k_2).Такой же примерно порядок соотношений между суммарным вкладом одиночных и двоек попарно непересекающихся контуров и суммарным вкладом троек и четвёрок непересекающихся контуров (график k_3).

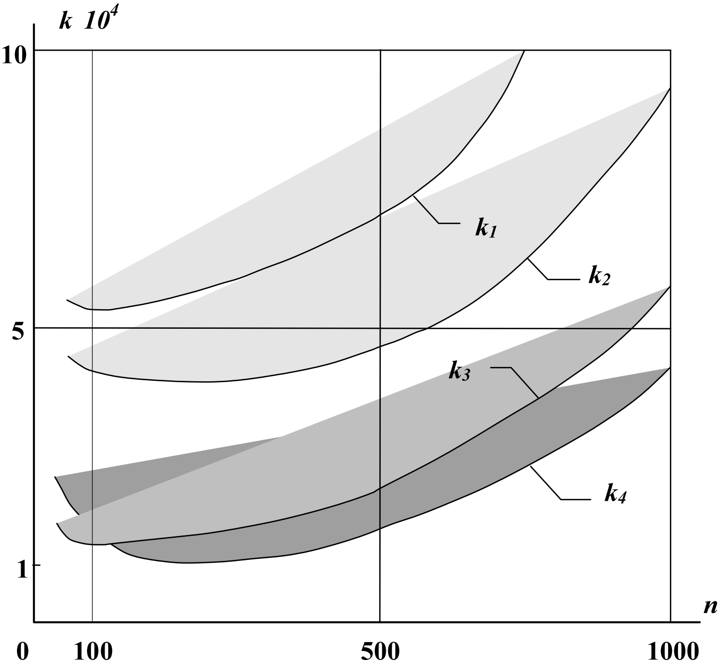

Рис.I.4.3. Графики числа взаимосвязанных одиночных, двойных и т.д. контуров в зависимости от количества вершин

Эти результаты исследований позволяют сформировать следующую итерационную процедуру расчетов весов разложений графа:

1. Ввод N, $i = 0$, $\varepsilon_i = 0.0001$

2. $1 - \Delta G_0 = \sum C$

3. $1 - \Delta G_i = \sum C - \sum CC$

4. $/ \Delta G_i - \Delta G_0 / \leq \varepsilon_i$

5. Если условие п.4 выполнено, вычисление закончено. Определение погрешности вычислений.

6. Если условие п.4 не выполнено, то $i = i + 1$

7. $\varepsilon_i = 0.0001 * (i + 1)$

8. $i \le N$?

9. Да. Переход к п.3.

10. Нет. Конец.

Исследования показали, что с погрешностью менее 1% можно ограничиться приближённым выражением для расчётов весов разложений графа

$$\Delta G \cong 1 - \sum C + \sum CC,$$

и, следовательно, ограничиться пп.1-4 указанной выше процедуры вычисления весов разложений графа.

Приведенные алгоритмы позволяют достаточно просто с помощью стандартных процедур реализовать графовые полумарковские методы расчета надежности как простых, так и сложных систем с сотнями и даже тысячами состояний. В этих случаях необходимо преодолеть две проблемы: построение графа состояний и ввод в компьютер графовой модели. Построение графовой модели системы с сотнями и более состояний возможно экспертами по надежности с помощью инженеров – специалистов в исследуемой предметной области. Целесообразно строить упорядоченную многослойную графовую модель, чтобы реализовать послойный ввод в компьютер. Безусловно, этими рекомендациями нельзя ограничиваться при решении указанных проблем – имеет место много специфических особенностей, которые при этом нужно учесть. Построение графовой модели системы с большим числом состояний и ввод ее в компьютер – это предмет отдельного обсуждения.

В целом графовые полумарковские и, в частности, марковские методы позволяют строго или с допустимой погрешностью строить и решать модели исследуемых и проектируемых объектов информационных систем. Они предназначены для детального анализа влияния составляющих факторов на надежность информационных систем и выбора наиболее приемлемого варианта построения объектов и систем в целом.

Контрольные вопросы

1. При каких исходных параметрах недопустимо моделирование надежности объекта с помощью непрерывных Марковских процессов?

2. В чем принципиальное различие между Марковскими и полумарковскими случайными процессами?

3. При каком условии Марковская модель надежности объекта является частным случаем полумарковской модели?

4. В чем достоинство графовых методов решения полумарковских моделей надежности по сравнению со стандартными методами?

5. Почему представление о высоком уровне наработки до отказа дублированной системы с быстрым восстановлением составных устройств не является безусловным?

6. По каким причинам строгая оценка надежности сложных информационных систем с тысячами состояний известными методами практически невыполнима, а разработанными строгими графовыми методами крайне затруднена?

7. В чем суть построения приближенного алгоритма применения полумарковских графовых методов?

8. Каким образом можно построить граф состояний сложной системы, опираясь на идеи построения приближенного алгоритма применения полумарковских графовых методов?

Глава I.5. ПРАКТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ РАСЧЕТОВ И ПРОГНОЗИРОВАНИЯ СТРУКТУРНОЙ НАДЕЖНОСТИ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

I.5.1. Стандартные расчеты надежности

I.5.1.1. Метод структурной схемы надежности

Рассмотренные в предыдущих главах прикладные Марковские и полумарковские методы анализа надежности информационных систем в настоящее время доведены до практического применения научными работниками, инженерами по надежности. Чтобы без проблем пользоваться этими методами нужна специальная подготовка в области теории вероятности и случайных процессов. Эти знания необходимы также специалистам, которые предпочитают графовые полумарковские методы анализа надежности. Для широкого круга практических работников в области информационных технологий, которые глубоко знают свою предметную область и свободно оперируют в ней, часто возникают трудности в применении этих и других известных математических методов углубленного анализа надежности систем. Поэтому для удобства практической работы широкого круга специалистов разработан ряд стандартных методов [11, 35 и др.] для оперативных расчетов надежности. Стандартные методы позволяют ориентироваться в том, какой уровень надежности соответствует эксплуатируемой системе в текущем интервале наблюдения и позволяют прогнозировать тенденцию изменения надежности в зависимости от планируемых мероприятий в течение жизненного цикла системы. Наиболее привлекательным с точки зрения простоты и наглядности остается структурный метод надежности [35]. Основные идеи структурного метода надежности состоят в следующем:

– при разработке модели надежности системы вначале определяют условия ее работоспособности, формулируют критерий отказа. Затем исследуемую систему виртуально делят на независимые блоки. Каждый блок должен быть функционально законченным элементом системы, по возможности максимально большим с установленным собственным критерием отказа. Для простоты числовой оценки каждый блок должен содержать такие элементы, которые соответствуют одному и тому же статистическому распределению наработки до отказа;

– используя определение отказа системы, строят структурную схему расчета надежности. Если для функционирования системы требуется, чтобы функционировали все блоки, то соответствующей структурной схемой является такая схема, в которой все блоки соединены последовательно (рис. I.5.1). Отказ любого блока является отказом системы. Такое соединение называется *последовательным*. Поскольку при этом в системе не предусматривается никакой избыточности, то последовательное соединение также называется *основным*. Другой тип структурной схемы применяют в том случае, когда отказ одного блока не влияет на работоспособность системы в соответствии с определением отказа системы. Если в этом случае вся цепочка дублирована, то структурная схема расчета надежности имеет вид, показанный на рис. I.5.2. Если каждый блок основного соединения дублирован, то структурная схема имеет вид, показанный на рис. I.5.3. Структурные схемы этого вида называются параллельными структурными схемами. Структурные схемы, используемые для описания надежности систем, часто являются комбинацией последовательных и параллельных соединений.

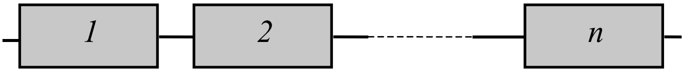

Рис. I.5.1. Система с последовательным соединением элементов

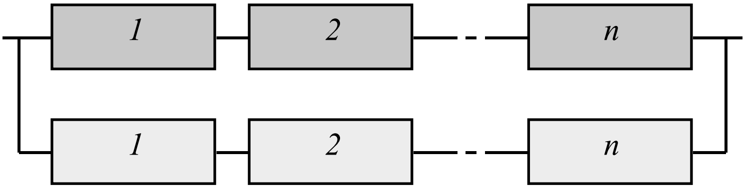

Рис. I.5.2. Общее дублирование в структурной схеме

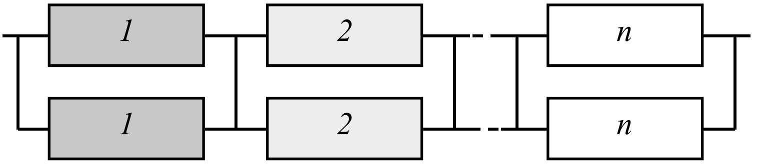

Рис. I.5.3. Поэлементное дублирование в структурной схеме

Кроме перечисленных основных, существуют и другие конфигурации структурных схем надежности, такие как: структурная схема с мажоритарной избыточностью типа m/n, в которой предусматривается наличие хотябы m исправных блоков из n параллельных блоков; структурные схемы смешанного типа, которые не могут быть приведены к комбинации последовательных и параллельных соединений и для анализа их надежности практикуется применение булевых функций;

– в любой структурной схеме расчета надежности каждый блок встречается не более одного раза. Отказы блоков должны быть между собой взаимно независимы. Отсюда следует, что, во-первых, отказ предыдущего блока схемы расчета не влияет на надежность одного или нескольких последующих блоков и, во-вторых, в структурной схеме с последовательным соединением каждый составной блок может размещаться в любом месте схемы.

Определение показателей надежности систем с последовательным соединением элементов

В информационных системах отказы элементов системы, как правило, предполагаются независимыми, т.е. отказ любой группы элементов не влияет на вероятностные характеристики остальных элементов. На данном уровне рассмотрения принимается, что элемент системы (объект) в целом уже охарактеризован некоторым набором показателей надежности.

Пусть E_i будет событием элемента c_i, происходящего в определенный момент времени. Безотказность системы с последовательным соединением n элементов может быть представлена следующим образом

$$P_C = P\,[E_1 \cdot E_2 \cdot \ldots \cdot E_i \cdot \ldots \cdot E_n].$$

Если события независимы, то: $P_C = \prod_{i=1}^{n} P[E_i]$.

Если известны распределения наработок до отказа отдельных элементов $F_i(t) = 1 - P_i(t)$, то тогда для независимых элементов вероятность безотказной работы системы $P_C(t)$ определяется выражением

$$P_C(t) = \prod_{i=1}^{n} [1 - F_i(t)] = \prod_{i=1}^{n} P_i(t). \qquad (5.1)$$

В п. I.1.1 [1] отмечалось, что для информационных систем наиболее характерны внезапные отказы. Естественной моделью функции распределения этих отказов в элементе является экспоненциальное распределение наработки до отказа $F_i(t) = 1 - P_i(t) = 1 - e^{-\lambda_i \cdot t}$ с постоянной интенсивностью отказов $\lambda_i = const$. Тогда для независимых элементов

$$P_C(t) = \exp(-\sum_{i=1}^{n} \lambda_i t) = \exp(-\Lambda t) \text{ , где } \Lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \text{ .} \qquad (5.2)$$

При условии, что $\Lambda t << 1$, допустимы следующие приближенные выражения

$$P_C(t) \approx 1 - \Lambda t \text{ и } Q_C(t) \approx \Lambda t \text{ .}$$

Вероятность безотказной работы системы при последовательном (основном) соединении элементов всегда меньше, чем вероятность самого ненадежного элемента. Она существенно возрастает при увеличении надежности самого ненадежного элемента.

При определении показателей надежности систем, содержащих большое число элементов, в случае, если вероятность безотказной работы отдельных элементов достаточно велика, можно использовать следующие приближенные формулы:

$$\prod_{i=1}^{n} P_i(t) \approx 1 - \sum_{i=1}^{n} Q_i(t);$$

$$P^n(t) \approx 1 - nQ(t); \qquad (5.3)$$

$$\sqrt[n]{P(t)} \approx 1 - \frac{Q(t)}{n}$$

где $Q(t)$ – вероятность отказов отдельного элемента.

Показатели надежности восстанавливаемых систем определяются с учетом количества привлекаемых к восстановлению отказов ремонтников (ремонтных бригад). Если восстановление ограниченное (одна ремонтная бригада), то комплексные показатели надежности системы при условии независимости элементов находят перемножением комплексных показателей надежности составных элементов

$$K_{ГС} = \prod_{i=1}^{n} K_{Гi};$$

$$K_{ГС}(t) = \prod_{i=1}^{n} K_{Гi}(t); \qquad (5.4)$$

$$K_{ОГС}(\tau_З) = \prod_{i=1}^{n} K_{ОГi}(\tau_З).$$

Если значения показателей готовности составных элементов достаточно близки к единице, что обычно имеет место на практике, то можно использовать приближенную формулу

$$\prod_{i=1}^{n} K_{Гi} \approx 1 - \sum_{i=1}^{n} (1 - K_{Гi}). \qquad (5.5)$$

Аналогичные приближения возможны и при определении функций готовности и оперативной готовности системы.

Для систем с объектами 1 или 2 классов (см. п.I.2.4) представляет интерес показатель среднего времени восстановления системы. Этот показатель может быть определен, если известны интенсивности отказов составных элементов λ_i и средние времена восстановлений элементов $T_{Вi}$. При этих условиях

$$T_{ВС} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i T_{Вi}}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}. \qquad (5.6)$$

Применительно к информационным системам с объектами второго класса целесообразно определить среднюю наработку на отказ системы T_C. При известных значениях показателей $K_{ГС}$ и $T_{ВС}$ эта задача решается с помощью формулы

$$T_C = \frac{K_{ГС} T_{ВС}}{1 - K_{ГС}}. \tag{5.7}$$

Приведенные примеры точного и приближенного определения комплексных показателей надежности систем с основным соединением справедливы при условии одной ремонтной бригады и отсутствии какой-либо избыточности в системе. Приведенные в примерах формулы носят узконаправленный характер. Для решения широкого спектра задач расчетов структурной надежности информационных систем целесообразно применять хорошо зарекомендовавшие себя математические методы, основные из которых изложены в главах I.3 и I.4.

Определение показателей безотказности систем с параллельным и последовательно – параллельным соединениями элементов

Параллельное соединение элементов в структурной схеме

На рисунке I.5.4 показана в общем виде структурная схема расчета надежности систем с параллельным соединением из m элементов.

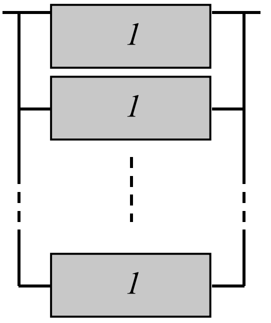

Рис. I.5.4. Параллельное соединение элементов в структурной схеме

Используя предыдущую систему обозначений, имеем

$$P_C = P[E_1 + E_2 + ... + E_j + ... + E_m]$$

Далее применим практичный подход, который состоит в определении дополнительных событий из событий E_j. Пусть $\overline{E}_j$ будет событием отказа компонента j во время t. Тогда

$$P_C = 1 - P[\overline{E_1 + E_2 + ... + E_j + ... + E_m}, \text{ или}$$

$$P_C = 1 - P[\overline{E}_1 \cdot \overline{E}_2 \cdot ... \cdot \overline{E}_j \cdot ... \cdot \overline{E}_m].$$

Когда события независимы друг от друга, то

$$P_C(t) = 1 - \prod_{j=1}^{m} (1 - P_j(t)) \tag{5.8}$$

вследствие соответствия $\overline{E}_j \Rightarrow 1 - P_j(t)$.

Если интенсивности отказов элементов системы постоянны и независимы, элементы работают постоянно, то вероятность безотказной работы системы из n параллельно соединенных элементов

$$P_C(t) = 1 - \prod_{j=1}^{m} (1 - e^{-\lambda_j t}) \approx 1 - \prod_{j=1}^{m} \lambda_j t. \tag{5.9}$$

В информационных системах практикуется применять однотипные параллельные элементы. Следовательно, $\lambda_j = \lambda = const$ и приближенная формула (5.9) преобразуется к очень простому виду

$$P_C(t) \approx 1 - (\lambda t)^m. \tag{5.10}$$

Перед применением формулы (5.10) следует проверить выполнение условия $\lambda t << 1$. Если да, то данная формула обеспечивает приемлемую корректность расчетов. Как правило, это условие на практике выполняется. Возможны исключения. Тогда нужно избегать упрощений.

• Частота отказов системы при параллельных однотипных элементах

$$\Lambda_C(t) = -\frac{P_C^{/}(t)}{P_C(t)} \approx m\lambda^m t^{m-1}, \text{ где } \lambda \cdot t << 1 \qquad (5.11)$$

• Средняя наработка системы на отказ

$$T_{CP} = \frac{\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j}}{\lambda} \qquad (5.12)$$

Например, средняя наработка на отказ T_{CP} системы, составленной из двух идентичных параллельных элементов в 1.5 раза выше, чем средняя наработка на отказ единственного элемента.

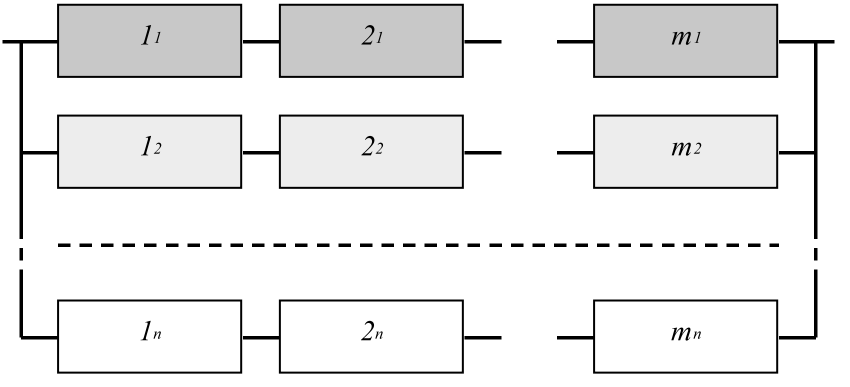

Рис. I.5.5. Последовательно-параллельное соединение элементов в структурной схем

Последовательно-параллельное и параллельно-последовательное соединения элементов в структурной схеме

На рис. I.5.5 показана структурная схема расчета надежности системы с *параллельным соединением из m групп элементов при последовательном соединении n элементов в каждой группе*.

Показатели безотказности этой системы при условии однотипности элементов в каждой параллельной группе и постоянной интенсивности отказов всех элементов системы, а также при $\lambda_i t << 1$ выражаются в следующем виде:

$$P_C(t) \approx 1-(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i t)^m;$$

$$\Lambda_C(t) \approx m(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i)^m t^{m-1}; \qquad (5.13)$$

$$T_{CP} = \frac{\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{j}}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}.$$

На рис. I.5.6 показана структурная схема расчета надежности системы с *последовательным соединением из n групп элементов при параллельном соединении* $k_i (i=1...m)$ *элементов в каждой группе*, где k_i изменяется в пределах от 1 до *m*.

Показатели безотказности этой системы при условии однотипности элементов в каждой параллельной группе и постоянной интенсивности отказов, а также при $\lambda_i t << 1$ выражаются в следующем виде:

$$P_C(t) = \prod_{i=1}^{n} P_i(t) \approx \prod_{i=1}^{n}(1-(\lambda_i t)^{k_i}). \qquad (5.14)$$

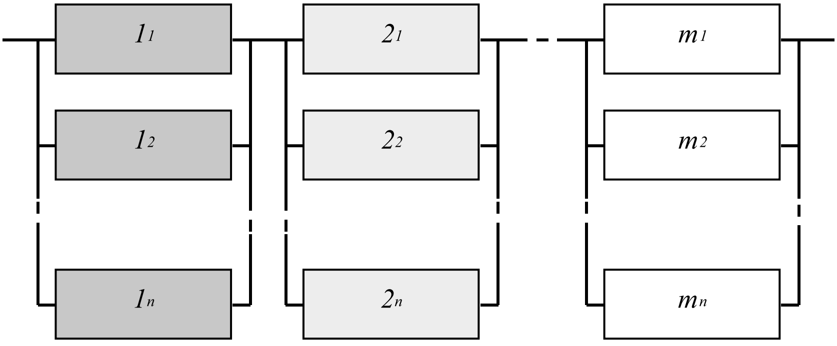

Рис. I.5.6. Параллельно-последовательное соединение элементов в структурной схеме

Приведенные формулы (5.13) и (5.14) позволяют сравнить безотказность систем с одинаковым количеством элементов $n*m$, но с разными архитектурами построения. *Архитектура №1:* система состоит из m параллельных однотипных соединений, в каждом соединении n последовательно соединенных элементов. *Архитектура №2:* система состоит из n последовательно соединенных групп элементов при параллельном соединении m элементов в группе.

Если принять, что все элементы в системе идентичны, интенсивности отказов постоянны, то очевиден вывод о том, что архитектура системы с общим распараллеливанием элементов (архитектура №1) с точки зрения надежности существенно хуже архитектуры системы с поэлементным распараллеливанием (архитектура №2). Применение архитектуры №2 эффективно при условии отсутствия переключений или при несущественных по численности переключениях избыточных элементов. В противном случае возможны дополнительные проблемы с устройствами поэлементной коммутации, которые не только

Для расчетов надежности восстанавливаемых систем с параллельными, параллельно-последовательными и последовательно-параллельными структурами следует рекомендовать изложенные в главах 3 и 4 марковские и полумарковские методы.

I.5.2. Погрешности расчетов надежности

I.5.2.1. Приближенные исходные данные

Численное решение задач расчета надежности систем не может быть выполнено абсолютно точно. Одна из основных причин – *неточность исходных данных*. Для информационных систем интенсивность отказов составных элементов и устройств ИС существенно зависит от: 1) окружающих условий эксплуатации, 2) от корректности и качества разработки и изготовления, 3) от функциональной плотности средств информационной техники. В работах [14, 36] приведены значения коэффициентов изменения интенсивности отказов элементов и устройств ИС.

Таблица I.5.1

В зависимости от окружающих условий эксплуатации	k_1
Благоприятные условия и малые нагрузки	1.0
Стационарные (без вредных вибраций, колебаний температуры и т.д.)	2.0
Подвижные (переносные)	4.0
В зависимости от качества разработки и изготовления	k_2
Нормальное коммерческое исполнение	20.0
Исполнение по согласованной спецификации и при наличии системы управления качеством	5.0
100% отбор и выжигание (для ответственных систем)	1.0
в зависимости от функциональной плотности средств информационной техники современного поколения	k_3
Коммерческие системы	5.0
Ответственные системы со специальными средствами защиты от внутренних помех и внешних воздействий	1.0

С учетом опыта компаний Сименс и Бомбардье указанные значения коэффициентов изменения интенсивности отказов (коэффициентов – множителей k_1, k_2 и k_3) могут иметь следующие значения (табл. I.5.1).

В указанных работах приведены сведения по граничным значениям интенсивностей отказов компонентов информационной техники. Некоторые из них представлены нами в табл. I.5.2.

Таблица I.5.2

Компоненты информационной техники	**Нижняя граница за 10^6 час**	**Верхняя граница за 10^6 час**	**Примечание**
Соединения поточной пайкой	0.0003	0.001	
Соединители печатных плат	0.0003	0.1	
Конденсаторы керамические	0.0005	0.1	
Конденсаторы танталовые не одинарные	0.001	0.1	
Резисторы оксидные	0.001	0.05	
Реле British Telecom	0.02	0.07	
Переключатели клавишные низкой мощности	0.003	2.0	
Транзисторы кремниевые маломощные	0.01	0.2	
Биполярные SRAM 64 кбит	0.05	0.13	При температуре до 60 град.
Биполярные SRAM 256 кбит	0.09	0.50	При температуре до 60 град.

Компоненты информационной техники	**Нижняя граница за 10^6 час**	**Верхняя граница за 10^6 час**	**Примечание**
Биполярные PROM/ROM 256 кбит	0.03	0.03	При температуре до 60 град.
Логические MOS 50 ключей	0.01	0.03	При температуре до 60 град.
Логические MOS 500 ключей	0.01	0.05	При температуре до 60 град.
Логические биполярные 500 ключей	0.01	0.18	При температуре до 60 град.
MicroProc MOS 32 бита	0.02	2.0	При температуре до 60 град.
MicroProc биполярные 32 бита	0.01	4.0	При температуре до 60 град.
Дисковая память	100	2000	
Блок магнитной ленты, включая привод	200	500	
Компьютер – мини	100	500	
Компьютер – основной блок	4000	8000	

Ширина диапазона данных во многих случаях превышает значение 10:1. Для этих данных оправдано применение среднего геометрического значения. Это объясняется тем, что вследствие большого разноса между собой крайних оценок, использование среднего арифметического в качестве представительного числа является неудовлетворительным, так как оно получается предпочтительным большему числу. Это можно проиллюстрировать на следующем примере. Оценки интенсивности отказов дисковой памяти (см.табл. I.5.2) составляют 100 и 2000 (за миллион часов).

Среднее арифметическое равно

$$\lambda_{СРарифм} = \frac{\lambda_H + \lambda_B}{2} = 1050 \cdot 10^{-6} 1/ч\,.$$

Это значение среднего арифметического превосходит нижнюю оценку в 10 раз и только вдвое уступает верхней оценке.

Среднее геометрическое определяется в виде

$$\lambda_{СРгеометр} = (\lambda_H \cdot \lambda_B)^{1/2} = 450 \cdot 10^{-6} 1/ч\,.$$

Таким образом, полученное представительное число связано с обеими оценками примерно одинаковым множителем (4.44 и 4.5). Именно средние геометрические значения, полученные из двух оценок, обычно соответствуют для компонентов ИС тем значениям интенсивности отказов, которые приводятся в различных источниках.

Погрешности выполнения математических операций над приближенными числами

Из предыдущего пункта видно, что при выполнении расчетов надежности оперируют с приближенными числами. Вычисления с помощью компьютеров или калькуляторов обеспечивают получение ответа в форме 6-10-значных чисел, но где гарантия, что все цифры полученного ответа верны. Академик А.Н. Крылов говорил, что ему приходилось рассматривать проекты, в которых 90% работы затрачивалось впустую на выписывание ненужных и неверных цифр. Нередко и до сих пор приходится сталкиваться в публикациях уважаемых авторов с ответами типа средней наработки на отказ 28702.34567 часов или коэффициента готовности 0.9987654 при начальных данных, в которых только одна – две цифры после запятой.

Какова точность полученного результата? С какой точностью нужно задавать исходные показатели для получения результата с заданным числом верных знаков? Повлияет ли порядок вычислений или выбор метода на получение искомого результата? Ответы на эти вопросы возможны с помощью теории погрешностей.

Все вычислительные погрешности расчетов надежности можно разделить на 3 группы.

Первая из них связана с *погрешностью округлений* в процессе вычислений. От этой погрешности практически невозможно избавиться; даже при машинном счете она не исчезает, хотя с ростом разрядности она существенно уменьшилась (вычисления в режиме плавающей точки, представление в формате чисел с двойной точностью).

При задании исходных данных мы, как правило, берем не истинные оценки, а приближенные. Так, большинство физических констант найдено в результате эксперимента или приближенных вычислений. Дальнейшее их использование приводит к *неустранимой погрешности*, или *погрешности исходных данных*.

Одна и та же задача может решаться различными методами. Так, систему линейных алгебраических уравнений А.Н. Колмогорова при моделировании надежности марковскими случайными процессами можно решать точными или итеративными методами, каждый из которых вносит в результат свою погрешность – *погрешность метода*.

Абсолютная и относительная погрешности

Пусть a – приближенное значение числа A. Величина $|a\text{-}A|$ называется абсолютной погрешностью приближенного числа. Очевидно, что сама по себе эта оценка не представляет практического интереса, так как точного значения мы не знаем. Поэтому обычно используют понятие ***предельной абсолютной погрешности***.

Если мы можем указать по возможности малое число $\Delta > 0$ такое, что $/a - A/ < \Delta$, то Δ назовем предельной абсолютной погрешностью. Например, если мы найдем значение корня из 2, ограничившись двумя знаками после десятичной точки, то погрешность не превышает 0,005.

Абсолютная погрешность не полностью характеризует результат. Так, при вычислениях, связанных с сотнями тысяч часов наработки на отказ, точность до часа едва ли разумна, да и часто недостижима (специалист, дающий прогноз безотказной работы информационной системы с точностью до часа, вызывает в лучшем случае усмешку слушателей). Абсолютная погрешность в 1 мм никчемна при оценке расстояния от Москвы до Рио-де-Жанейро и абсурдна при поиске расстояний между молекулами твердого вещества. Поэтому часто используется понятие ***предельной относительной погрешности*** (в дальнейшем слово «предельная» мы будем опускать)

$$\delta = \frac{\Delta}{/A/}.$$

Очевидно, что в реальности при неизвестном истинном значенении числа A приходится использовать деление на $|a|$, если $|\Delta| << |a|$. Относительная погрешность является величиной безразмерной и обычно выражается в процентах.

Значащие цифры и верные знаки

При выполнении приближенных вычислений принято пользоваться следующими терминами. ***Верная цифра*** – такая цифра, погрешность которой не превышает половины следующего разряда. ***Сомнительная цифра*** – цифра, стоящая в числе следом за верной. ***Значащие цифры*** – цифры, начиная с первой слева и кончая последней, за точность которой можно ручаться. ***Нуль*** может быть цифрой значащей, незначащей и иметь двоякий смысл.

Точные или приближенные числа часто представляются большим числом цифр, чем это нужно для вычислений. Тогда их округляют. Полученное после округления ***приближенное число может быть с избытком или недостатком***. Например, $\pi=3.14159265\ldots$ Если записать $\pi=3.141$, – то будем иметь приближенное число с недостатком. Если же запишем $\pi=3.142$, – то получим приближенное число с избытком.

При записи чисел приближенное число рекомендуется записывать, пользуясь сформулированным академиком А.Н. Крыловым следующим правилом: *приближенное число нужно писать так, чтобы все значащие цифры кроме последней были верными. Последняя цифра может быть сомнительной, при этом не более, чем на одну или две единицы.* Например, если в приближенном числе средней наработки системы до отказа 683511 *ч* сомнительной является третяя цифра, то это число должно быть записано как $684\cdot10^3 ч$. При данной записи произведено округление с избытком (первая из отбрасываемых цифр равна 5).

Пример I.5.1. Пусть известны значения вероятностей отказов двух устройств информационной техники: $Q_1(1)=0.0038$ и $Q_2(1)=0.114$. Эти числа записаны по приведенному выше правилу. Необходимо найти относительные погрешности этих чисел и указать, какое из чисел более точное.

Решение.

Начнем решение примера с обсуждения вопроса, почему две вероятности представлены разным количеством цифр после запятой, почему для уравнивания количества цифр во втором числе нельзя (или можно?) записать число 0.1140. Ответ: нельзя записать число 0.1140 вместо 0.114, поскольку сомнительной теперь уже будет последняя цифра 0, а не 4, как в исходной записи. Уравнять число допустимо путем округления первого числа до значения 0.004 (округление с избытком, т.к. первая отбрасываемая цифра 8 > 5).

Так как точные числа нам не известны, то следует считать, что абсолютные погрешности Δ_1 и Δ_2 не превосходят половины единицы их последнего разряда, т.е. $\Delta_1 = 0.00005$, $\Delta_2 = 0.0005$. Тогда относительные погрешности будут

$$\delta_1 = \frac{\Delta_1}{a_1} = \frac{0.00005}{0.0038} = 1.3\%\,;\ \delta_2 = \frac{\Delta_2}{a_2} = \frac{0.0005}{0.114} = 0.4\%$$

Таким образом, вторая вероятность определена с более высокой точностью, хотя абсолютная ее погрешность выше абсолютной погрешности первой вероятности. Заметим, что округление первого числа практически не повлияло на точность определения вероятности отказа устройства.

Следует подчеркнуть, что чем больше значащих цифр в приближенном числе, тем более точно оно определено.

Основные правила снижения погрешностей выполнения операций вычисления показателей надежности

Правило 1. При сложении чисел все слагаемые округляются до числа десятичных знаков на один больше, чем наименее точное число. После сложения чисел результат округляется до числа знаков наименее точного числа.

Абсолютная погрешность суммы равна сумме абсолютных погрешностей слагаемых $\Delta_\Sigma = \sum_1^n \Delta_i$, где n – число слагаемых.

Относительная погрешность суммы слагаемых одного знака (как это обычно имеет место в задачах расчета надежности) заключена между наименьшей и наибольшей относительной погрешностью слагаемых, т.е. $\delta_{\min} < \delta_\Sigma < \delta_{\max}$, поскольку

$$\delta_\Sigma = \frac{a_1\Delta_1 + a_2\Delta_2 + \ldots + a_n\Delta_n}{|\, a_1 + a_2 + \ldots + a_n \,|}.$$

Правило 2. При вычитании чисел их следует предварительно округлить до наименее точного числа.

Абсолютная погрешность разности чисел, также как и при сложении, равна сумме их абсолютных погрешностей. Однако относительная погрешность разности двух чисел определяется как

$$\delta_P = \frac{a_1\Delta_1 + a_2\Delta_2}{|\, a_1 - a_2 \,|}.$$

При близких значениях приближенных чисел a_1 *и* a_2 *относительная погрешность результата может быть сколь угодно большой.* Чтобы этого избежать следует либо увеличить точность приближенных чисел, либо вычислить разность с максимальной точностью.

Правило 3. При умножении (делении) приближенных чисел результат не может содержать значащих цифр больше, чем их имеет наименее точный сомножитель (делимое или делитель). Таким образом, при выполнении операций умножения или деления все числа следует округлить до числа знаков наименее точного числа (с наименьшим числом значащих цифр), оставляя дополнительно одну или две значащие цифры младшего разряда, которые при округлении результата должны быть отброшены.

Абсолютная погрешность произведения двух чисел определяется через их относительные погрешности, т.е.

$$\Delta(a_1 \cdot a_2) = |\, a_1 \cdot a_2 \,| \cdot \left(\frac{\Delta_1}{a_1} + \frac{\Delta_2}{a_2}\right).$$

Отсюда относительная погрешность произведения равна

$$\delta(a_1 \cdot a_2) = \frac{\Delta(a_1 \cdot a_2)}{|a_1 \cdot a_2|} = (\frac{\Delta_1}{a_1} + \frac{\Delta_2}{a_2}) = \delta_1 + \delta_2$$

При умножении двух величин складываются их относительные погрешности. Аналогичные рассуждения приводят к выводу о том, что ***при делении двух величин их относительные погрешности тоже складываются:***

$$\delta(\frac{a_1}{a_2}) = \frac{\Delta(\frac{a_1}{a_2})}{|\frac{a_1}{a_2}|} = (\frac{\Delta_1}{a_1} + \frac{\Delta_2}{a_2}) = \delta_1 + \delta_2 .$$

Правило 4. Для абсолютной и относительной погрешностей при вычислении функции $f(a)$ приняты следующие приближенные оценки:

$$\Delta f = \sum_i |\frac{\partial f}{\partial a_i}| \Delta a_i ; \ \delta f = \sum_i |\frac{\partial}{\partial a_i} \ln(f)| \Delta a_i$$

где Δa_{i} _ абсолютные погрешности аргументов.

Так, при вычислении функции $f(a) = e^a$ находим

$$\Delta f = e^a \Delta a \quad \delta f = \frac{d}{da} \ln(e^a) \Delta a = \Delta a$$

При вычислении квадратного корня находим

$$\Delta(\sqrt{a}) = \frac{1}{2\sqrt{a}} \Delta a ; \delta(\sqrt{a}) = \frac{d}{da} \ln(\sqrt{a}) \Delta a = \frac{1}{2} \delta a .$$

Не вызывает сомнения, что при массовых вычислениях никто не занимается точной оценкой погрешностей. Тем не менее, для ручного счета ориентация на наименее точные исходные данные и использование не более 1-2 лишних значащих цифр избавляет от лишней и бесполезной работы. При машинном счете учет этого требования нереален (по крайней мере, обеспечение этого требования обойдется дороже, чем излишество в количестве используемых цифр), но и здесь нужно исключать случаи вычитания близких приближенных чисел и, тем более, деления на числа, близкие к нулю, во избежание гигантской погрешности. Наличие в выходных результатах большого количества значащих цифр не должно создавать иллюзии относительно высокой точности вычислений. Как практические работники, так исследователи, иногда забывают главное правило вычислений с приближенными числами: ***точность выходных результатов не может быть выше точности входных данных.***

I.5.3. Прогнозирование надежности

I.5.3.1. Назначение прогнозирования надежности

Прогнозирование – это оценка возможного (предполагаемого) уровня надежности проектируемой системы. Прогнозирование основывается на моделировании надежности с помощью известных методов (марковских, полумарковских методов, имитационного моделирования, структурного метода, логико – вероятностного метода, метода дерева отказов и др.). Выбор того или иного метода обычно определяется следующими основными факторами: требованиями заказчика, наличием подготовленных исполнителей, достаточностью (или не достаточностью) финансирования, временными ресурсами.

Стратегия прогнозирования надежности зависит от класса информационной системы. ИС с точки зрения подходов к их прогнозированию условно можно разделить на три класса: 1) развивающаяся система, 2) проектируемая типовая система, 3) новая система.

Прогнозирование надежности развивающейся системы по существу сводится к тому, что за основу берутся результаты испытаний и эксплуатации этой системы и/или подобных систем. Эти результаты дополняются материалами моделирования надежности тех компонентов или отдельных подсистем, которые подлежат модификации. Проектируемая типовая система обычно компонуется из типовых составляющих или даже подсистем, таких как процессоры, интерфейсные устройства, дисковая память и т.п. Данные о надежности типовых составляющих и подсистем имеются в достаточном количестве. Они объединяются с помощью согласованных с заказчиком моделей. Наконец разработка новой информационной системы – это редкая задача, которая решается в рамках создания новой прорывной технологии или при создании критически важной системы управления. Наиболее типичными являются вопросы прогнозирования надежности первых двух классов систем.

Прогнозирование надежности системы осуществляется, главным образом, путем моделирования изменения ее показателей безотказности и готовности в зависимости от архитектуры системы, входных данных, условий эксплуатации, критерия отказа. Это позволяет на этапе проектирования выбрать наиболее рациональный вариант будущей системы по критерию надежность – стоимость, ответить на вопрос о принципиальной возможности построить требуемую систему с приемлемым уровнем надежности с учетом конкретных условий ее эксплуатации.

При рассмотрении перечисленных задач прогнозирования надежности систем предполагалось, что имеет место повторяемость интенсивностей отказов компонентов информационных систем. В последние годы предмет повторяемости интенсивностей отказов компонентов стал спорным. Теперь общепризнанна предельно широкая изменчивость интенсивностей отказов, характеризующих якобы идентичные компоненты и функционирующих в примерно равных рабочих условиях и примерно идентичных условиях окружающей среды. Поэтому кажущаяся точность прогнозирования показателей надежности системы оказывается не совместимой с точностью показателей интенсивности отказов. Отсюда можно сделать вывод, что применения простых моделей и упрощенных оценок показателей при прогнозировании надежности систем достаточно. В любом случае более точные прогнозы могут вести как к заблуждению, так и к потере денег.

Доверительные пределы прогнозирования

При прогнозировании принято использовать исходные данные, которые относятся к одной из следующих трех категорий:

1. Данные, полученные на конкретном предприятии или компании. Эти данные собраны на похожем оборудовании, в очень близких условиях, когда окружающая среда, режимы функционирования, стратегия обслуживания, наконец, специалисты практически одинаковы. Эти исходные данные в значительной мере зависят от результатов деятельности одной и той же или близкой по преемственности проектной команды.

2. Данные, полученные для конкретной отрасли промышленности. В основном это справочные данные, сформированные научно – исследовательскими институтами, специализированными организациями в области электроники и информационной техники, которые обобщают опыт проектирования, производства и эксплуатации этой техники.

3. Общие данные – это базы данных, сформированные из различных источников информации, включающие как данные отдельных отечественных предприятий, научно – исследовательских институтов, так и данные зарубежных компаний – разработчиков информационной техники, а также компаний, специализирующихся на исследованиях в области надежности.

В работе [14] рассчитаны отношения между прогнозируемым и реальным (эксплуатационным) значениями показателей безотказности и готовности систем. Эти расчеты характеризуют граничные интервалы прогнозирования. Автор интерпретировал показатели безотказности системы через интенсивность отказов. При этом предполагалась достаточность применения простых моделей и упрощенных оценок показателей при прогнозировании надежности систем. Фактически автором принята предпосылка об экспоненциальном законе распределения отказов информационной системы и высоком уровне ее структурной надежности. Это означает, что надо иметь ввиду следующие соотношения: $Q_C(t) \approx \Lambda_C t$ и $\Lambda_C \approx {}^{1}\!/_{T_0}$. Кроме того, приведенные ниже коэффициенты пригодны и для пересчета коэффициента неготовности системы. Конечные результаты исследования представляют большой практический интерес. Они сведены в табл. I.5.3.

Приведенные в таблице данные свидетельствуют о том, что данные, собранные на предприятии (категория 1) наиболее надежны. Они позволяют прогнозировать надежность систем с точностью, которая более, чем в 2 раза выше, чем точность прогноза, полученная с помощью общих данных. Так, при первой категории данных двусторонняя оценка реальной интенсивности отказов системы составляет: нижняя ($R_{1\max}$) – *3.5:1* и верхняя ($R_{1\min}$) – *0.3:1* . Тогда как при третьей категории данных: нижняя оценка ($R_{3\max}$) – *8:1* и верхняя оценка ($R_{3\min}$) – *0.1:1.*

На практике разработку информационных систем во многих случаях выполняет системный интегратор. Перед ним обычно стоит задача построить систему с заданными возможностями из типовых компонентов. При прогнозировании надежности системный интегратор вынужден пользоваться смешанными источниками данных, полученными как от предприятий – разработ-

Таблица I.5.3

Категория данных	**Можно доверять результатам прогноза с уровнем доверия (%)**	**Реальная интенсивность отказа системы будет меньше, чем прогнозируемая, увеличенная в:**
1	95	3.5 раза
1	90	2.5 раза
1	60	1.5 раза
1 – Двухсторонняя оценка	Можно доверять с вероятностью 90%	Что реальная интенсивность отказов будет лежать в диапазоне: от 3.5:1 до 0.3:1
2	95	5 раз
2	90	2.5 раза
2	60	1.5 раза
2 – Двухсторонняя оценка	Можно доверять с вероятностью 90%	Что реальная интенсивность отказов будет лежать в диапазоне: от 5:1 до 0.2:1
3	95	8 раз
3	90	6 раз
3	60	3 раз
3 – Двухсторонняя оценка	Можно доверять с вероятностью 90%	Что реальная интенсивность отказов будет лежать в диапазоне: от 8:1 до 0.1:1

чиков отдельных компонентов, так и данными категорий 2 и 3. В таких случаях доверительный диапазон можно оценить следующим образом. Обозначим символами $K_{j\max}$ и $K_{j\min}$ (j=1,2,3) коэффициенты пересчета соответственно для нижней и верхней оценки интенсивности отказов системы применительно к каждой из трех категорий данных. Тогда граничные оценки результатов прогноза при смешанных источниках данных определяются по следующим формулам:

$$R_{\max} = \frac{\sum_{j=1}^{3}\sum_{i}\Lambda_{ij}R_{j\max}}{\sum_{j=1}^{3}\sum_{i}\Lambda_{ij}}; \; R_{\min} = \frac{\sum_{j=1}^{3}\sum_{i}\Lambda_{ij}R_{j\min}}{\sum_{j=1}^{3}\sum_{i}\Lambda_{ij}}$$

Например, при проектировании системы использованы исходные данные категории 1, вклад которых в суммарную интенсивность отказа составляет $50\cdot10^{-6}$ 1/ч, и данные категории 3, которые характеризуются суммарной интенсивностью отказа $90\cdot10^{-6}$ 1/ч. В этом примере доверительный диапазон составляет

$$R_{\max} = \frac{(50\times3.5)+(90\times8)}{140} = 6.4:1\,.$$

$$R_{\textit{тшт}} = \frac{(50\times0.3)+(90\times0.1)}{140} = 0.2:1.$$

В заключение отметим, что прогнозирование надежности, основанное на манипуляциях с данными об интенсивностях отказов, затрагивает так много возможных параметров, что правильная воспроизводимая модель для оценки интенсивности отказов становится невозможной. Следовательно, интенсивность отказов является наименее точным техническим параметром, и прогнозирование по прошлым данным целесообразно проводить только со следующими целями:

• Для сравнения вариантов обеспечения надежности системы и оценки целесообразности принятия того или иного инженерного решения по достижению приемлемого уровня надежности;

• Для оценки приблизительного уровня надежности, достижимого для данного проекта при росте надежности в отрасли;

• Для оценки принципиальной возможности выполнения требований заказчика по надежности;

• Для выполнениия требований контракта.

Интенсивность отказов не следует рассматривать как точный показатель будущей надежности системы в условиях эксплуатации.

I.5.4. Статистические оценки показателей структурной надежности

I.5.4.1. Введение

Для оценки надежности по статистическим данным необходима большая работа по правильному и объективному сбору этих данных. В работе [38] обобщен опыт организации испытаний на надежность изделий радиоэлектронной техники, опыт обеспечения полноты и достоверности исходных данных. Расчет надежности может проводиться либо в процессе испытаний на надежность, либо на основе опыта эксплуатации.

Особенностью оценки надежности по статистическим данным является ограниченность статистического материала, которого недостаточно для точного определения показателей надежности. Приближенное случайное значение показателя называется оценкой показателя.

К оценке $\hat{R}$ показателя R предъявляется ряд требований, которым она должна удовлетворять.

Оценка $\hat{R}$ должна при увеличении числа опытов приближаться к показателю R. Оценка, обладающая таким свойством, называется состоятельной.

Оценка $\hat{R}$ не должна иметь *систематической ошибки*. (Систематической ошибкой называют неслучайную ошибку, искажающую результаты измерений в одну определенную сторону).

Например, часы спешат на несколько минут. Измерение времени этими часами систематически (постоянно) дает завышенные результаты.

Математическое ожидание оценки должно быть равно истинному значению параметра R. $M[\hat{R}] = R$. Оценка, удовлетворяющая этому свойству, называется *несмещенной*.

Выбранная несмещенная оценка должна, по сравнению с другими, иметь наименьшую дисперсию $D(\hat{R}) = \min$.

Оценка, обладающая такими свойствами, называется *эффективной*.

Точечной называется оценка, определяемая одним числом.

При небольшом объеме опытов следует пользоваться интервальными оценками. Интервальной называют оценку, которая определяется двумя числами – концами интервала.

Доверительным называют интервал $(\hat{R} - \varepsilon,\ \hat{R} + \varepsilon)$, который накрывает неизвестный параметр $\hat{R}$ с заданной вероятностью β; $\pm\varepsilon$ – ошибка при замене параметра R оценкой $\hat{R}$. *Доверительной вероятностью* называют вероятность того, что некоторый интервал возможных значений $\hat{R}$ (доверительный интервал) накроет истинное значение величины R. Доверительные границы – это границы интервала возможных значений оцениваемого параметра.

I.5.4.2. Статистические оценки единичных показателей

– *Вероятность безотказной работы*

$$\hat{P}(t) = \frac{N_0 - n(t)}{N_0},$$

где N_0 – число объектов, поставленных на испытание или на эксплуатацию без восстановления или замены, $n(t)$ – число объектов из общего числа N_0 отказавших в течение времени t и не подлежащих замене.

– *Вероятность восстановления*

$$\hat{G}(t)=\frac{N_B}{N_{0B}},$$

где N_{0B} – число объектов, поставленных на испытания с восстановлением, N_B – число объектов, время восстановления которых было меньше заданного времени *t*.

– *Частота отказов*

$$\hat{a}(t)=\frac{n(\Delta t)}{N_0\Delta t},$$

где Δt – длительность отрезка времени, на которые разделяется интервал наблюдения *t*, $n(\Delta t)$ – число отказавших объектов в интервале времени от $(t-\Delta t/2)$ до $(t+\Delta t/2)$ при условии отсутствия их замены.

– *Частота восстановления*

$$\hat{a}_B(t)=\frac{n_B(\Delta t)}{N_{0B}\Delta t},$$

где $n_B(\Delta t)$ – число восстановленных объектов в интервале времени от $(t-\Delta t/2)$ до $(t+\Delta t/2)$.

– *Параметр потока отказов*

$$\hat{\omega}(t)=\frac{n_1(\Delta t)}{N_0\Delta t},$$

где $n_1(\Delta t)$ – число отказавших объектов в интервале времени от $(t-\Delta t/2)$ до $(t+\Delta t/2)$, при условии, что отказавший объект немедленно заменяется новым.

– *Интенсивность отказов*

$$\hat{\lambda}(t) = \frac{n(\Delta t)}{N_{CP}\Delta t},$$

где $N_{CP} = {(N_{i-1} + N_i)}\big/{2}$ – среднее число объектов, исправно работающих в i-м интервале времени Δt.

– *Интенсивность восстановления*

$$\hat{\mu}(t) = \frac{n_B(\Delta t)}{\overline{N}_B\Delta t},$$

где $\overline{N}_B$ – число объектов, которые не были восстановлены в интервале времени *(0, t)*.

– *Средняя наработка до отказа*

$$\hat{T}_{CP} = \frac{\sum_{i=1}^{N_0} t_i}{N_0},$$

где t_i – время безотказной работы i – го объекта из общего числа N_0 объектов, поставленных на испытания или эксплуатацию.

– *Средняя наработка на отказ*

$$\hat{T}_0 = \frac{\sum_{j=1}^{N_0}\sum_{i=1}^{m_j} t_{ij}}{\sum_{j=1}^{N_0} m_j},$$

где m_j – количество интервалов безотказной работы j-го объекта из состава общего числа N_0 объектов, поставленных на испытания или эксплуатацию, t_{ij} – i-ый случайный интервал времени безотказной работы j-го объекта.

Применительно к отдельному объекту приведенная оценка упрощается к виду

$$\hat{T}_0 = \frac{\sum_{i=1}^{m} t_i}{m},$$

– *Среднее время до восстановления*

$$\hat{T}_B = \frac{\sum_{j=1}^{N_{0B}} \sum_{i=1}^{m_B} \tau_{ij}}{\sum_{j=1}^{N_{0B}} m_B},$$

где m_{jB} – количество восстановлений *j*-го объекта из состава общего числа N_{0B} объектов, поставленных на восстановление, τ_{ij} – длительность *i*-го восстановления *j*-го объекта.

Применительно к отдельному объекту статистическая оценка времени до восстановления имеет следующий вид:

$$\hat{T}_B = \frac{\sum_{i=1}^{m_B} \tau_i}{m_B}.$$

I.5.4.3. Статистические оценки комплексных показателей надежности

– *Функция готовности (нестационарный коэффициент готовности)*

$$\hat{K}_Г(t) = \frac{N_t}{N_0},$$

где N_0 – общее число объектов, поставленных на испытания или эксплуатацию, N_t – число объектов, находящихся в исправном состоянии в момент времени t .

– *Коэффициент готовности*

$$\hat{K}_Г = \frac{\sum_{i=1}^{m} t_i}{\sum_{i=1}^{m} t_i + \sum_{i=1}^{m} \tau_i},$$

где m – число отказов объекта (при оценке этого показателя имеется в виду, что количество отказов и восстановлений одинаково) в течение достаточно большого времени наблюдения.

– *коэффициент неготовности (коэффициент простоя)*

$$\hat{K}_{НГ} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \tau_i}{\sum_{i=1}^{m} t_i + \sum_{i=1}^{m} \tau_i},$$

– *нестационарный коэффициент оперативной готовности*

$$\hat{K}_{ОГ}(t, \tau_З) = \frac{N_{tЗ}(\tau\ )}{N_0},$$

где $N_{tЗ}(\tau)$ – число объектов, исправных в момент времени t и безотказно проработавших в течение времени решения задачи $\tau_З$.

– *стационарный коэффициент оперативной готовности*

$$\hat{K}_{ОГ}(\tau_З) = \frac{N_\infty(\tau_З)}{N_0},$$

где $N_\infty(\tau_З)$ – число объектов, исправных в произвольный достаточно удаленный от начала отсчета момент времени t и безотказно проработавших в течение времени решения задачи $\tau_З$.

I.5.4.4. Доверительные интервалы оценок показателей надежности

Показатели надежности, измеряемые с помощью статистических данных, сами по себе являются случайными величинами, которые могут принимать множество значений. Эти значения концентрируются вокруг истинного значения показателя. Это истинное значение никому никогда не известно. Оценки истинного значения могут существенно отличаться в зависимости от объема измерений (опытных данных). Чем меньше опытных данных, тем больше разброс оценок и тем шире должны быть границы интервальной оценки показателя надежности, при условии заданной доверительной вероятности. Кроме объема измерений на результаты оценки интервальных границ существенное влияние оказывает правильный выбор возможного закона распределения оценки отклонения показателя надежности от истинного значения. Для определения доверительного интервала случайной величины, распределенной по симметричному закону, близкому к нормальному, используется распределение Стьюдента. При несимметричном законе применяют распределение Пирсона или распределение χ^2.

Доверительные интервалы при нормальном законе распределения оцениваемой случайной величины.

Пусть случайная величина отклонения оценки показателя надежности от истинного значения ΔR распределена по нормальному закону (закону Гаусса) с неизвестными истинными значениями математического ожидания M и среднеквадратичного отклонения σ. Определим вероятность неравенства

$$P\left(\left|\hat{M} - M\right| < \varepsilon\right) = \beta,$$

где $\hat{M}$ – оценка математического ожидания; β – доверительная вероятность; ε – ошибка от замены M оценкой $\hat{M}$.

Параметры M и σ распределения случайной величины ΔR неизвестны, поэтому решить приведенное выше уравнение невозможно.

Поделим обе части неравенства $\left|\hat{M} - M\right| < \varepsilon$ на $\hat{\sigma}$,

где $\hat{\sigma} = \sqrt{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \hat{M})^2}{n \cdot (n-1)}} = \sqrt{\dfrac{\hat{D}}{n}}$ – исправленное среднеквадратическое отклонение, определяемое из опытных данных; $\hat{D}$ – статистическая дисперсия; n – число опытов.

Получим:

$$P\left(\frac{\left|\hat{M} - M\right|}{\hat{\sigma}} < \frac{\varepsilon}{\hat{\sigma}}\right) = \beta,$$

или

$$P\left(\left|G\right| < \frac{\varepsilon}{\hat{\sigma}}\right) = \beta,$$

$$\frac{\varepsilon}{\hat{\sigma}} = t_\beta, \quad P(\left|G\right| < t_\beta) = \beta.$$

Случайная величина G подчиняется распределению Стьюдента. Распределение Стьюдента зависит от числа опытов или, что то же самое, от числа степеней свободы $r = n - 1$, где n – число опытов.

Величина t_β, называется квантилем распределения Стьюдента.

Квантилем, отвечающим заданному уровню вероятности β, называют такое значение $x = x_p$, при котором функция принимает значение, равное β, т. е.

$$P(x_p) = \beta.$$

Квантиль t_β находим из таблицы распределения Стьюдента, в зависимости от доверительной вероятности и числа степеней свободы $r = n - 1$.

Величина ε, равная половине длины доверительного интервала, определится по формуле

$$\varepsilon = t_\beta \cdot \hat{\sigma}.$$

Доверительные интервалы для оценок параметров рассчитываются следующим образом.

1. Задают доверительную вероятность $P(\varepsilon) = \beta$. Обычно β = 0,8; 0,9; 0,95; 0,99.

2. Определяют число степеней свободы $r = n - 1$, где n – число опытов или наблюдений.

3. Из таблицы распределения Стьюдента по заданным значениям r и β находят квантиль t_β.

4. Из опытных данных определяют откорректированное среднеквадратическое отклонение:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (R_i - \hat{M})^2}{n \cdot (n-1)}} = \sqrt{\frac{\hat{D}}{n}}, \text{ где } \hat{M} = \frac{\sum_{i=1}^{n} R_i}{n}.$$

5. Половину длины доверительного интервала определяют по формуле:

$$\varepsilon = t_{\beta} \hat{\sigma}.$$

6. Доверительный интервал:

$$I_{\varepsilon} = \hat{M} \pm \varepsilon.$$

Доверительные интервалы при экспоненциальном законе распределения оцениваемой случайной величины.

Экспоненциальное распределение относится к классу несимметричных распределений (функция плотности этого распределения изменяется от величины, равной значению параметра распределения, – например λ (при $t = 0$), до сколь угодно малого значения (при $t \to \infty$)). Распределение χ^2 зависит от одного параметра *r*, называемого числом степеней свободы.

Составлены специальные таблицы распределения χ^2, пользуясь которыми, можно по заданной доверительной вероятности $p(\varepsilon)$ и числу степеней свободы *r* найти значение квантиля распределения χ^2 [32].

При экспоненциальном законе распределения отказов оценки параметров

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{t_{\Sigma}}, \quad \hat{T}_{CP} = \frac{1}{\bar{\lambda}} = \frac{t_{\Sigma}}{n},$$

где n – число отказов в интервале времени t_{Σ}; t_{Σ} – суммарная наработка.

Для невосстанавливаемых элементов (объектов)

$$t_{\Sigma} = \sum_{i=1}^{n} t_i + (N - n) \cdot t_u,$$

где t_i – время исправной работы *i*-го отказавшего элемента (объекта); N – количество объектов; t_u – время испытаний; n – число отказавших объектов.

В случае, когда испытания проводятся до тех пор, пока не откажут все выставленные на испытания объекты, суммарная наработка

$$t_\Sigma = \sum_{i=1}^{N} t_i.$$

Для восстанавливаемых объектов

$$t_\Sigma = N \cdot t_u,$$

где t_u – длительность испытаний.

Доверительный интервал для интенсивности отказов в этом случае находят с помощью таблицы χ^2, в которой параметрами являются доверительная вероятность $p(\varepsilon)$ и число степеней свободы r.

Нижняя λ_H и верхняя λ_B границы интенсивностей отказов:

$$\lambda_H = \frac{\overline{\lambda}}{r_1}, \text{ где } r_1 = \frac{2n}{\chi^2\left[p(\varepsilon), 2n\right]}.$$

$$\lambda_B = \frac{\overline{\lambda}}{r_2}, \text{ где } r_2 = \frac{2n}{\chi^2\left[1 - p(\varepsilon), 2n\right]}.$$

В формулах: χ^2 – квантили распределения x^2 при числе степеней свободы $r = 2 \cdot n$; r_1, r_2 – коэффициенты.

Пример I.5.2. На испытания поставлены $N = 500$ больших интегральных схем (БИС). Предположим, что за время $t = 200000$ часов отказало $n = 20$ БИС. За последующий отрезок времени $\Delta t = 10000$ часов отказало еще $\Delta n = 2$ БИС. Требуется оценить вероятность безотказной работы в течение 200000, 210000 часов, а также интенсивность отказов.

Решение.

$$\hat{P}(200000)=\frac{500-20}{500}=0,96.$$

$$\hat{P}(210000)=\frac{500-22}{500}=0,96.$$

$$\hat{\lambda}=\frac{\Delta n}{N_{cp}\Delta t}=\frac{2}{\left(\frac{22+2}{2}\right)\cdot 10000}=3\cdot 10^{-6}\,\frac{1}{ч}.$$

Пример I.5.3. При экспоненциальном законе распределения отказов и в результате испытаний n = 10 типовых элементов замены (ТЭЗ) до выхода их из строя получены следующие значения наработки в часах:

T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}
30	50	35	85	100	150	250	300	400	600

Требуется определить оценку интенсивности отказов $\hat{\lambda}$, верхнюю и нижнюю доверительные границы λ при доверительной вероятности $p(\varepsilon)=0,95$. Требуется найти оценку средней наработки до отказа $\hat{T}_{CP}$

Решение.

$$1.\ t_{\Sigma}=\sum_{i=1}^{10}T_i=2\,000\ \text{ч}.$$

$$\hat{\lambda}=\frac{n}{t_{\Sigma}}=\frac{10}{2000}=5\cdot 10^{-3}\,\frac{1}{ч}.$$

1. По таблице распределений χ^2 для $r = 2 \cdot n = 2 \cdot 10 = 20$ и $p(\varepsilon) = 0,95$ определим

$$\chi^2 \left[p(\varepsilon), 2n\right] = \chi^2 \left[0,95; 20\right] = 10.85;$$

$$\chi^2 \left[1 - p(\varepsilon), 2n\right] = \chi^2 \left[1 - 0,95; 20\right] = 31.4;$$

и найдем по формулам:

$$r_1 = \frac{2 \cdot n}{\chi^2[p(\varepsilon) \cdot 2 \cdot n]} = \frac{20}{10,85} = 1,84;$$

$$\hat{\lambda}_H = \frac{\hat{\lambda}}{r_1} = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{1,84} = 2,7 \cdot 10^{-3} \ {}^1\!/\!_{ч};$$

$$r_2 = \frac{2 \cdot n}{\chi^2[1 - p(\varepsilon) \cdot 2 \cdot n]} = \frac{20}{31,4} = 0,63;$$

$$\hat{\lambda}_B = \frac{\hat{\lambda}}{r_2} = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{0,63} = 7,8 \cdot 10^{-3} \ {}^1\!/\!_{ч};$$

3. $\hat{T} = \dfrac{1}{\hat{\lambda}} = \dfrac{1}{5 \cdot 10^{-3}} = 200$ ч.

Контрольные вопросы

1. Перечислите и поясните основные идеи структурного метода надежности.

2. Какие основные факторы влияют на интенсивность отказов систем с последовательным соединением составных элементов?

3. Каким образом рассчитывают комплексные показатели надежности восстанавливаемых систем с основным соединением независимых элементов?

4. В чем достоинство параллельного соединения элементов перед последовательным соединением?

5. Перечислите причины погрешностей в результатах расчетов надежности систем.

6. Какой способ – среднеарифметический или среднегеометрический предпочтительнее при оценке исходных данных?

7. Дайте определение абсолютной и относительной погрешности вычислений.

8. Приведите правила снижения погрешности вычисления показателей надежности.

9. Какие данные (общие, отраслевые, предприятия) предпочтительнее для прогнозирования показателей надежности?

10. Какие требования предъявляются к статистической оценке показателей надежности?

11. В чем суть интервальной оценки показателей надежности?

12. Какое содержание вкладывается в понятие «доверительная вероятность»?

13. С помощью какого рапределения случайной величины отклонения параметра от истинного значения находят доверительный интервал, если случайный оцениваемый параметр описывается нормальным законом распределения?

14. С помощью какого рапределения случайной величины отклонения параметра от истинного значения находят доверительный интервал, если случайный оцениваемый параметр описывается экспоненциальным законом распределения?

Заключение

Информационные системы применяются для решения широкого спектра научных и производственных задач – от традиционных задач сбора, обработки, накопления и хранения информации, от решения задач искусственного интеллекта до управления ответственными объектами в реальном масштабе времени. Эти задачи имеют актуальное значение в жизни современного общества. Отсюда высокий уровень требований, предъявляемых к надежности информационных систем.

Прежде всего, необходимо выполнять предусмотренные функции в реальных условиях работы и технического обслуживания. Эта способность обеспечивается совокупностью свойств, таких как безотказность, готовность, ремонтопригодность, долговечность и сохраняемость или определенными сочетаниями этих свойств. В книге представлена система показателей безотказности, готовности и ремонтопригодности применительно к информационным системам в трактовках как российских, так и зарубежных стандартов. Приведены также определения и формульные выражения комплексных показателей структурной надежности информационных систем, таких как коэффициенты оперативной готовности и, особенно, сохранения эффективности. В целом следует подчеркнуть, что структурная надежность есть ни что иное, как классическая надежность, в рамках которой решались и в настоящее время решаются задачи обеспечения надежного фундамента для функционирования систем.

Математические методы построения и решения моделей надежности информационных систем хорошо развиты. Для расчетов структурной надежности сетей передачи данных широко применяются логико – вероятностные методы. Надежность вычислительных комплексов, как правило, моделируется с помощью Марковских случайных процессов. Разработаны методы расчета, основанные на решении интегральных и интегро-дифференциальных уравнений и др.

В данной работе отдано предпочтение Марковским и полумарковским моделям надежности. Это обусловлено рядом причин:

– информационные системы за редким исключением относятся к классу восстанавливаемых систем, для которых накоплен большой опыт построения и решения Марковских моделей;

– многие потоки отказов в информационных системах описываются моделью Пуассона и, следовательно, экспоненциальным законом распределения отказов, что является необходимым условием для применения непрерывных Марковских случайных процессов в решении задач надежности;

– у автора книги большой опыт применения Марковских и полумарковских моделей надежности информационных систем.

Именно последнее обстоятельство позволило автору разработать графовые Марковские и полумарковские методы расчета надежности сложных информационных систем (см. главу I.4), которые обеспечивают решение задачи надежности значительно большей размерности по сравнению с ранее известными методами. Графовые полумарковские и, в частности, Марковские методы позволяют строго или с допустимой погрешностью строить и решать модели исследуемых и проектируемых объектов информационных систем. Они предназначены для детального анализа влияния составляющих факторов на надежность информационных систем и выбора наиболее приемлемого варианта построения объектов и систем в целом. Вместе с тем, чтобы без проблем пользоваться этими методами нужна определенная подготовка в области теории вероятности и случайных процессов. Для широкого круга практических работников в области информационных технологий, которые глубоко знают свою предметную область и свободно оперируют в ней, часто возникают трудности в применении этих и других известных математических методов углубленного анализа надежности систем. Поэтому для удобства практической работы широкого круга специалистов в теории надежности разработан ряд стандартных методов, основные которые приведены в главе I.5. Стандартные методы позволяют ориентироваться в том, какой уровень надежности соответствует эксплуатируемой системе в текущем интервале наблюдения и позволяют прогнозировать тенденцию изменения надежности в зависимости от планируемых мероприятий в течение жизненного цикла системы. Как правило, эти методы основываются на ряде допущений и на численных расчетах.

Численное решение задач расчета надежности систем не может быть выполнено абсолютно точно. Одна из основных причин – неточность исходных данных. Для информационных систем интенсивность отказов составных элементов и устройств существенно зависит от: 1) окружающих условий эксплуатации, 2) от корректности и качества разработки и изготовления, 3) от функциональной плотности средств информационной техники. Ширина диапазона данных во многих случаях превышает значение 10:1. Нельзя также забывать о погрешности вычислений при расчетах надежности. Наличие в выходных результатах большого количества значащих цифр не должно создавать иллюзии относительно высокой точности вычислений. Как практические работники, так и исследователи, иногда забывают главное правило вычислений с приближенными числами: точность выходных результатов не может быть выше точности входных данных. Погрешность расчетов надежности также зависит и от точности прогнозирования. Кажущаяся точность прогнозирования показателей надежности системы часто оказывается не совместимой с точностью определения интенсивности отказов. Отсюда можно сделать вывод, что при прогнозировании надежности систем достаточно применение простых моделей и упрощенных оценок. В любом случае более точные прогнозы могут вести как к заблуждению, так и к потере денег.

Ранее нами отмечалось, что структурная надежность есть классическая надежность, в рамках которой решались и в настоящее время решаются задачи обеспечения надежного фундамента для функционирования систем. Развитие теории и практики структурной надежности отразилось в ряде международных стандартов, в частности в [7], [12] и др. В этих и других нормативных документах сделан акцент на анализ и обеспечение надежности технических систем на всех этапах жизненного цикла на основе оценки рисков. Применительно к информационным системам предстоит решить задачи управления надежностью информационной техники на всех этапах жизненного цикла, задания технических требований на основе оценок риска; организации технического проектирования, внедрения, испытаний, технического обслуживания, модификации, организации эксплуатации и утилизации также на основе результатов оценки риска.

Литература

1. Федеральный Закон №149 – ФЗ от 27.07.2006г. «Об информации, информационных технологиях и о защите информации»;

2. Мишарин А.С., Шубинский И.Б. Функциональная надежность информационно – управляющих систем на федеральном железнодорожном транспорте //Известия академии наук. Теория и системы управления, 2004, №1, с. 155 – 162.

3. Теория систем и методы системного анализа в управлении и связи/В.Н.Волкова, В.А.Воронков, А.А.Денисов и др. – М.: Радио и связь, 1983. – 248с.

4. Методические рекомендации по оценке надежности и эффективности систем «человек – техника» /Под ред. А.И.Губинского. – Л.:ЦНИИТЭИ легкой промышленности, 1971.

5. Резиновский А.Я. Испытания на надежность радиоэлектронных комплексов.- М.: Радио и связь, 1985, 168с.

6. Липаев В.В. Надежность программного обеспечения АСУ. – М.: Энергоиздат, 1989. 240с.

7. IEC 62278 (2002). Railway applications. Specification and demonstration of reliability, availability, maintainability and safety (RAMS).

8. ГОСТ 27.002 – 89. Надежность в технике. Основные понятия. Термины и определения.

9. МЭК 60050 (191): 1990-12. Надежность и качество услуг.

10. ГОСТ 18322 – 78 (СТ СЭВ 5151 – 85). Система технического обслуживания и ремонта техники. Термины и определения.

11. Villemeur Alain. Reliability, Availability, Maintainability and Assessment (Volume 1. Methods and Techniques) – John Wiley&Sons, 1992, 367 p.

12. CENELEC EN 50126: Railway Applications – The Specification and Demonstration of Reliability, Availability, Maintainability and Safety (RAMS). 1998.

13. ГОСТ Р / МЭК 61508. Функциональная безопасность электрических /электронных/ программируемых электронных систем безопасности. – 2008.

14. Смит Д.Дж. Безотказность, ремонтопригодность и риск. Практические методы для инженеров, включая вопросы оптимизации надежности и систем, связанных с безопасностью / Д.Дж. Смит; [пер.с англ. Хвилевицкого Л.О.] – М.:ООО «Группа ИДТ», 2007. – 432с.

15. Ушаков И.А. Задачи расчета надежности . – М.: Знание, 1981, 96 с.

16. Глазунов Л. П., Грабовецкий В.П., Щербаков О.В. Основы теории надежности автоматических систем управления: Учебное пособие для вузов. – Л.: Энергоатомиздат, Ленингр. Отд. – ние, 1984, 208 с.

17. Ушаков И.А. Эффективность функционирования сложных систем //В кн.: О надежности сложных технических систем. – М.: Сов. Радио, 1966.

18. Дзиркал Э.В. Задание и проверка требований к надежности сложных изделий. – М.: Радио и связь, 1981, 176 с.

19. Романовский В.И. Дискретные цепи Маркова. – М.:- Л.: Гостехиздат, 1949. – 436 с.

20. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. Математические методы в теории надежности. – М.: Наука, 1965. – 524 с.

21. Барлоу Р., Прошан Ф. Математическая теория надежности. – М.: Сов.радио, 1969, 328 с.

22. ГОСТ Р 51901.15 – 2005 (МЭК 61165:1995). Менеджмент риска. Применение марковских методов.

23. Гапанович В.А., Розенберг Е.Н., Шубинский И.Б. Модель надежности восстанавливаемого технического устройства с учетом простоев в работе //Надежность, №2, 2010, С.11-19.

24. Козлов Б.А., Ушаков И.А. Справочник по расчету надежности аппаратуры радиоэлектроники и автоматики.- М.:Сов. Радио, 1975.-472 с.

25. Райншке К., Ушаков И.А. Оценка надежности систем с использованием графов/Под ред. И.А.Ушакова.- М.:Радио и связь, 1988.-209 с.

26. Шубинский И.Б., Розенберг Е.Н. Надежность восстанавливаемых контролируемых технических устройств// Сб.науч.тр. – М.: ВНИИУП МПС России, 2002. – Вып.1. – С.157-167.

27. Путинцев Н.Д. Аппаратный контроль управляющих цифровых вычислительных машин. М.: Сов. радио, 1966. – 157 с.

28. Королюк В.С., Турбин А.Ф. Полумарковские процессы и их приложения. – Киев: Наукова думка, 1976, 179 с.

29. Шубинский И. Б. Основы анализа сложных систем. – Ленинград, Пушкин, МО, 1988.-206 с.

30. Шубинский И.Б. Топологический метод и алгоритм определения стационарных показателей надежности технических систем. – М.: Надежность и контроль качества, 1984.-№5.-С.3.

31. Шубинский И.Б. Топологический метод расчета надежности сложных технических систем: Справочник / Под ред. Ушакова И.А.- М.:Радио и связь, 1985.-С.490-495.

32. Шубинский И.Б., Розенберг Е.Н., Графовый полумарковский метод моментов расчета функциональной безопасности систем железнодорожной автоматики и связи// Сб.науч.тр. – М.: ВНИИУП МПС России, 2002. – Вып.1. – С.79-86.

33. Шубинский И.Б., Розенберг Е.Н. Методы и модели анализа функциональной безопасности технических систем. – М.: ВНИИАС, 2004., 220 с.

34. Стойкова Л.С. Оценки некоторых функционалов, характеризующих надежность//Кибернетика, 1978.-№4.-С.113-119.

35. ГОСТ Р 51901.14 – 2005 (МЭК 61078:1991). Менеджмент риска. Метод структурной схемы надежности.

36. Лонгботтом Р. Надежность вычислительных систем.- М.: Энергоатомиздат,1985.- 288 с.

37. Смирнов Н.В., Дунин – Барковский И.В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений. – М.: Наука, 1969. – 512 с.

38. Шор Я.Б. Статистические методы анализа и контроля качества и надежности.- М.: Сов. радио, 1962. – 552 с.

39. Shubinsky Igor B., Zamyshlyaev Alexey M. Topological semimarkov method for calculation of stationary parameters of reliability and functional safety of technical systems – Reliability: Theory & Applications, San-Diego, USA, №2, 2012.

Содержание

ШУБИНСКИЙ Игорь Борисович

СТРУКТУРНАЯ НАДЕЖНОСТЬ
ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ.
МЕТОДЫ АНАЛИЗА

ООО “Журнал Надежность”

Подписано в печать: 26.06.2012. Формат издания 70х100/16.
Печать офсетная. Бумага офсетная. Усл. печ. л.
Тираж 000 экз. Заказ № 000.

Отпечатано с готового оригинал-макета