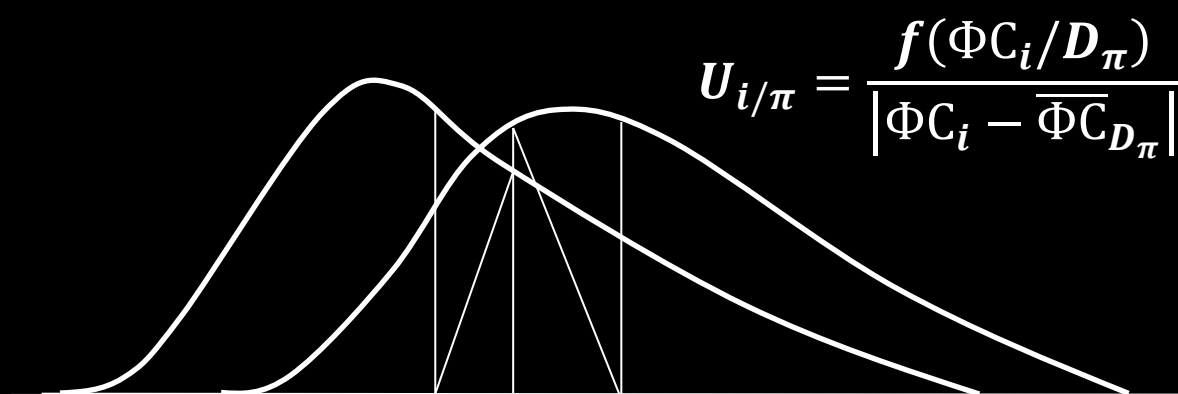


НОВЫЕ МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ДИАГНОСТИКИ



О НОВОМ ПОДХОДЕ В ТЕОРИИ
РАСПОЗНАВАНИЯ ОБРАЗОВ
(СОСТОЯНИЙ)



Дмитрий Уздин

2015

Д.З. Уздин

О НОВОМ ПОДХОДЕ В ТЕОРИИ РАСПОЗНАВАНИЯ
ОБРАЗОВ (СОСТОЯНИЙ).

НОВЫЕ МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ДИАГНОСТИКИ

Москва, 2011

АННОТАЦИЯ

Книга посвящена новому направлению в теории распознавания состояний, где совместно существуют три взаимосвязанных множества: параметров, диагнозов (состояний) и проверок этих состояний, причем отличительной особенностью этого направления является то, что области диагнозов существенно пересекаются из-за наличия наряду с недостаточным числом информативных параметров параметров неспецифичных. Предложен новый, вероятностно-метрический подход. Даны его основные понятия, определения и принципы распознавания состояний, на основе которых созданы эффективные методы математической диагностики, которые могут быть применены в самых разных областях: ранней диагностике онкологических и хронических заболеваний, обнаружении и выявлении причины неисправного состояния сложных технических объектов, обнаружения сигналов на фоне помех, поиске полезных ископаемых, прогнозировании землетрясений, прогнозе состояний в сфере экономики, социологии и других.

Изложение, начиная с III-й главы, ведется на примере возможного использования предложенных методов для раннего распознавания рака и хронических заболеваний по привычным анализам крови и мочи. Дается теоретическое обоснование такой возможности – трансформации неспецифичных, каждого в отдельности параметров крови в специфичные для раковых и нераковых диагнозов, достигаемой применением новых математических решений на комплексе параметров.

Книга предназначена для кибернетиков, специалистов в области технической и медицинской диагностики, знакомых с теорией распознавания образов. Она адресована также широкому кругу специалистов, занимающихся решением указанных выше задач.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Словосочетание «распознавание образов» имеет два семантических значения: идентификация и диагностика предъявляемых объектов. И идентификация, и диагностика предполагают наличие у объектов или их состояний неких признаков или параметров, по измеренным значениям которых осуществляется либо отождествление, например, изображений, звуков, речи, текстов, останков и др. и выяснение их принадлежности к известным существующим или существовавшим ранее объектам-образам (классам), либо – обнаружение, выявление и прогнозирование неблагоприятных, тревожных, аномальных, неисправных, нездоровых состояний объектов, процессов, происходящих в разных областях, экономике, геофизике, технике, медицине и др. и отнесение этих состояний к одному из известных, выделенных ранее, состояний (диагнозов-эталонов). Например, в технике – это обнаружение и установление причины неисправных состояний объектов, а в медицине – выявление и установление причины нездорового состояния проверяемого человека (установление диагноза), т.е. отнесение его (состояния) к одному из множества известных верифицированных диагнозов-эталонов.

В другой интерпретации к распознаванию образов можно отнести таксономию (кластеризацию), группировку, где требуется определить степень сходства (или различия) выделенных, уже имеющихся разновидностей объектов, систематизировать, разбить их на однородные группы (или кластеры) с возможностью их объединения или укрупнения. При этом требуется определить число образовавшихся после таксономии кластеров (классов), которое заранее не известно.

Диагностика в отличие от идентификации и таксономии предполагает рассмотрение протекающих процессов и неисправных (нездоровых) состояний объектов (субъектов) в их развитии с течением времени, т.е. в динамике.

В данной работе рассматриваются еще не решенные вопросы диагностики, различения, разделения близких, сходных по множеству специфических (информативных) и неспецифических параметров, состояний

(диагнозов) объектов живой и неживой природы, связанных с процессами, развивающимися с различной интенсивностью, причем сходство это может быть следствием либо имманентной гомогенности рассматриваемых состояний объектов или процессов, либо наложения псевдосходства, вызванного эндо- и экзослучайными факторами, прежде всего измерительными, связанными со значительной нестабильностью повторных измерений параметров, например, параметров крови.

Диагностика, особенно медицинская, по множеству параметров крови (ей посвящены главы III ÷ IV) должна использовать данные таксономии, разбивки участвующих в диспансеризации людей по их состоянию, до первой плановой проверки, на однородные группы (кластеры) (см. п. III.1) и заключается в проведении периодических проверок, контроля параметров и прогнозирования состояний с целью выявления по определенным решающим правилам нездорового (неисправного) состояния и установления истинного диагноза – $D_{и}$ из множества возможных и уже выделенных. Вопросы таксономии, формирования кластеров, разработаны достаточно хорошо и в монографии им отведено всего две страницы при определении возможного числа диагнозов. Основное внимание было уделено разработке нового подхода в дискриминантном анализе, не связанного с многомерным статистическим анализом и предполагающего различные распределения величин.

В многочисленных работах по теории распознавания образов (иначе ее называют теорией классификации), изданных за 50 лет ее существования, рассматривались в основном случаи непересекающихся кластеров или областей диагнозов-эталонных (эталонных состояний), а если и изучались пересекающиеся кластеры, то с незначительными пересечениями двух или нескольких диагнозов-эталонных (образцов); при этом исследователи располагали минимальным набором информативных специфичных признаков (параметров).

Лишь в работе [41] ставится задача распознавания образов с пересекающимися диагнозами, но с информативными признаками-симптомами,

что облегчает отнесение состояния проверяемого объекта к тому или иному диагнозу-эталону.

В представленной монографии решаются задачи разделения исправного (здорового) состояния и неисправного (нездорового), выбора нескольких наиболее вероятных диагнозов (н.в.д.) и, наконец, задача установления истинного диагноза ($D_{и}$) в условиях существенного пересечения областей диагнозов-эталонов, в том числе н.в.д., обусловленного во многом неспецифичностью части параметров (о необходимости выбора кроме информативных ещё и неспецифичных параметров указывается далее в предисловии к задачам медицинской математической диагностики, главы III ÷ V). Поэтому эта монография открывает новое направление в теории распознавания образов, в котором установление $D_{и}$ предъявляемого объекта или процесса проходит в неотъемлемой связи, единстве трех множеств: множества существенно ($>50\%$) пересекающихся областей диагнозов-эталонов, множества проверок состояний объектов (процессов), и множества параметров, в том числе неспецифичных (малоинформативных), к которым относятся, например, параметры крови (каждый в отдельности – не специфичен), количество металлической стружки в картере двигателя, температура отдельных элементов составной части объекта и т.д.

В первой главе изложены основные понятия и определения величин, фигурирующих в разработанном автором объединенном вероятностно-детерминистском или вероятностно-метрическом подходе, в том числе построены функции состояний диагнозов-эталонов и предъявляемого объекта, являющиеся математико-диагностическими моделями состояний. Эти функции состояний созданы в рамках указанного выше направления и подхода специально для того, чтобы решить задачу многомерности в ее связи со множеством существенно пересекающихся диагнозов. Новый подход предложен с целью повышения разрешающей способности диагностирования.

Приведены в общем виде три основополагающих принципа распознавания состояний, а в третьей главе – их формулировка в области

медицинской диагностики. Для других областей эти принципы следует трактовать преломлённо к каждой области, ибо будут другими как цели и задачи, так и комбинации (сочетания) баз [37]: групп (кластеров), времени и пространства, а также «алфавиты» классов (состояний, диагнозов) и «словари» признаков (параметров), на которых остановимся ниже.

Даны базисные формулы введенных понятий, проведен их анализ, выведены решающие правила разделения исправного и неисправного состояний диагностируемых объектов, а также промежуточные и окончательные решающие правила выбора нескольких н.в.д. в случае выявления неисправного состояния и решающие правила установления среди них истинного диагноза ($D_{и}$).

В монографии, в первой главе, приведена лишь одна главная теорема распознавания состояний – установления истинного диагноза. Автор сознательно не планировал излагать материал в форме доказательств теорем, поскольку книга адресована не только математикам-кибернетикам, но и специалистам разных областей, использующим математические методы в своих исследованиях и, конечно же, медикам, которые в этом случае ничего бы не поняли, ибо такая форма представления усложнила бы понимание идей и концепций нового подхода, нарушила бы целостность восприятия и кроме того заметно увеличила бы объем книги. Поэтому доказательства тех или иных положений и утверждений приведены в неявном виде в ходе текстового сопровождения логически связанных между собой формул.

Во второй главе предложены два разнотипных метода разделения диагнозов, основанных на первом принципе распознавания и примерные зависимости вероятности установления $D_{и}$ от числа параметров и другие характеристики и зависимости, показывающие связь множеств диагнозов со множеством параметров и проверок.

Все методы распознавания состояний, разработанные в первых двух главах и последующих, предполагают всевозможные законы распределения

случайных величин, не только нормальный закон, т.е. не налагается никаких ограничений на законы распределения.

Первые две главы снабжены поясняющими примерами.

III ÷ V главы монографии, с некоторыми изменениями и дополнениями, заимствованы из второго издания книги автора [34], посвященной в основном вопросам ранней диагностики заболеваний, в том числе онкологических, по стандартным лабораторным анализам крови и мочи. Поэтому в предисловие, в качестве его органического продолжения, внесено и предисловие к этим главам, в котором оставлена его основная содержательная часть, касающаяся как общих философских проблем распознавания, так и конкретно медицинской математической диагностики, связанной и с человеческим фактором, и со случайностями, проистекающими из самой природы клинических, биохимических и иммунологических параметров крови.

Предисловие к главам III ÷ V медицинской диагностики

В главах III ÷ V представлены основы нового направления математической медицинской диагностики при неспецифичных признаках (параметрах) и методы, его «обслуживающие». Открытие этого направления в медицине связано с разработкой методов ранней диагностики рака по привычным анализам¹ крови (неспецифичным параметрам). Это направление так же, как и направление теории распознавания с существенно пересекающимися диагнозами, переживает первый, начальный этап становления. Теорию диагностики и прогнозирования при неспецифичных параметрах приходится развивать, имея очень мало наработанного.

В аннотации указано, что теоретические результаты данной работы могут быть использованы и в других областях. Действительно, связь и единство живого и неживого проявляются в подобии, аналогиях, сходстве общих

¹ Остальные (инструментальные) методы – дорогостоящие и не пригодны с экономической точки зрения для массовых обследований населения (скрининга) на предмет раннего обнаружения рака.

О необходимости выбора клинических и биохимических параметров крови при диагностировании рака впервые было заявлено в начале 90-х годов в работе [6].

понятий и процессов, их объединяющих. Например, земную кору можно сравнить с человеческим организмом, отсутствие землетрясений, извержений вулканов и ураганов – со здоровым состоянием, здоровой нервной системой, и наоборот, извержения вулканов, землетрясения, бури и ураганы – сравнить с нездоровым состоянием, подобно тому, как мы сравниваем сложную автоматическую систему или робот с человеческим организмом, исправное состояние робота – со здоровым состоянием человека и, соответственно, неисправное состояние робота с нездоровым состоянием человека, а назначение ремонта этого технического существа – с назначением лечения человека. И, наконец, мы можем сравнить неспецифические параметры крови с косвенными малоинформативными параметрами технических или любых других объектов.

Цель этого пространного предисловия – расширить представление о возможных областях применения предложенных методов, о человеческих и природных факторах, препятствующих достижению положительных результатов, а также дать лингвистическую характеристику неспецифических признаков (параметров).

Человеческий фактор (о нем чуть ниже), энигмы организма человека и прежде всего – головного мозга, геофизические, космические и другие «черные ящики», несмотря на то, что мы знаем «все входы и выходы» из них, – пока закрыты для нас и не позволяют исследователям разгадать их тайны и познать еще неизведанное.

Акцент в III ÷ V главах сделан на актуальнейшей проблеме медицины – ранней диагностике рака.

В ряде других областей: в технической диагностике сложных объектов, при прогнозе землетрясений, в метеорологии при прогнозе погоды, при разведке полезных ископаемых, в ветеринарии при ранней диагностике заболеваний животных по анализам крови, в социологии при прогнозе численности населения, в демографии при прогнозе миграционных потоков, в общественно-политической и социально-экономической сферах, а также в психологии, - из-за отсутствия или недостатка специфических признаков

(параметров) тоже вынужденно придется использовать («не от хорошей жизни») и неспецифические (в технической диагностике их называют косвенными малоинформативными) параметры: ведь далеко не все признаки верно отражают специфику того или иного (в общем случае) явления или процесса.

В медицинской диагностике ситуация усугубляется еще и тем, что помимо неблагоприятного действия человеческого фактора имеет место крайняя нестабильность значений параметров крови при повторных измерениях, доминирование случайной составляющей. При прогнозах погоды, землетрясений и разведке полезных ископаемых вместо человеческого фактора действуют природные «недоброкачественные» факторы, создающие (по выражению Е.С. Вентцель [30]) «дурные неопределенности». Поэтому в перечисленных выше областях человеческой деятельности, где имеет место отсутствие или недостаток специфичных параметров (признаков), не достигнуто пока сколь-нибудь значительных успехов и заметного прогресса не наблюдается. Правда, с краткосрочным прогнозом погоды дела пошли лучше после того, как космические аппараты – «метеоразведчики» - стали передавать более полные и точные данные о состоянии атмосферы.

Распознавание заболеваний (состояний) человека – это вопрос установления истинного диагноза из множества выбранных наиболее распространенных, охватывающих 95% всех заболеваний человека, причем области целого ряда этих диагнозов существенно перемешаны (пересекаются) вследствие неспецифичности параметров крови, что значительно усложняет задачу распознавания. Ввиду этого, направление распознавания состояний здоровья проверяемых людей по анализам крови является наихудшим (в математическом смысле) еще и потому, что связано, как уже упоминалось выше, с пресловутым человеческим фактором (человека нельзя заставить сдавать анализы крови более двух, максимум – трех раз¹ за определенный

¹ В отличие от человека, у животных можно многократно брать анализы крови в течение короткого промежутка времени.

промежуток времени, например, за неделю). Поэтому в отличие от множества других случаев (распознавания состояний других объектов, где можно многократно, за такое же время, наблюдать и фиксировать случайные значения признаков) мы не знаем ни средние значения (или математические ожидания) измеряемых параметров крови проверяемого человека, ни их дисперсии.

Другой человеческий фактор, еще более усложняющий и без того неблагоприятную ситуацию, связанную с ранней диагностикой рака, заключается в том, что человек, как известно, – высшее создание природы, ставший спустя тысячелетия её повелителем, и преднамеренная его гибель по вине кого-либо влечет уголовную ответственность. Поэтому запрещается проводить всякого рода эксперименты и испытания, испытания болезнью: как только болезнь обнаружена, человека сразу же начинают лечить, не позволяя исследователю проследить развитие заболевания в динамике, в частности, изменения значений параметров крови с течением времени без лечения. Эта динамика может быть выявлена апостериори, только после проведения серии периодических проверок (уже пациентов) с верифицированными впоследствии диагнозами: впоследствии, потому что заранее неизвестно, какое заболевание возникло у проверяемого человека; известно лишь то, что значения параметров не стали удовлетворять здоровому состоянию.

В связи с изложенным был принят постулат: жизнь человека бесценна, и стоимость ее потери или утраты если и существует, то её очень сложно оценить. Также невозможно оценить ущерб, нанесенный здоровью человека от неправильного лечения в результате неверно поставленного диагноза, хотя средние цены на все лекарства, затраты на диагностирование и другие экономические показатели известны. Поэтому экономические критерии и целевые функции минимума удельных средних затрат не рассматриваются.

Границы множества (общей совокупности) больных людей являются «размытыми», поскольку это множество «дышит»: с одной стороны, оно пополняется новыми заболевшими, а с другой – убывает за счет смертности. Это множество с малой скоростью обновляется. Число больных увеличивается

по ряду известных причин, а вот смертность людей может быть снижена, благодаря ранней диагностике заболеваний и своевременному и правильному лечению. В конечном итоге, именно на снижение смертности населения от различных тяжелых заболеваний, и прежде всего рака, и нацелен предлагаемый читателю материал последних трех глав.

Вообще существуют три пути, ведущих к достижению великой и благородной цели – увеличению продолжительности жизни:

1. изобретение новых препаратов, замедляющих старение организма (геронтологический путь);

2. изобретение новых медикаментов, локально и эффективно воздействующих на то или иное заболевание и в т.ч. побеждающих рак;

3. поддержание и восстановление относительно здорового состояния людей на основе раннего выявления заболеваний и своевременного лечения. Этот путь связан с разработкой надёжных и экономичных методов скрининга, методов диагностики, в т.ч. математической диагностики заболеваний с её математическим и программным обеспечением.

Эти три пути научных исследований могут решить еще и стратегическую задачу страны, ставшую уже насущной: увеличение народонаселения (в нашем случае за счет сокращения смертности) в юго-восточной Сибири и на Дальнем Востоке, где набирает обороты северная экспансия Китая.

Развитию третьего пути, а именно методов математической медицинской диагностики, изложенных в главе III при одной проверке, при периодических проверках, алгоритму проведения скрининга и анализу нового подхода к распознаванию состояний и посвящены главы III ÷ V.

Теперь остановимся на размерах «алфавита» классов или образов (состояний, диагнозов) и «словаря» признаков (параметров). Ещё в 1972 г. Н.Г. Загоруйко [31] указал на то, что полный перебор, используемый при решении задач распознавания, оказывается неприемлемым при большом числе образов и большой размерности пространства признаков (тем более, если эти признаки неспецифичные, а образы пересекаются – прим. авт.). Следовательно,

уже в середине семидесятых годов прошлого века назрела необходимость в разработке новых методов распознавания.

Чем большим алфавитом классов (состояний или диагнозов) мы располагаем, тем больше признаков или параметров, характеризующих эти классы, мы должны включить в словарь для лучшего описания и отличия этих классов и, следовательно, уменьшения ошибки распознавания, особенно, если все признаки неспецифичны. В работах [28, 32] доказывалось, что с увеличением числа признаков вероятность правильного распознавания объектов также увеличивается. На это же указано и в работе [33].

Вообще, с лингвистической точки зрения, чем больше словарь признаков, тем полнее и точнее можно будет описать объект и его состояние. Подобно толковому словарю: чем больше слов он содержит, тем большая возможность появляется («степеней свободы») для выражения мыслей или описания того или иного предмета, события или явления. Только надо заметить, что в отличие от настоящего словаря, слова, которые мы используем подобно неспецифичным параметрам, - обтекаемо-неконкретны (каждое слово само по себе точно не выражает предмет, смысловое значение, и, чтобы понять то или иное высказывание, необходимо к уже произнесенным словам добавить еще несколько. Поэтому-то словарь таких слов должен быть весьма объемным. Это своего рода придуманная лингвистическая аналогия неспецифичных параметров.

Еще одна метафорическая аналогия неспецифичных параметров – это игровое представление (показ или объяснение) предмета или предиката жестами с угадыванием этого предмета (предиката) противоположной стороной или своим же партнером. С первых нескольких жестов угадывающий игрок может неверно назвать предмет, и тогда потребуется серия других, дополнительных ассоциативных жестов (в нашем случае – увеличение числа неспецифичных параметров).

Подытоживая изложенное в двух последних абзацах, заметим, что произнесение показывающим игроком (в нашем случае проверяемым

человеком) дополнительно отдельных бессвязных слов (добавление ещё нескольких параметров крови), но в определенной последовательности (аналогия с ранжированными последовательностями неспецифических параметров крови, см. п. III.2) для угадывания (в нашем случае – распознавания) игроками-партнёрами или другой стороной (в данном случае – медиками-диагностами) того или иного предмета, явления или состояния, - вносит, возможно, недостающую информацию для разгадки правильного ответа (постановки диагноза).

Итак, можно сделать вывод: при неспецифических признаках (параметрах) мы приходим к необходимости увеличения числа параметров, поскольку, как уже было отмечено, с увеличением их числа повышается достоверность распознавания или разделения (отличия) диагнозов (состояний). Чем менее специфичны используемые параметры, тем большее их число потребуется для правильного распознавания или прогнозирования состояний и наоборот.

В п. III.2 предлагаются формулы определения наиболее значимого параметра при выборе требуемого числа неспецифических параметров по степени их полезности (весу) в диагностическом процессе, когда в случае медицинской диагностики семиотика «не работает», т.е. отсутствуют симптомы-признаки на доклинической и первой клинической стадиях заболеваний. Однако в рамках общей математической диагностики, как медицинской, так и технической или социально-экономического мониторинга по косвенным (неспецифическим) признакам, но с имеющей место симптоматикой, проявлениями неких изучаемых процессов, – эти косвенные параметры (признаки) можно выбирать по их информационному весу при определенном общем числе классов (диагнозов, состояний) так, как это выполнено, например, в работе [22], применяя информационную меру Харкевича-Кульбака, меру ценности информации.

Все изложенные в главах III ÷ V методы основаны на уже упомянутых выше трех принципах, выводимых из следствий двух гипотез, приведенных в п. III.1 и выдвинутых применительно к ранней диагностике рака.

В главе III сначала приведены методы распознавания здорового и нездорового состояний при первой проверке (см. п. III.3) и периодических проверках (см. Приложение 2 Главы III), а затем, в последующих разделах, предложены методы установления уже самих диагнозов нездорового состояния (онкологических или хронических заболеваний), после того, как оно будет выявлено, т.е. устанавливается причина нездорового состояния (прелиминарный диагноз) проверяемого человека по определенным критериям выбора и правилам принятия решения (решающим правилам) с окончательной проверкой и постановкой D_{II} при инструментальном диагностировании, исходя из нескольких н.в.д., выданных компьютером по указанным в работе решающим правилам и условиям выбора. В этой главе получены математико-диагностические модели-функции состояний указанных выше заболеваний.

В главе IV приведены ещё два подпункта 3-го принципа с вытекающими из него пятью положениями, являющимися условиями или требованиями истинности устанавливаемого в ходе скрининга диагноза. Этот принцип, также выводимый из следствий второй гипотезы, исходит из самой сути скрининга, из содержательных целей и задач периодических проверок тех или иных объектов, в данном случае, людей, где дополнительной координатой служит время. Здесь имеет место сочетание баз: кластер – объект – время. Этот принцип лежит в основе управления процессами диагностики, прогноза и выработки рекомендаций при направлении проверяемого на инструментальное диагностирование и лечение (или направлении в ремонт для технических изделий). Мостом, могущим связать теорию с практикой, является материал IV-й главы, где представлена блок-схема алгоритма скрининга (диспансеризации). В этой же главе приводятся основные решающие правила выбора нескольких н.в.д. при одной единственной проверке.

В V-й главе получают развитие, дополняются и уточняются методы распознавания состояний, основанные на совместном действии всех трех принципов. Проводится анализ обобщенного диагностирующего отношения. В этой главе также представлены методы предварительного контроля состояний и

методы дальнейших исследований, которые окажутся возможными в будущем, при налаженном, установившемся скрининге.

В постановке окончательного диагноза «последнее слово» должно быть за медиками, обладающими накопленными за долгие годы знаниями и большим опытом в диагностике заболеваний. Компьютер должен выдавать им не один единственный «по его мнению» истинный диагноз, а несколько наиболее вероятных. Математикам следует оставить медикам лишь очень малое «невозделанное» поле, очистив его от множества сорняков – лишних, ложных диагнозов, предоставить медикам право принять решения через консилиум: ведь в их распоряжении будут как математические рекомендации с двумя-пятью н.в.д., так и инструментальная углубленная проверка и собственные знания, опыт и даже интуиция.

В заключение следует еще раз подчеркнуть: новое направление математической диагностики объектов различной природы характеризуется рассмотрением сочетания неспецифичности признаков (параметров), описывающих состояния этих объектов, преобладания случайной составляющей при их (параметров) измерениях, существенной перемешанности (пересечения) областей состояний (диагнозов) и их множества.

Это новое направление математической диагностики предусматривает решение задачи повышения надежности распознавания состояний при указанном «суровом» сочетании осложняющих решение условий.

Принятые сокращения и обозначения

ВМП – вероятностно-метрический подход;

ВММБ – вероятностно-метрическая мера близости – U ;

ОДО – обобщенное диагностирующее отношение;

E – коэффициент надежности распознавания;

E_{Σ} – суммарный коэффициент надежности распознавания;

ФС – функция или функционал состояния;

P – вероятность;

$P(D_{\pi})$ – априорная вероятность диагноза – D_{π} ;

$P_a(D_{\pi}/\text{ФС})$ – апостериорная вероятность диагноза D_{π} ;

ВДФ – вероятностная дискриминантная функция;
 Н.В.Д. – наиболее вероятные диагнозы;
 D_B – один из н.в.д.;
 D_{Π} – прелиминарный (предварительный) диагноз;
 D_c – диагноз-«сосед» - диагноз, ближайший к D_{Π} по выбранному критерию близости;
 D_{Π} – истинный диагноз;
 L – общее число возможных диагнозов;
 L_1 – число диагнозов, в области распространения которых по ФС попала ΦC_i i -го диагностируемого объекта;
 m – общее число выбранных параметров;
 ξ_r – значение r -го параметра;
 MO_r и σ_r – математическое ожидание и среднеквадратичное отклонение r -го параметра;
 ОКО – обобщенное конфигурационное отношение;
 РП – решающее правило;
 X_{ij} – диагностируемое состояние i -го проверяемого объекта или человека j -го кластера;
 G – исправное (здоровое) состояние;
 \bar{G} – неисправное (нездоровое) состояние;
 МНК – метод наименьших квадратов;
 t_{Π} – межпроверочный период;
 ρ_{Π} – формализованное расстояние между X_{ij} (ΦC_i) и статистическим центром диагноза D_{Π} ($\overline{\Phi C_{D_{\Pi}}}$);
 СМС – среднегеометрическое мультипликативное состояние;
 СМР – среднегеометрическое мультипликативное расстояние;
 α – вероятность ложной тревоги;
 β – вероятность пропуска цели (внезапного отказа, приводящего к тяжким или тяжелым экономическим последствиям, либо онкологического диагноза при медицинской диагностике);

Принятые сокращения к главам III ÷ V

ПК и М – параметры крови и мочи;
 К – раковый диагноз; K_k – k -я локализация рака;
 ХЗ – хроническое заболевание; XZ_p – p -е ХЗ.
 ДО – доброкачественная опухоль;
 \bar{K} – не раковый диагноз;
 \bar{G}_0 – нездоровое, но стабильное состояние человека, проходящего полный курс лечения от сопутствующих одного или двух ХЗ;

$\eta(t)$ – аппроксимирующая функция тренда ОКО при развитии заболевания;

Z_ψ – флуктуации гомеостаза, соответствующие отклонению ОКО от его среднего значения в момент ψ -й проверки;

Некоторые используемые знаки математической логики

\subset – знак включения, например А в В;

\vee – знак дизъюнкции, сходный с союзом «ИЛИ»;

\wedge – знак конъюнкции, сходный с союзом «И»;

\in – знак принадлежности элемента множеству;

\rightarrow – знак импликации, сходный с условием «если ..., то ...»;

\bar{B} – не В (знак отрицания). Черта сверху также означает в математике среднее значение случайной величины. Различают знаки по смыслу;

\equiv – знак тождественности;

\cap – знак пересечения множеств;

\cup – знак логической суммы событий;

$\forall x$ – квантор общности, читается: «для всех x...»;

\sim – знак подобия.

ГЛАВА I. ВЕРОЯТНОСТНО-МЕТРИЧЕСКИЙ ПОДХОД В ТЕОРИИ РАСПОЗНАВАНИЯ СОСТОЯНИЙ.

Даны семантические и математические определения основных понятий предлагаемого вероятностно-детерминистского или вероятностно-метрического подхода в теории распознавания состояний. Приведены в общем виде принципы распознавания при этом подходе, показана геометрическая интерпретация вероятностно-метрической меры близости состояния проверяемого объекта с каждым из известных эталонных состояний (верифицированных диагнозов). Предложены решающие правила разделения исправного и неисправного состояний и постановки истинного диагноза.

Введение к главе I

Известно, что в теории распознавания существуют два основных подхода: вероятностный и детерминистский (не считая логических и нейросетевых, гибридных). Отмечается, что эти подходы не имеют принципиальных различий. Например, в [22] этому утверждению следуют метрический метод и метод максимального отношения правдоподобия. Однако эти методы могут указать на один и тот же диагноз только при определенных условиях.

В большинстве случаев, особенно при пересечении областей диагнозов, методы вероятностного и детерминистского подходов не совпадают даже при дихотомии (дифференциальной диагностике, выборе истинного диагноза из двух возможных).

Вообще выработалась следующая стратегия распознавания: при наличии информативных параметров и отсутствии пересечения областей диагнозов используют методы детерминистского подхода, а при наличии не только информативных параметров, но и помех, т.е. случайной составляющей, применяют методы вероятностного (вероятностно-статистического) подхода. Здесь очень важно подчеркнуть, что к значительному пересечению областей диагнозов (состояний) могут привести два отличных друг от друга обстоятельства: а) значительные помехи при определившихся информативных

параметрах и б) отсутствие или недостаток информативных параметров (признаков), т.е. наличие неспецифичных параметров или сигналов и значительных помех, превалирование случайной составляющей исследуемого процесса. Изменения таких параметров, например, в технических объектах могут быть вызваны несовместными событиями: неисправностью двух или нескольких деталей какой-либо из составных частей объекта. Такие неспецифические параметры в технической диагностике называют косвенными (правда, с приставкой – малоинформативные, прим. авт.). В медицинской диагностике неспецифичными параметрами являются параметры стандартных лабораторных анализов крови.

Обстоятельство (условие) б) не рассматривалось в отечественной и зарубежной литературе по теории распознавания, дискриминантному анализу, при установлении истинного состояния (диагноза) объекта из множества его возможных известных состояний. Это условие предполагает существенные пересечения областей (от 5-ти и более) диагнозов из множества выбранных эталонных. В этом случае для правильного, достоверного установления истинного диагноза проверяемого объекта необходимо было изобрести новые методы, новый подход, новые математические решения, существенно повышающие разрешающую способность диагностирования, т.е. повышающие «чувствительность» критерия выбора или решающего правила (РП) принадлежности состояния объекта к прелиминарному (предварительному) диагнозу, который может оказаться истинным. Эти методы в рамках нового, открытого автором [34], объединенного вероятностно-детерминистского или вероятностно-метрического подхода (ВМП), изложены в настоящей книге.

Ознакомление читателя с ВМП и общей методикой установления истинного диагноза являются задачами первых двух глав книги.

I.1. Основные понятия ВМП и общие принципы распознавания состояний.

Установление истинного диагноза состоит из двух этапов: на первом – постановка дихотомического диагноза с ответом на вопрос исправен (здоров) объект или не исправен (не здоров) (см. п. I.4) и на втором – выявление причины неисправного (нездорового) состояния в случае его возникновения, т.е. постановка истинного диагноза (см. п. I.5).

Для реализации первого этапа введено обобщенное конфигурационное отношение (ОКО) [17], а для осуществления второго – обобщенное диагностирующее отношение (ОДО) [34] и коэффициент надежности распознавания – E , математический смысл которых раскрывается далее.

Для случая значительных пересечений областей предполагаемых диагнозов (состояний) и их разделения и предназначено ОДО и его частный случай: вероятностно-метрическая мера близости¹ (ВММБ) – продукты вероятностно-детерминистского или вероятностно-метрического подхода (ВМП) в теории распознавания состояний объектов различной природы. Отсюда и подход назван вероятностно-метрическим. ОДО представляет собой отношение вероятностной меры близости к метрической, выраженной в безразмерном виде (ведь вероятностная мера – безразмерна), или, учитывая априорные вероятности диагнозов, – отношение вероятностной дискриминантной функции (ВДФ) к расстоянию Хэмминга, абсолютному расстоянию до центра эталона, или квадрату этого расстояния. Действительно, в известных подходах берется раздельно либо \max ВДФ, либо \min расстояния. Если же взять их отношение, то оно будет иметь бóльшую динамику роста и, следовательно, лучшую разрешающую способность диагностирования. Этим ОДО выгодно отличается от раздельных мер близости. Экстремум, в данном случае, максимум ОДО при выборе прелиминарного диагноза достигается

¹ Мера – это некое средство, мерило оценки, сравнения чего-либо; мера близости оценивает близость или сходство неких величин или состояний; метрическая мера близости – это мера близости, основанная на расстоянии между точками, характеризующими состояния.

быстрее и его (этого диагноза) выделение среди других вероятных диагнозов окажется более очевидным. Таким образом, ОДО качественно улучшает распознавание. Из последнего абзаца следует формула ОДО

$$\text{ОДО}_{i|\pi} = \frac{P(D_\pi)f(\Phi C_i/D_\pi)}{\rho(\Phi C_i, \overline{\Phi C}_\pi)}, \quad (1.1)$$

где $P(D_\pi)$ – априорная вероятность диагноза – D_π ; $f(\Phi C_i/D_\pi)$ – оценка плотности вероятности функций состояний (ФС) объектов с состоянием (диагнозом) – D_π при значении ΦC_i i -го проверяемого объекта при условии, что состояние этого объекта принадлежит D_π ; $i = \overline{1, M}$ – объект диагностирования; $\pi = \overline{1, L}$ – диагнозы-эталонны. Две ФС подробно рассмотрены в п. I.7 и в главе 3 (см. п. III.4). Примем

$$\rho(\Phi C_i, \overline{\Phi C}_\pi) = |\Phi C_i - \overline{\Phi C}_\pi|, \quad (1.2)$$

где $\overline{\Phi C}_\pi$ – статистический центр рассеяния ФС, представляющий собой «центр тяжести» области π -го диагноза по выборке или ее медиану при состоянии (диагнозе) D_π ; ρ – абсолютное расстояние или расстояние по Хэммингу [20].

Существуют и более общие формулы метрических мер близости, записанные, например, в форме Минковского, но в дальнейшем будем использовать формулу (1.2) – частный случай заявленной характеристики.

Основная сложность ВМП состояла в конструировании ФС – математико-диагностических моделей¹ различных состояний, зависящих от выбранных параметров, измеряемых при диагностировании. В общем виде

$$\text{ФС} = \varphi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m, N_1, N_2, \dots, N_m),$$

где ξ_1, ξ_m – измеряемые значения параметров, приведенные к безразмерному виду для удобства их сравнения;

N_1, N_m – порядковые номера параметров в ранжированных по их значениям рядах;

m – число выбранных параметров.

¹ Эти модели созданы лишь для сравнения, различения множества состояний чего-либо и отличаются от математических моделей тем, что не имеют конкретного физического смысла изучаемого процесса.

Основные понятия ВМП (разделы I.1 ÷ I.3) изложены для простоты с использованием одной ФС. Разделы, касающиеся этапов постановки истинного диагноза, даны с использованием двух ФС, образующих двумерный вектор ΦC_i , описывающий, с ростом числа проверок (диагностирований) объектов, некую траекторию движения к истинному диагнозу (рис. 5 см. в конце раздела I.5).

ФС предложены для разделения диагнозов (состояний) и правильного установления истинного у предъявляемого объекта.

По статистическому ряду значений ФС, по обучающим выборкам объектов с различными возможными неисправностями (состояниями, диагнозами-эталопами), необходимо построить L плавных кривых $f(\Phi C/D_\pi)$, входящих в ВММБ, ОДО и Е. При достаточно большом числе статистических данных, зависящих от объемов выборок и числа измерений каждого параметра, проведенных при проверке, плавные кривые можно провести по построенным гистограммам, тривиально соединяя точки высот прямоугольников – частот, исходящих из середин интервалов разбивки. При недостаточном объеме статистического материала кривые $f(\Phi C/D_\pi)$ можно получить сглаживанием, построением МНК аппроксимирующих функций (в сложных случаях – нескольких аппроксимирующих функций), выравниванием с помощью критериев согласия или для непосредственного вычисления значения плотности распределения в точке ΦC_i – применить непараметрические методы [38].

Математическая модель распознавания состояний в виде промежуточного РП сводится к нахождению наибольшего среди возможных диагнозов значения ОДО, соответствующего прелиминарному диагнозу – D_π , к которому первоначально и следует отнести состояние диагностируемого объекта, т.е.

$$\text{ОДО}|_{D_*} = \max_{\pi \in L} \frac{P(D_\pi) f(\Phi C_i/D_\pi)}{|\Phi C_i - \overline{\Phi C}_\pi|} \rightarrow X_i \in D_* \equiv D_\pi, \quad (1.3)$$

где L – число возможных диагнозов-эталонов, возможных неисправностей элементов объекта; X_i – состояние i -го объекта; \rightarrow – знак импликации.

В РП (1.3) отношение

$$U_{i/\pi} = \frac{f(\Phi C_i/D_\pi)}{|\Phi C_i - \overline{\Phi C}_{D_\pi}|} \quad (1.4)$$

назовем ВММБ. Как видно из формулы (1.4), ВММБ объединяет вероятностные и метрические характеристики сходства или различия состояния диагностируемого объекта с эталонными. ВММБ показывает апостериорное фактическое состояние проверяемого объекта или процесса по отношению к тому или иному диагнозу. Связь ОДО с ВММБ проста:

$$\text{ОДО}_{i|\pi} = P(D_\pi) \cdot U_{i/\pi} \quad (1.5)$$

Для перехода к апостериорной вероятности π -го диагноза введено понятие коэффициента надежности распознавания E_π .

$$E_\pi = \text{ОДО}_\pi / \sum_{\pi=1}^L \text{ОДО}_\pi \quad (1.6)$$

E_π сходен с апостериорной вероятностью $P_a(D_\pi/\Phi C)$ диагноза D_π , так как $\sum_{\pi=1}^L E_\pi = 1$. Как видно из формулы (1.6), E_π – наиболее общий диагностирующий показатель, представляющий собой модифицированную формулу Байеса при ВМП. Таким образом, по результатам проверки, РП (1.3) в более общем виде будет

$$E|_{D_*} = P_a(D_\pi/\Phi C) = \max_{\pi \in L} \frac{\text{ОДО}_\pi}{\sum_{\pi=1}^L \text{ОДО}_\pi} \rightarrow X_i \in D_* \equiv D_\pi, \quad (1.7)$$

Итак, E_π – это сложный функционал, который, фигурально выражаясь, напоминает большую «русскую матрешку», в которую входят меньшие по ранжиру. Или, в обратном порядке, эволюцию преобразований, от меньшей «матрешки» к большей, запишем в виде нечислового импликационного ряда:

$$(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)_{i_\pi} \rightarrow \Phi C_{i_\pi} \rightarrow \text{ВММБ}_{i_\pi} \rightarrow \text{ОДО}_{i_\pi} \rightarrow E_{i_\pi} \quad (1.8)$$

Эффективность коэффициента E по сравнению с обобщенной формулой Байеса обеспечивается наличием в его формуле (1.6) ΦC различных диагнозов, уже их разделяющих (по метрической мере близости).

В нередких случаях мы можем столкнуться с ситуациями, когда вероятностная и метрическая меры близости или сходства состояния проверяемого объекта или исследуемого процесса с эталонными диагнозами (состояниями) войдут в противоречие. Условия противоречия и не

противоречия приведены ниже. В этих случаях, при распознавании состояний, ВММБ играет решающую роль.

В данной монографии изложение ведется в общем виде, предполагая, однако, диагностику заболеваний человека и технических объектов, состояния которых будут характеризоваться множеством параметров, в том числе и неспецифических.

Прежде чем приступить к формализации условий противоречия и согласия мер близости и другим математическим обоснованиям, приведем в общем виде принципы ВМП, на основе которых разработаны методы и РП распознавания состояний.

Принцип 1

Последовательность наименований выбранных параметров в ранжированных по их средним безразмерным значениям и динамике рядах, при возникновении и развитии дефектов, неисправностей, заболеваний диагностируемых объектов (субъектов), будет различной для каждого из возможных состояний (диагнозов-эталонов) этих объектов (субъектов). При этом нумерация, очередность (определенный порядок следования) параметров в этих рядах представляет собой шифр или код того или иного состояния (диагноза). Этот числовой код будет специфичен для каждого состояния объекта, состояния каждой его составной части или органа и отличен от других. Число и наименования параметров, не изменивших свои значения при каком-то диагнозе (состоянии), также окажутся для него специфическими.

Принцип 2

Определенные комбинации, соотношения средних значений всех или групп выбранных параметров в разных физических и химических средах диагностируемого объекта при разных физических и химических характеристиках и в разных диагностических тестовых режимах, – будут различны при каждом из возможных состояний-эталонов объекта.

Принцип 3а

Ранжированная последовательность параметров проверяемого объекта будет ближе к ранжированной последовательности параметров объектов с тем состоянием, к которому принадлежит его состояние, подлежащее установлению в ходе проверки (диагностирования).

Принцип 3б

С развитием исследуемого или диагностируемого процесса (дефекта, неисправности, заболевания) и ростом числа проверок, – только при одном, истинном состоянии (диагнозе) проверяемого объекта или исследуемого процесса, его (объекта) фактическое состояние все более приближается к этому истинному состоянию.

Положения третьего принципа¹

При каждой из возможно проведенных проверок истинный диагноз, в отличие от остальных, будет находиться среди наиболее вероятных диагнозов (н.в.д.).

Истинный диагноз при увеличении числа проверок будет иметь возрастающие значения ОДО, возрастающую вероятность его установления и наибольшее изменение (в смысле роста) ВММБ.

I.2. Условия противоречия и согласия мер близости

Формализуем условия противоречия (разногласия) и не противоречия (согласия) вероятностной и метрической мер близости. Для наглядности рассмотрим отношения правдоподобия и метрических мер близости для случая двух равновероятных состояний (диагнозов) с одинаковыми и разными законами распределения ФС, т.е.:

$$\frac{f(\Phi C_i/D_1)}{f(\Phi C_i/D_2)} \text{ и } \frac{|\Phi C_i - \overline{\Phi C}_1|}{|\Phi C_i - \overline{\Phi C}_2|}$$

¹ В главах III и IV эти принципы, выводимые из гипотез и их следствий, изложены применительно к медицинской диагностике; в главе IV приведены все основные положения третьего принципа.

Известно, что

$$X_i \in D_1, \text{ если } \frac{f(\Phi C_i/D_1)}{f(\Phi C_i/D_2)} > 1,$$

где X_i – состояние проверяемого объекта.

А при применении метрической меры близости

$$X_i \in D_1, \text{ если } \frac{|\Phi C_i - \overline{\Phi C_1}|}{|\Phi C_i - \overline{\Phi C_2}|} < 1.$$

Тогда нетрудно видеть, что условия противоречия мер близости (см. Рис. 1а и 1б) запишутся в виде

$$\begin{cases} r_f = \frac{f(\Phi C_i/D_1)}{f(\Phi C_i/D_2)} < 1 \\ r_\rho = \frac{|\Phi C_i - \overline{\Phi C_1}|}{|\Phi C_i - \overline{\Phi C_2}|} < 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} r_f = \frac{f(\Phi C_i/D_2)}{f(\Phi C_i/D_1)} > 1 \\ r_\rho = \frac{|\Phi C_i - \overline{\Phi C_2}|}{|\Phi C_i - \overline{\Phi C_1}|} > 1, \end{cases} \quad (1.9a)$$

а условия согласия (см. Рис. 2) в виде

$$\begin{cases} r_f = \frac{f(\Phi C_i/D_1)}{f(\Phi C_i/D_2)} > 1 \\ r_\rho = \frac{|\Phi C_i - \overline{\Phi C_1}|}{|\Phi C_i - \overline{\Phi C_2}|} < 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} r_f = \frac{f(\Phi C_i/D_2)}{f(\Phi C_i/D_1)} < 1 \\ r_\rho = \frac{|\Phi C_i - \overline{\Phi C_2}|}{|\Phi C_i - \overline{\Phi C_1}|} > 1 \end{cases} \quad (1.9б)$$

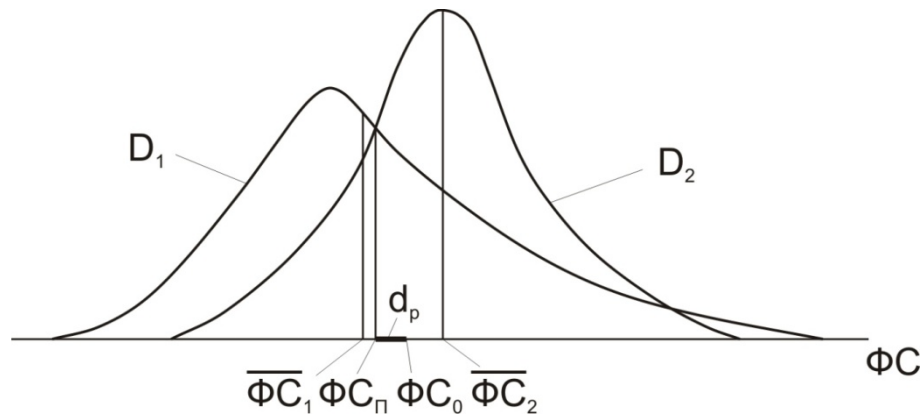


Рис. 1а. К иллюстрации согласия и разногласия вероятностной и метрической мер близости

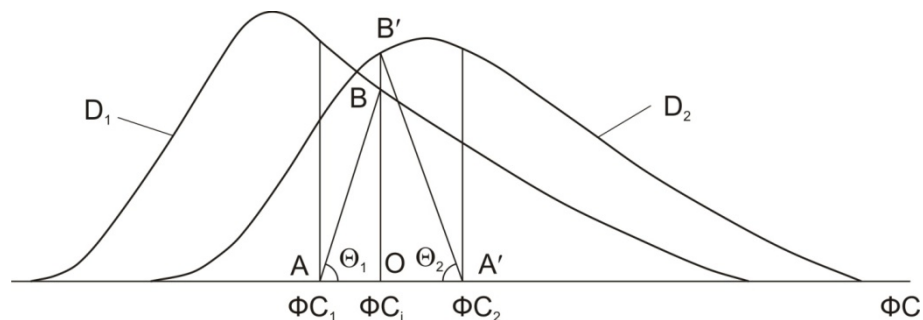


Рис. 1б.

$r_f = 1$ и $r_\rho = 1$ в неравенствах (1.9а) и (1.9б) могут быть лишь в предельных, маловероятных случаях: при полном совпадении областей диагнозов и когда оба диагноза имеют одинаковые распределения ФС, а ΦC_i попало на проекцию точки пересечения распределений. В этих случаях при распознавании все решают только априорные вероятности диагнозов.

Необходимо отметить, что интервалы противоречия (разногласия) между вероятностной и метрической мерами близости будут меньше интервалов согласия при различных законах распределений ФС: нормальном и с асимметрией. Ясно одно, что интервалы противоречия образуются лишь в том случае, когда ΦC_i попадает в интервал между статистическими центрами распределений, а именно этот случай и является самым трудным для распознавания, тем более при наличии не двух, а нескольких сильно пересекающихся областей диагнозов. Тогда интервалы противоречия мер близости могут появиться между попарно пересекающимися конкурирующими диагнозами. В этих случаях вероятностная мера близости укажет на один предполагаемый диагноз, а метрическая – на другой. Гордиев узел противоречия (разногласия) разрубит единая вероятностно-метрическая мера близости или сходства.

В рамках интервала между статистическими центрами распределений ФС (см. Рис. 1а) при диагнозах D_1 и D_2 интервал разногласия (противоречия) будет

$$\Phi C_\Pi < d_P < \Phi C_0 = (\overline{\Phi C_2} + \overline{\Phi C_1})/2,$$

где ΦC_Π – проекция точки пересечения плотностей распределений находится из решения уравнения $f_1(\Phi C_\Pi/D_1) = f_2(\Phi C_\Pi/D_2)$,

интервал согласия, как видно из рис. 1а, будет состоять из двух интервалов

$$\Phi C_1 < d_{C_1} \leq \Phi C_\Pi \quad \text{и} \quad (\overline{\Phi C_2} + \overline{\Phi C_1})/2 \leq d_{C_2} < \overline{\Phi C_2}.$$

В случае рис. 1б редко, но возможна ситуация неопределенности при равновероятных диагнозах

$$f(\Phi C_i/D_1)/f(\Phi C_i/D_2) \cong [|\Phi C_i - \overline{\Phi C_1}|]/[|\Phi C_i - \overline{\Phi C_2}|] < 1.$$

1.3. Геометрическая интерпретация ВММБ

Приведем простую геометрическую интерпретацию U (1.4), обосновывающую введение ОДО при распознавании состояний объектов разной природы. В знаменателе (1.4) могут быть предложены различные метрические меры близости (сходства), однако для геометрической иллюстрации ВММБ используется абсолютное расстояние до центра π -го диагноза-эталона (до медианы плотности распределения).

Покажем, что числитель и знаменатель отношения (1.4) – катеты прямоугольных треугольников, тангенсы углов которых (или сами углы) и будут геометрически наглядно показывать фактическую близость или сходство диагностируемого объекта с тем или иным эталонным состоянием (диагнозом).

Обратимся к Рис. 1а, 1б и 2 для частного случая дифференциальной диагностики (дихотомии). Рассмотрим и сравним прямоугольные треугольники ABO и $OB'A'$ на Рис. 1б и 2.

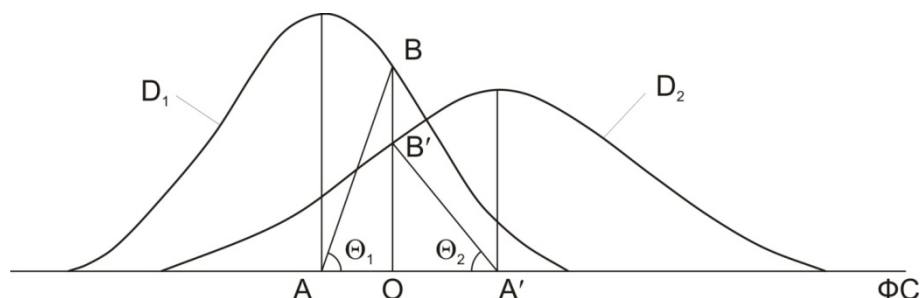


Рис. 2. Рис. 1б и 2 – к геометрической интерпретации вероятностно-метрической меры близости (ВММБ)

Из этих треугольников на Рис. 1б видно, что

$$\frac{BO}{AO} = \frac{f(\Phi C_i / D_1)}{|\Phi C_i - \overline{\Phi C}_{D_1}|} = \operatorname{tg} \theta_1, \text{ а } \frac{B'O}{OA'} = \frac{f(\Phi C_i / D_2)}{|\Phi C_i - \overline{\Phi C}_{D_2}|} = \operatorname{tg} \theta_2.$$

Чем больше угол θ_π , тем бóльшим сходством с этим диагнозом обладает диагностируемый объект.

Геометрическая интерпретация меры U для ряда диагнозов выливается в сравнение $\operatorname{tg} \theta_\pi$ – углов треугольников, один катет которых представляет собой вероятностную меру, а другой катет – метрическую меру близости.

При равновероятных диагнозах распознавание осуществляется через отношение тангенсов углов Θ . При $\Theta_1 = \pi/2$ имеем в идеале 100% сходства или близости объекта к диагнозу D_1 (см. Рис. 1б). В этом случае ΦC_i точно попало в статистический центр диагноза D_1 , при этом $\rho = 0$. Сами точки с $\rho = 0$ исключаются по известной причине ($\infty/0$). Таким образом, при «равноправных» диагнозах можно ввести новую меру близости – меру тангенсов. Область определения угла Θ_π , например, в первом квадранте

$$0 \leq \Theta_\pi \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad 0 \leq \text{tg}\Theta_\pi \leq \infty.$$

Граничные точки 0 и $\pi/2$ имеют ясный физический смысл и означают, соответственно, «нулевой» диагноз (не попадание ΦC_i в область диагноза D_π) и попадание ΦC_i в статистический центр D_π , в т. медианы ΦC_π .

В общем случае различных априорных вероятностей диагнозов D_1 и D_2 РП отнесения состояния объекта к диагнозу D_1 запишется в виде

$$\text{tg}\Theta_1/\text{tg}\Theta_2 > P(D_2)^1/P(D_1) \rightarrow X_i \in D_1$$

Иллюстрирующий пример дает возможность выразить ВММБ (1.4) через $\text{tg}\Theta_\pi$. При унимодальном распределении ΦC

$$U_\pi = \frac{f(\Phi C_i/D_\pi)}{|\Phi C_i - \overline{\Phi C}_\pi|} = \text{tg}\Theta_{\pi i}. \quad (1.10)$$

При полимодальном распределении ΦC π -го диагноза-эталона формула ВММБ, ΦC_i с π -ым состоянием (диагнозом), может быть предложена в виде среднего по числу мод в распределении:

$$U_\pi = \frac{1}{R_\pi} \sum_{j=1}^{R_\pi} K_{j\pi} \cdot \text{tg}\Theta_{j\pi}, \quad j = \overline{1, R_\pi}; \quad \pi = \overline{1, L}, \quad (1.10б)$$

где R_π – число мод в распределении ΦC π -го диагноза; $K_{j\pi}$ – весовой коэффициент j -ой моды.

$$K_{j\pi} = M_{0j\pi} / \sum_{j=1}^{R_\pi} M_{0j\pi}, \quad \sum_{j=1}^{R_\pi} K_{j\pi} = 1,$$

$M_{0j\pi}$ – значение j -ой моды в распределении ΦC π -го диагноза;

¹ Равенство отношений – это модифицированное в ВМП условие Зигерта-Котельникова см. п. III.5 и ф-лы (3.32), (3.33), в которых вместо параметров выступают СМС (ф-ла (3.31)).

$$\operatorname{tg}\theta_{j\pi} = \frac{f(\Phi C_i/D_\pi)}{|\Phi C_i - \Phi C_{i \text{ Mo}_{j\pi}}|},$$

где $\Phi C_{i \text{ Mo}_{j\pi}}$ – значение ФС π -го диагноза при j -ой моде.

Формулу (1.5) с учетом (1.10) запишем

$$\text{ОДО}_i|D_\pi = P(D_\pi)\operatorname{tg}\theta_{\pi i},$$

а (1.6),

$$E|D_\pi = P_a(D_\pi/\Theta_\pi) = \frac{P(D_\pi)\operatorname{tg}\theta_{\pi i}}{\sum_{\pi=1}^L P(D_\pi)\operatorname{tg}\theta_{\pi i}}, \quad (1.11)$$

где $P_a(D_\pi/\Theta_\pi)$ – апостериорная вероятность π -го диагноза.

$$\sum_{\pi=1}^L P_a(D_\pi/\Theta_\pi) = 1 \quad (1.12)$$

Для множества диагнозов РП (1.3) запишем в виде

$$\text{ОДО}|D_1 = \max_{\pi \in L} P(D_\pi) \cdot \operatorname{tg}\theta_{\pi i} \rightarrow X_i \in D_1, \quad (1.13)$$

а РП (1.7) с учетом (1.11) в виде

$$E|D_1 \equiv D_* = \max_{\pi \in L} \frac{P(D_\pi)\operatorname{tg}\theta_{\pi i}}{\sum_{\pi=1}^L P(D_\pi)\operatorname{tg}\theta_{\pi i}} \rightarrow X_i \in D_1 \equiv D_\pi, \quad (1.14)$$

В условиях существенных пересечений областей состояний (диагнозов) и тем более, если наиболее вероятных диагнозов (н.в.д.) $5 \div 7$, когда строится РП (1.14) принадлежности состояния диагностируемого объекта к прелиминарному диагнозу-эталону, то имеется в виду, что эта принадлежность, даже при дихотомии, не 100%-на, а при наличии нескольких н.в.д. ее вероятность – лишь наибольшая среди вероятностей остальных н.в.д. (см. п. II.4, формула (2.25б)).

I.4. Решающие правила разделения исправного G и неисправного \bar{G} состояний¹

Если область G состоит из одного класса исправных объектов, то область \bar{G} – это область, состоящая из множества L возможных, выбранных состояний (диагнозов), связанных с различными неисправностями, повреждениями (см. рис. 3). Абстрагируясь от физических и химических деструктивных, деградационных процессов повреждений материалов (ниже, при составлении

¹ Параграфы I.4 и I.5 относятся к технической диагностике.

Решающие правила разделения здорового и нездорового состояний приведены в п. III.3.

РП с использованием ОКО они будут учтены), можно рассуждать следующим образом. Область \bar{G} состоит из множества – L кривых $f(\Phi C/D_\pi)$, каждая из которых будет иметь при наличии неспецифичных (малоинформативных) параметров некоторое число пересечений (до 5-ти и более) с соседними кривыми (рис. 4). Область существования \bar{G} ограничена интервалом

$$A = \min_{\pi \in L}(\min \Phi C_\pi) \leq \bar{G}(\Phi C) \leq \max_{\pi \in L}(\max \Phi C_\pi) = B.$$

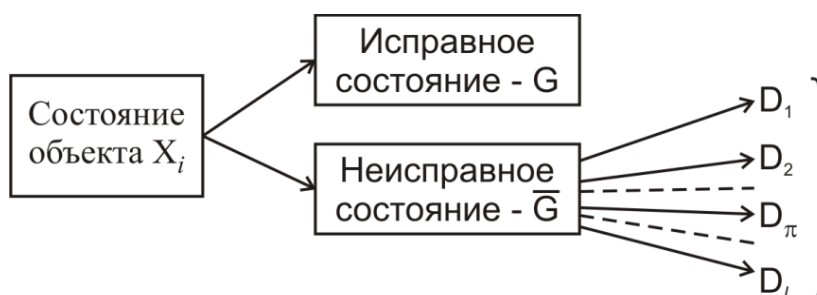


Рис. 3. Возможные состояния предъявляемого для диагностирования объекта.

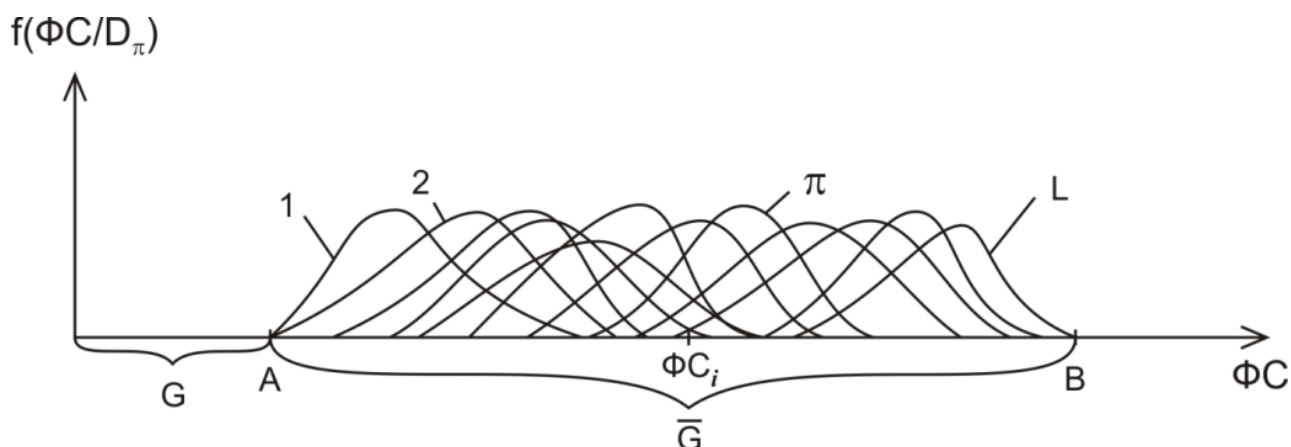


Рис. 4. Области диагнозов-неисправностей и их возможные пересечения; показано, что значение ΦC_i попало в области пересечения 7-ми диагнозов.

Область слева от A – область G, а область справа от B может быть расширением \bar{G} при $L \rightarrow \infty$. Понятно, что значение B не влияет на разделение G и \bar{G} .

При наличии двух ΦC (см. раздел I.5) получим два подобных рисунка с пересечениями областей диагнозов.

Если $G \cap \bar{G} = \emptyset$, т.е. G и \bar{G} не пересекаются, то РП разделения G и \bar{G} будет

$$\Phi C_i \leq A \rightarrow X_i \in G \quad (1.15a)$$

$$\Phi C_i > A \rightarrow X_i \in \bar{G} \quad (1.15б)$$

Теперь рассмотрим ОКО как основу этого разделения (см. начало п. I.1 главы). Но прежде примем следующую конструктивную модель сложного объекта. Объект состоит из множества – K составных частей. Составные части состоят из множества элементов (деталей). Неисправные состояния большинства элементов приводят к неисправному состоянию всего объекта. Пусть состояние каждой j -ой составной части характеризуется своими $m_{Иj}$ специфичными (информативными) и $m_{Нj}$ неспецифичными параметрами. Таким образом, каждая составная часть имеет по $m_j = m_{Иj} + m_{Нj}$ параметров, а общее число параметров, определяющих состояние объекта в целом

$$m = \sum_{j=1}^K m_{Иj} + \sum_{j=1}^K m_{Нj}; j = \overline{1, K} \quad (1.16)$$

Неспецифичность параметров, как было отмечено выше, характеризуется тем, что значения каждого из $m_{Нj}$ параметров могут изменяться при возникновении той или иной, или нескольких несовместных событий (неисправностей элементов j -ой составной части), приводящих к постепенным и внезапным отказам.

Задача диагностики – эти отказы предотвратить и как можно раньше попытаться обнаружить неисправности, могущие повлечь внезапные отказы, грозящие зачастую тяжкими последствиями.

ОКО, как обобщенный показатель состояния объекта, определяется всеми m параметрами из формулы (1.16), характеризующими состояния всех ответственных элементов объекта и неисправность любого из этих элементов скажется на изменении ОКО, в отличие от привычных для всех выходных параметров: КПД, мощности и др., так как не всякое повреждение на них влияет.

ОКО может быть записано с трендами к возрастанию или убыванию своих значений при развитии деструктивного процесса: изнашивания, коррозии, усталости металла и др., ведущих к неисправному, а в последствии, если не принять меры, – к неработоспособному состоянию объекта. Поясним это формулами ОКО.

Итак, состояние объектов характеризуется конгломератом выбранных m параметров (признаков), как правило, имеющих различную размерность и поэтому для возможности сравнения их измеренных значений (случайных величин) это состояние должно быть описано функциями от преобразованных, безразмерных значений этих параметров.

$$\text{ОКО} = \varphi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m),$$

где $\overline{\xi_1}, \overline{\xi_m}$ – измеренные случайные значения каждого из m параметров.

ОКО для кластера π -го диагноза и i -го объекта можно записать следующим образом:

$$\text{ОКО}_{\pi}^1 = \frac{\sum_{l=1}^{m_l} \lambda_{l\pi} \overline{\xi_{l\pi}}^{\delta}}{\sum_{S=1}^{m_S} \lambda_{S\pi} \overline{\xi_{S\pi}}^{\delta}}; \sum_{l=1}^{m_l} \lambda_{l\pi} = 1; \text{ОКО}_i = \frac{\sum_{l=1}^{m_l} \lambda_{li} \xi_{li}^{\delta}}{\sum_{S=1}^{m_S} \lambda_{Si} \xi_{Si}^{\delta}}; \sum_{S=1}^{m_S} \lambda_{S\pi} = 1,$$

(запись ОКО в виде отношения произведений опускаем),

где $\overline{\xi_{l\pi}}^{\delta}$ и $\overline{\xi_{S\pi}}^{\delta}$ – средние по выборке безразмерные значения параметров вида l и S , имеющих тенденции, соответственно, к росту и убыли с ухудшением состояния объекта с течением времени, развитием неисправности, при π -м состоянии (диагнозе-эталоне); ξ_{li}^{δ} и ξ_{Si}^{δ} – безразмерные значения l и S параметров у i -го диагностируемого объекта; $l = \overline{1, m_l}$, $S = \overline{1, m_S}$; $\lambda_{l\pi}$ и $\lambda_{S\pi}$ – весовые коэффициенты соответствующих параметров; безразмерные значения: $\overline{\xi_{l\pi}}^{\delta}$, $\overline{\xi_{S\pi}}^{\delta}$, ξ_{li}^{δ} и ξ_{Si}^{δ} параметров ранжируют и присваивают им номера N_l и N_S натурального ряда от 1 до m_l и от 1 до m_S ; номера одноименных параметров в этих рядах согласно первого принципа не будут совпадать.

Число параметров вида l и S j -ой составной части $m_{lj} = m_{\text{И}j} + m_{\text{Н}j}$, а $m_{Sj} = m_{\text{СИ}j} + m_{\text{СН}j}$. Общее число m_l и m_S параметров

$$\begin{aligned} m_l &= \sum_{j=1}^K m_{lj} = \sum_{j=1}^K m_{\text{И}j} + \sum_{j=1}^K m_{\text{Н}j}; m_S = \sum_{j=1}^K m_{Sj} \\ &= \sum_{j=1}^K m_{\text{СИ}j} + \sum_{j=1}^K m_{\text{СН}j}, \\ m &= m_l + m_S = m_{\text{И}} + m_{\text{Н}} \end{aligned}$$

¹ Более подробно о формуле ОКО см. в разделе III.2.

Из заданного конечного множества $m_H = m_{lH} + m_{SH}$ косвенных, неспецифичных параметров выбирают более информативные, более значимые из них. Выбор и ранжирование параметров по их значимости (по значению коэффициента λ) дано в разделе III.2.

В другой записи ОКО, при тренде к убыванию, в числителе будут стоять суммы безразмерных значений параметров вида S , а в знаменателе – вида l . В этом случае ОКО является аналогом КПД или безразмерной (относительной) мощности, т.е. выходным обобщенным параметром.

Безразмерность параметров в формуле ОКО можно получить через следующие отношения, например:

$$\bar{\xi}_{l\pi}^{\delta} = \frac{\bar{\xi}_{l\pi}}{\bar{\xi}_{lH}} > 1; \bar{\xi}_{S\pi}^{\delta} = \frac{\bar{\xi}_{S\pi}}{\bar{\xi}_{SH}} < 1; \xi_{l_i}^{\delta} = \frac{\xi_{l_i}}{\xi_{lH}} > 1; \xi_{S_i}^{\delta} = \frac{\xi_{S_i}}{\xi_{SH}} < 1$$

где $\bar{\xi}_{l(S)H}$ – номинальные (нормативные) значения параметров l и S или средние значения параметров l и S у группы новых, исправных однотипных объектов.

Большая часть безразмерных параметров l будет больше 1 при том или ином деградационном процессе, при развитии неисправности, а параметры вида S , стоящие в знаменателе ОКО, – меньше 1. В этом случае ОКО будет всегда больше 1 и иметь выраженную тенденцию к росту. «Чувствительность» ОКО к изменениям параметров будет достаточно высока и позволит успешно разделить G и \bar{G} состояния.

Благодаря высокой «чувствительности», ОКО успеет среагировать на возникновение повреждения, например, усталостной трещины, приводящей к внезапному отказу, предупреждение и прогнозирование которого остаются пока ещё «головной болью» специалистов в области надежности. Повреждения, вызванные усталостью материала, начинают проявляться, как правило, лишь спустя некоторое время.

Что касается такого повреждения, как износ, приводящий к постепенному отказу, то у большинства объектов он (износ) начинается с вводом их в эксплуатацию. Поэтому принято считать объекты исправными, пока изменение

выходного обобщенного параметра – V , например: мощности, КПД, быстродействия и др., не достигнет своего оптимального допустимого изменения – d_0 (в долях предельного отклонения), которое вычисляют по критерию минимума удельных затрат, см., например, работу [36]. Приведем только целевую функцию без определения составляющих ее функций от d

$$Q(d_0) = \min_{0 \leq d_0 \leq 1} \frac{I[1 - P(d)] + A \cdot P(d) + B \cdot K(d) + S(d)}{W_\phi(d)},$$

где A , I и B – средние издержки, связанные с устранением последствий отказа, текущим ремонтом и стоимостью проверки (диагностирования); $P(d)$ – вероятность постепенного отказа по выходному параметру; $K(d)$ – среднее число проверок до текущего ремонта; $S(d)$ – средние непрерывные издержки, связанные с изменением V ; $W_\phi(d)$ – фактически выполненная объектом работа по целевому назначению за средний фактический ресурс, фактический объем или количество произведенного, связанного со снижением в результате износа основных показателей качества: производительности, точности, скорости и др.

Теперь приведем РП разделения G и \bar{G} состояний при деструктивных процессах повреждений, приводящих: А) к постепенным отказам, В) внезапным отказам и С) – РП при совместном действии этих процессов, когда внезапный отказ может произойти раньше постепенного.

$$\text{А) } \begin{aligned} \Delta V_\Psi \leq d_0 &\rightarrow X_i \in G \\ \Delta V_\Psi > d_0 &\rightarrow X_i \in \bar{G}, \end{aligned} \quad (1.17)$$

Ψ – при Ψ -ой проверке;

В) Если при n -ой проверке ($n \geq 30$) повреждение не возникло и износ практически отсутствует, то

$$\Delta_n = 0 \rightarrow X_i \in G \quad (1.18)$$

если возникло, то $\Delta_n \geq \delta \rightarrow X_i \in \bar{G}$, $\delta > 0$ – пороговое (критическое) значение, определяется из статистики

$$\Delta_n = \left| \frac{1}{n} \sum_{\Psi=1}^n \text{ОКО}_{i_\Psi} - \frac{1}{n-1} \sum_{\Psi=1}^{n-1} \text{ОКО}_{i_\Psi} \right|.$$

Повреждения, приводящие к внезапному отказу, характеризуются быстрым ростом ОКО и Δ_n это «почувствует».

Другое РП основано на изучении статистического материала по M однотипным объектам и n проверкам $ОКО_i$ ($i = \overline{1, M}$) и построении доверительных интервалов для случайных значений ОКО при G состоянии объектов. Запишем условия пребывания объекта в G и \bar{G} состоянии для случая C .

Как выяснить, что при n -ой проверке возникла неисправность.

Допустим, что при проверке i -го объекта можно сделать до $k = 6 \div 7$ измерений параметров. Тогда

$$C) \quad \begin{cases} ОКО_{in} \leq C_n = \overline{ОКО}_n + \frac{\sigma_{ОКО(k)}}{\sqrt{k}} t(p_{\partial}, k - 1) \rightarrow X_i \in G, \\ ОКО_{in} > C_n = \overline{ОКО}_n + \frac{\sigma_{ОКО(k)}}{\sqrt{k}} t(p_{\partial}, k - 1) \rightarrow X_i \in \bar{G}, \end{cases} \quad (1.19)$$

где $\overline{ОКО}_n = \frac{1}{k} \sum_{\varepsilon=1}^k ОКО_{i\varepsilon, n}$; $\sigma_{ОКО(k)} = \sqrt{\frac{1}{k-1} \sum_{\varepsilon=1}^k (ОКО_{i\varepsilon, n} - \overline{ОКО}_n)^2}$; $\varepsilon = \overline{1, k}$, t – квантиль распределения Стьюдента.

Если по какой-то причине нельзя сделать столько измерений, можно поступить следующим образом.

Если значение $ОКО(t)$ i -го объекта при износе аппроксимировано при n проверках степенной функцией вида

$$ОКО(t) = ОКО(t = 0) + vt^{\alpha}, \quad v > 0, \alpha \geq 1, \quad t - \text{время}$$

и первая проверка ($\Psi = 1$) проведена до ввода объекта в эксплуатацию, т.е. при $t = 0$, то среднее значение $ОКО_i$ в момент n -ой проверки

$$\overline{ОКО}_{in} = v \cdot [t_{\Pi}(n - 1)]^{\alpha} + ОКО_{(t=0)} \approx \frac{1}{k} \sum_{\varepsilon=1}^k ОКО_{i\varepsilon, n},$$

где t_{Π} – межпроверочный период.

Оценки $\overline{ОКО}_{(M)_n}$ и $\sigma_{ОКО_{(M)_n}}$ группы M однотипных объектов в n -м сечении находятся по тем же известным формулам. Половина доверительного интервала

$$I/2_{(M)} = \frac{\sigma_{\text{ОКО}_{(M)n}}}{\sqrt{M}} t(p_{\partial}, M - 1).$$

Приплюсовывать $I/2_{(M)}$ предлагается не к $\overline{\text{ОКО}}_{(M)n}$, а к $\overline{\text{ОКО}}_{i_n}$, т.е. к фактическому среднему значению ОКО диагностируемого i -го объекта. Тогда РП в этом случае будет

$$C) \quad \begin{cases} \text{ОКО}_{in} \leq C_n = \text{ОКО}_{(t=0)} + v \cdot [t_{\Pi}(n-1)]^{\alpha} + \frac{\sigma_{\text{ОКО}_{(M)n}}}{\sqrt{M}} t(p_{\partial}, M-1) \rightarrow X_i \in G, \\ \text{ОКО}_{in} > C_n = (\cdot) \rightarrow X_i \in \bar{G} \end{cases} \quad (1.20)$$

Однако следует заметить, что $\max C_n = \overline{\text{ОКО}}_{(M)n} + I/2_{(M)}$. Поэтому, если $\overline{\text{ОКО}}_{in} > \overline{\text{ОКО}}_{(M)n}$, то $\overline{\text{ОКО}}_{in} + I/2_{(M)} > \max C_n$, что не должно быть, т.е. в этом случае надо принять $C_n = \overline{\text{ОКО}}_{(M)n} + I/2_{(M)}$.

При проверке надо проверять какое событие наступило раньше: А или В, т.е. при Ψ -ой проверке $\Delta V_{i\Psi} > d_0$ или $\text{ОКО}_{i\Psi} > C_n$, потому что, если событие А наступило раньше, то объект направляют в текущий ремонт по экономическим соображениям.

Следует также добавить, что если хотя бы одна из составных частей объекта подвержена износу, то ОКО_0 , состоящее из параметров всех составных частей, непременно будет на это реагировать, повышая от проверки к проверке свои значения. Но если в какой-то составной части (необязательно названной выше) началась образовываться усталостная или тепловая трещина (процесс повреждения в этих случаях достаточно быстро прогрессирует), то общее ОКО_0 объекта уловит сигнал повреждения, а ОКО_j этой составной части отреагирует на него гораздо заметнее, ибо доля параметров, могущих «почувствовать» это повреждение, будет больше, благодаря меньшему числу параметров в ОКО_j j -ой составной части по сравнению с ОКО_0 . Запишем последнее высказывание в виде неравенства

$$\Delta_{jn} = \text{ОКО}_{i\bar{G}_j} - \text{ОКО}_{iG_j} > \Delta_{0n} = \text{ОКО}_{i\bar{G}_0} - \text{ОКО}_{iG_0},$$

где Δ_{jn} и Δ_{0n} – скачки ОКО_j и ОКО_0 при переходе G состояния в \bar{G} при n -ой проверке.

РП для j -ой составной части при n -ой проверке

$$\begin{aligned} \text{ОКО}_{ijn} \leq C_n &\rightarrow X_{ji} \in G \\ \text{ОКО}_{ijn} > C_n &\rightarrow \bar{X}_{ji} \in \bar{G}, \end{aligned} \quad (1.21)$$

1.5. Второй этап распознавания. Установление истинного диагноза.

1.5.1. Двумерная реализация процесса распознавания

Допустим, что повреждение началось в j_* -ой составной части при n -м диагностировании. Тогда проверка условий (1.21) покажет, что $K - 1$ составных частей пока исправны: их $\text{ОКО}_j < C_n$, $j \in (K - 1)$, а $\text{ОКО}_{j_*} > C_n$.

Предположим, что для ряда деталей (элементов) этой составной части не было найдено информативных параметров или их недостаточно. В этом случае диагностирование состояния проводится по множеству малоинформативных неспецифичных параметров и нескольких информативных. Предположим также, что априори верифицированы все L возможных состояний (диагнозов-эталонов неисправностей) и построены для них кривые плотности вероятности двух ФС: $\Phi C_{1\pi}$ и $\Phi C_{2\pi}$ каждого из диагнозов, т.е. $f(\Phi C_1/D_\pi)$ и $f(\Phi C_2/D_\pi)$ и определены центры $\bar{\Phi C}_{1\pi}$ и $\bar{\Phi C}_{2\pi}$ или медианы плотности распределений.

Вернемся к началу предыдущего раздела, к формуле (1.15б), но с учетом двух ФС. Пусть при $n_{\bar{G}}$ -ой¹ проверке ΦC_{1j_*n} попала в область пересечения, например, L_{11} диагнозов, а ΦC_{2j_*n} по РП второй модели попала в пересечение областей L_{12} диагнозов, $L_{11} \approx L_{12}$, т.е.

$$\Phi C_{1j_*} \in D_{11} \cap D_{21} \cap \dots \cap D_{L_{11}} \equiv D_{11} \wedge D_{21} \wedge \dots \wedge D_{L_{11}}$$

$$A|D_{11} < \bar{G} < B|D_{L_{11}}$$

$$\Phi C_{2j_*} \in D_{12} \cap D_{22} \cap \dots \cap D_{L_{12}} \equiv D_{12} \wedge D_{22} \wedge \dots \wedge D_{L_{12}}$$

$$A|D_{12} < \bar{G} < B|D_{L_{12}}$$

$$\sum_{\pi=1}^{L_{11}} P_a(D_\pi/\Phi C_1) = \sum_{\pi=1}^{L_{12}} P_a(D_\pi/\Phi C_2) = 1,$$

$$(\pi = \overline{1, L_{11}}) \wedge (\pi' = \overline{1, L_{12}}), L_{11} \wedge L_{12} \subset L,$$

¹ При $n_{\bar{G}}$ -й проверке выявлено \bar{G} состояние, в дальнейшем индекс \bar{G} внизу n опускаем.

так как остальные диагнозы в количестве $L_{01} = L - L_{11}$ или $L_{02} = L - L_{12}$ – «нулевые»: ΦC_{j^*} в их области не попала и $\sum_{\pi=1}^{L_{01}} P_a(D_{\pi}/\Phi C_1) = \sum_{\pi=1}^{L_{02}} P_a(D_{\pi}/\Phi C_2) = 0$.

Истинный диагноз, согласно третьего принципа, с вероятностью $P=1$ будет находиться среди L_{11} и L_{12} диагнозов. Но L_{11} и L_{12} содержат, по крайней мере, $L_c > 1$ одноименных, совпадающих диагнозов: один общий, совпадающий диагноз, а именно, – истинный, обязательно должен быть. Таким образом, истинный диагноз с $P = 1$ должен находиться среди L_c – совпадающих, общих диагнозов (см. Утверждение 1 главы IV, п. IV.4).

Для определения L_c составим следующее бинарное уравнение

$$\mu_{\pi} = \begin{cases} 1, & \text{если } D_{\pi(1)} \equiv D_{\pi(2)} \\ 0, & \text{если } D_{\pi(1)} \not\equiv D_{\pi(2)}, \end{cases}$$

где μ_{π} – нечисловая мера совпадения¹ (не совпадения). Тогда $L_c = \sum_{\pi=1}^{L_{11}} \mu_{\pi}$.

Теперь представим две независимые ФС, сконструированные двумя разными методами (см. п. I.7), в виде векторов, направленных по осям координат и проведем на плоскости результирующие векторы: ΦC_{π} и ΦC_{j^*n} , концы которых отметим точками с координатами состояния, соответственно: $\overline{\Phi C}_{1\pi}$, $\overline{\Phi C}_{2\pi}$ и ΦC_{1j^*n} , ΦC_{2j^*n} ; $\pi = \overline{1, L}$.

$$\begin{aligned} \Phi C_{\pi} &= \alpha \overline{\Phi C}_{1\pi} + \beta \overline{\Phi C}_{2\pi} \\ \Phi C_{j^*n} &= \alpha \Phi C_{1j^*n} + \beta \Phi C_{2j^*n}, \alpha \text{ и } \beta - \text{орты.} \end{aligned}$$

Отметим на плоскости точки, соответствующие диагнозам L_c , и точку ΦC_{j^*n} . Напомним, что ΦC_{j^*n} – это состояние j^* -ой составной части i -го объекта, в которой при n -ой проверке отмечено наступление \overline{G} состояния. Тогда напрашивается такое РП: диагноз, обозначающий определенную неисправность j^* -ой составной части, при котором расстояние между его «центром тяжести» и т. ΦC_{j^*n} на плоскости будет минимальным – и есть истинный диагноз. Но это

¹ Мера совпадения – частный (предельный) случай меры близости.

РП может оказаться неверным. Дело в том, что диагнозы имеют разные априорные вероятности. Их не учет приводит к ошибке первого рода, а учет – к ошибке второго рода. Поэтому, если у диагноза D_* , с минимумом расстояния, $P(D_*)$ мала и не учитывается, то он может оказаться не истинным.

Приведем формулы (1.10) ÷ (1.14) для двумерного случая: ΦC_1 и ΦC_2 . При их независимости плотность совместного распределения ΦC при π -ом диагнозе

$$f(\Phi C_1, \Phi C_2/D_\pi) = f(\Phi C_1/D_\pi) \cdot f(\Phi C_2/D_\pi), \pi \in L$$

Двумерная ВММБ при n -ой проверке будет задана формулой

$$U_{\pi,n} = \frac{f(\Phi C_{1j^*n}/D_\pi) \cdot f(\Phi C_{2j^*n}/D_\pi)}{|\Phi C_{1j^*} - \bar{\Phi C}_{1\pi}| \cdot |\Phi C_{2j^*} - \bar{\Phi C}_{2\pi}|} = \text{tg}\theta_{1j^*\pi,n} \cdot \text{tg}\theta_{2j^*\pi,n} \quad (1.22)$$

Двумерное ОДО при n -ой проверке

$$\text{ОДО}_{j^*|D_\pi} = P(D_\pi)U_{\pi,n} = P(D_\pi)\text{tg}\theta_{1j^*\pi,n} \cdot \text{tg}\theta_{2j^*\pi,n} \quad (1.23)$$

$$E|_{D_\pi} = \frac{\text{ОДО}_{\pi,n}}{\sum_{\pi=1}^{L_c} \text{ОДО}_{\pi,n}} = P_a(D_\pi/\Phi C)_n = \frac{P(D_\pi)\text{tg}\theta_{1j^*\pi,n} \cdot \text{tg}\theta_{2j^*\pi,n}}{\sum_{\pi=1}^{L_c} P(D_\pi)\text{tg}\theta_{1j^*\pi,n} \cdot \text{tg}\theta_{2j^*\pi,n}} \quad (1.24)$$

$$\sum_{\pi=1}^{L_c} P_a(D_\pi/\theta_{1\pi}, \theta_{2\pi}) = 1, \quad \pi \in L_c \subset L.$$

Принадлежность состояния диагностируемого объекта при n -ой проверке к прелиминарному (первому, но не обязательно истинному) диагнозу зададим

$$\text{ОДО}|_{D_1} = \max_{\pi \in L_c} P(D_\pi)\text{tg}\theta_{1j^*\pi,n} \cdot \text{tg}\theta_{2j^*\pi,n} \rightarrow X_{j^*} \in D_1 \equiv D_\Pi \quad (1.25)$$

а через модифицированную формулу Байеса

$$P_a(D_\pi/\theta_{1\pi}, \theta_{2\pi})|_{D_1} = \max_{\pi \in L_c} \frac{P(D_\pi)\text{tg}\theta_{1j^*\pi,n} \cdot \text{tg}\theta_{2j^*\pi,n}}{\sum_{\pi=1}^{L_c} P(D_\pi)\text{tg}\theta_{1j^*\pi,n} \cdot \text{tg}\theta_{2j^*\pi,n}} \rightarrow X_{j^*} \in D_1 \equiv D_\Pi \quad (1.26)$$

По критерию РП (1.26) значения $E|_{\pi}$ или $P_a(D_\pi/\theta)$ расположим в убывающем порядке в виде цепочек неравенств

$$\max P_a(D_\pi/\theta_{1\pi}, \theta_{2\pi}) = E|_{D_1} > E_{\max-1|D_2} > \dots > E_{\max-(L_c-1)|D_{L_c}} \quad (1.27)$$

и ранговая цепочка предпочтения диагнозов согласно (1.27)

$$D_1 \succ D_2 > \dots > D_{L_c}, \quad (1.28)$$

где \succ – знак предпочтения диагнозу, стоящему слева.

Если задать вероятность нахождения истинного диагноза не менее $P_3 = 0,96$, то число наиболее вероятных диагнозов (н.в.д.) – Ω будет меньше L_c . В этом случае

$$\sum_{\pi=1}^{\Omega} P_a(D_{\pi}/\theta_{1\pi}, \theta_{2\pi}) = \sum_{\pi=1}^{\Omega} E|\pi = E_{\Sigma} \geq P_3 = 0,96 \quad (1.29)$$

Учитывая (1.24), неравенство (1.29) при n -ой проверке запишем в виде

$$\begin{aligned} E_{\Sigma} &= P\left(\bigcup_{\pi=1}^{\Omega} D_{\pi}\right) = \sum_{\pi=1}^{\Omega} P_a(D_{\pi}/\theta_{1\pi}, \theta_{2\pi}) = P_n = \\ &= \frac{\sum_{\pi=1}^{\Omega} P(D_{\pi}) \operatorname{tg}\theta_{1j^*\pi,n} \cdot \operatorname{tg}\theta_{2j^*\pi,n}}{\sum_{\pi=1}^{L_c} P(D_{\pi}) \operatorname{tg}\theta_{1j^*\pi,n} \cdot \operatorname{tg}\theta_{2j^*\pi,n}} \geq P_3 \end{aligned} \quad (1.30)$$

Решая (1.30), находим число Ω н.в.д. $< L_c$. И встает главный вопрос: как определить среди них истинный диагноз – $D_{\text{И}}$.

1.5.2. Метод установления $D_{\text{И}}$ путем вычеркивания (удаления) ложных диагнозов.

Согласно третьего принципа и его положений, $D_{\text{И}}$ будет находиться среди тех Ω_1 н.в.д., для которых будет выполняться неравенство:

$$P_a(D_{\pi}/\Phi C)_n < P_a(D_{\pi}/\Phi C)_{n+1}, \quad \pi \in \Omega_1 < \Omega. \quad (1.31)$$

С ростом числа проверок $D_{\text{И}}$ будет все явственнее проявляться. Таким образом, для установления $D_{\text{И}}$ необходимо провести ещё одну, $n + 1$ -ю ($\varepsilon = 1$)¹, либо две: $n + 1$ -ю и $n + 2$ -ю ($\varepsilon = 2$) проверки.

Определим число Ω_1 н.в.д. На плоскости выделим т. ΦC_{j^*n} и точки Ω н.в.д. Через т. ΦC_{j^*n} проведем прямые линии, параллельные осям ΦC_1 и ΦC_2 . Образовавшиеся 4-е подобласти обозначим буквами: А, В, С и D, из которых А, С и В, D – диагональные подобласти. Если при $n + 1$ -ой проверке конец вектора ΦC_{j^*n+1} оказался, например, в подобласти В, то $\Omega_1 = \Omega_{1B} + \omega_A \vee \omega_C$, где Ω_{1B} – н.в.д., оказавшиеся в В, ω_A или ω_C – часть н.в.д. подобластей А и С, прилегающих к вектору ΦC_{j^*n+1} . Остальные диагнозы подобластей А, С и все подобласти D – вычеркивают как ложные (рис. 5).

¹ Проверки $\varepsilon = 1, 2, \dots, \varepsilon$, которые надо провести от n_{ε} -й проверки, при которой было выявлено \bar{G} состояние, до установления истинного диагноза ($D_{\text{И}}$), назовем ε -проверками.

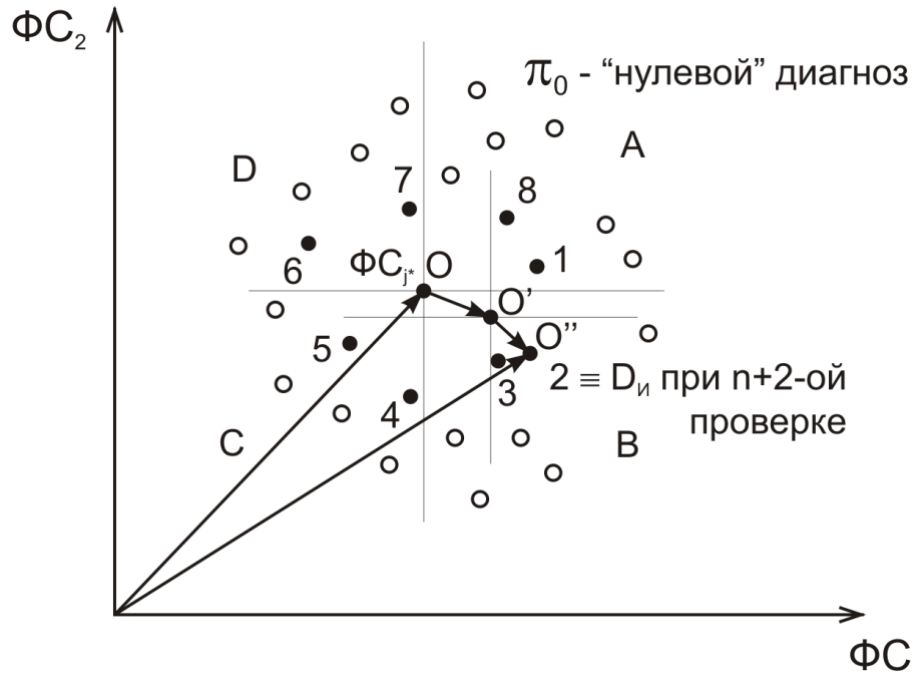


Рис.5. Траектория- $OO'O''$ движения конца результирующего вектора ΦC_{j^*} к $D_{И}$. Жирными точками обозначены $L_C = 8$ диагнозов; после $n+1$ -ой проверки остаются 1-й, 2-й и 3-й диагнозы, остальные – ложные вычеркивают.

Неравенство (1.31) дает ключ к РП установления $D_{И}$. Поделив правую часть неравенства (1.31) на левую, получим

$$\lambda_{|D_{\pi, n+1}} = \frac{P_a(D_{\pi}/\Phi C)_{n+1}}{P_a(D_{\pi}/\Phi C)_n}$$

Отсюда следует РП:

$$\lambda_{|D_{1, n+1}} = \max_{\pi \in \Omega_1} \frac{P_a(D_{\pi}/\Phi C)_{n+1}}{P_a(D_{\pi}/\Phi C)_n} \rightarrow X_{j^*} \in D_1 \equiv D_{И}, \quad \lambda > 1, \quad (1.32)$$

$$\text{где } P_a(D_{\pi}/\Phi C)_{n+1} = \frac{P(D_{\pi}) \operatorname{tg} \theta_{1j^*, \pi, n+1} \cdot \operatorname{tg} \theta_{2j^*, \pi, n+1}}{\sum_{\pi=1}^{\Omega_1} P(D_{\pi}) \operatorname{tg} \theta_{1j^*, \pi, n+1} \cdot \operatorname{tg} \theta_{2j^*, \pi, n+1}}, \quad \Omega_1 \subset \Omega \subset \Omega_C,$$

а $P_a(D_{\pi}/\Phi C)_n$ аналогична формуле (1.24), где число н.в.д. – Ω . В этих формулах важна «начинка» – ВММБ, по существу обеспечивающая распознавание состояний, в которую входят ΦC , специально изобретенные для многомерного случая.

При не быстром процессе повреждения можно провести две и более проверок (диагностирований) и тогда подтверждающим РП может быть

$$P_a(D_1/\Phi C)_{n+2} + P_a(D_1/\Phi C)_n \geq 2P_a(D_1/\Phi C)_{n+1} \rightarrow X_{j^*} \in D_1 \equiv D_{И}. \quad (1.33)$$

При третьей ($n, n + 1, n + 2$) проверке число оставшихся диагнозов $\Omega_2 < \Omega_1$. Здесь $\varepsilon = 2$.

В общем случае проводят столько ε -проверок или разбиений подобластей, в которых оказывается после очередной проверки конец вектора ΦC_{j^*} , пока при последней проверке не окажется один н.в.д. – истинный: после каждой проверки будет оставаться все меньше и меньше н.в.д. (см. рис. 5). Однако, если рассматривать внезапный отказ, (см. раздел 1.4), то он не оставляет нам шанса более чем на две проверки.

Допустим, что после двух разбиений подобластей осталось $\Omega_1 = 2$ диагноза: один – истинный, другой, ближайший конкурирующий – ложный. Тогда, если

$$\frac{P_a(D_1/\Phi C)_{n+1}}{P_a(D_1/\Phi C)_n} > \frac{P_a(D_2/\Phi C)_{n+1}}{P_a(D_2/\Phi C)_n} \rightarrow X_{j^*} \in D_1 \equiv D_{И}. \quad (1.34)$$

Обратный знак неравенства покажет, что $X_{j^*} \in D_2 \equiv D_{И}$.

Иллюстрации отношения (1.34) показаны на рис. 6.

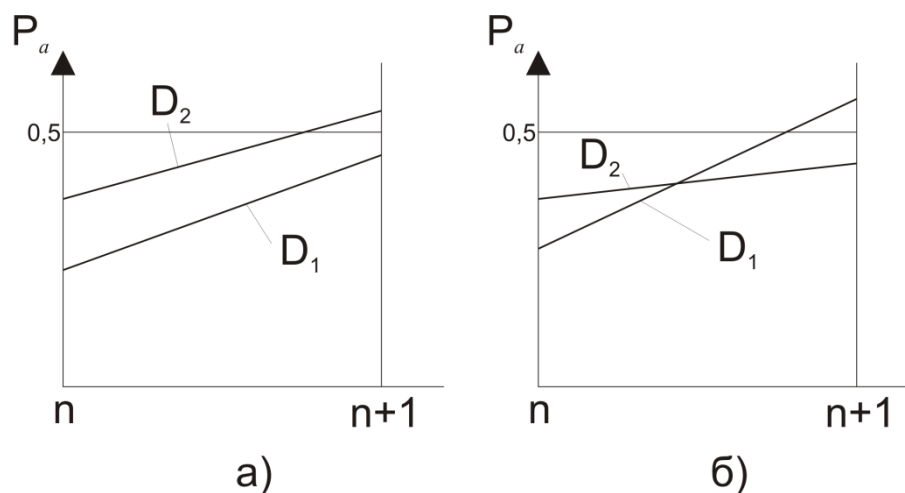


Рис. 6. Возможные иллюстрации а) и б) отношения (1.34)
Кривые изменения P_a от n условно показаны в виде прямых линий.

В случае а) $P_a(D_1)_n < P_a(D_2)_n$, случае б) $P_a(D_1)_n < P_a(D_2)_n$
 $P_a(D_1)_{n+1} < P_a(D_2)_{n+1}$ $P_a(D_1)_{n+1} > P_a(D_2)_{n+1}$,
но $\lambda(D_1) > \lambda(D_2)$ и $\lambda(D_1) > \lambda(D_2)$
Случай в) $P_a(D_1)_n < P_a(D_2)_n$, $P_a(D_1)_{n+1} < P_a(D_2)_{n+1}$
и $\lambda(D_1) < \lambda(D_2)$ – безусловно означает, что $D_2 \equiv D_{И}$

Модели распознавания (1.32 ÷ 1.34) однако не являются окончательными РП в постановке $D_{И}$. Поясним это высказывание доказательством главной теоремы установления $D_{И}$.

1.5.3. Главная теорема установления $D_{И}$

Теорема. Назовем динамическим отношением ВММБ отношение ВММБ π -го диагноза при последующей и предыдущей проверках. Тогда истинный диагноз имеет максимальное значение динамического отношения ВММБ, т.е.

$$R_{i|D_{И}} = \max_{\pi \in \Omega} \frac{U(\Phi C_i/D_{\pi}), n + \varepsilon + 1}{U(\Phi C_i/D_{\pi}), n + \varepsilon}, \text{ где } \varepsilon = 0 \vee 1. \quad (1.35)$$

Доказательство. Согласно третьего принципа и его положений, как уже было отмечено выше (см. неравенство (1.31)), если при n -й проверке апостериорная вероятность установления $D_{И}$ была $P_a(D_{И}/\Phi C)_n$, то при $n + 1$ -й проверке эта вероятность будет не меньше, чем при n -й, т.е. аналогично (1.31) можно записать

$$P_a(D_{И}/\Phi C)_{n+\varepsilon} < P_a(D_{И}/\Phi C)_{n+\varepsilon+1}. \quad (1.36)$$

Выразив апостериорные вероятности в (1.36) через ВММБ $= U(\Phi C_i/D_{И})$, получим с учетом (1.5) и (1.6)

$$\frac{P(D_{И}) \cdot U(\Phi C_i/D_{И})_{n+\varepsilon}}{\sum_{\pi=1}^{\Omega} P(D_{\pi}) \cdot U(\Phi C_i/D_{\pi})_{n+\varepsilon}} < \frac{P(D_{И}) \cdot U(\Phi C_i/D_{И})_{n+\varepsilon+1}}{\sum_{\pi=1}^{\Omega_1} P(D_{\pi}) \cdot U(\Phi C_i/D_{\pi})_{n+\varepsilon+1}} \quad (1.37)$$

Поделив правую часть неравенства (1.37) на левую, получим

$$\lambda_{i|D_{И}, n+\varepsilon+1} = \frac{U(\Phi C_i/D_{И})_{n+\varepsilon+1}}{U(\Phi C_i/D_{И})_{n+\varepsilon}} \cdot \frac{\sum_{\pi=1}^{\Omega} P(D_{\pi}) \cdot U(\Phi C_i/D_{\pi})_{n+\varepsilon}}{\sum_{\pi=1}^{\Omega_1} P(D_{\pi}) \cdot U(\Phi C_i/D_{\pi})_{n+\varepsilon+1}} > 1 \quad (1.38)$$

Но первый сомножитель в (1.38) – динамическое отношение ВММБ – $R_{i|D_{И}}$, а второй – величина, одинаковая для всех диагнозов и, следовательно, в установлении $D_{И}$ участия не принимает. Обозначив ее буквой r , перепишем (1.38)

$$\lambda_{i|D_{И}, n+\varepsilon+1} = R_{i|D_{И}} \cdot r > 1. \quad (1.39)$$

Для D_{π} -го диагноза

$$\lambda_{i|D_{\pi}, n+\varepsilon+1} = R_{i|D_{\pi}} \cdot r. \quad (1.39a)$$

Но критерием установления $D_{И}$ должен быть экстремум выражения (1.39а) и в данном случае максимум $\lambda_{i|D_{\pi},n+\varepsilon+1}$ или, что тоже самое, – максимум $R_{i|D_{\pi}}$, т.е.

$$R_{i|D_{И}} = \max_{\pi \in \Omega} \frac{U(\Phi C_i / D_{\pi})_{n+\varepsilon+1}}{U(\Phi C_i / D_{\pi})_{n+\varepsilon}}, \text{ ч. т. д.}$$

Таким образом, окончательное РП установления $D_{И}$ будет:

$$R_{i|D_*} = \max_{\pi \in \Omega} \frac{U(\Phi C_i / D_{\pi})_{n+\varepsilon+1}}{U(\Phi C_i / D_{\pi})_{n+\varepsilon}} \rightarrow X_i \in D_* \equiv D_{И} \quad (1.40)$$

Сформулируем подтверждающее условие установления $D_{И}$: $R_{i|D_{И}}$ при следующей проверке должно быть больше $R_{i|D_{И}}$ при предыдущей, т.е.

$$R_{i|D_{И},n+\varepsilon+2} > R_{i|D_{И},n+\varepsilon+1}. \quad (1.41)$$

Другое подтверждающее условие постановки $D_{И}$ найдем из следующих соображений.

Если после 2-х или 3-х проверок осталось два диагноза: $D_{И}$ и ближайший конкурирующий – D_2 , то отношение (1.39а) для последнего будет

$$\lambda_{i|D_2,n+\varepsilon+1} = R_{i|D_2} \cdot r. \quad (1.42)$$

Поделив выражение (1.39) на (1.42), получим коэффициент γ – «превосходства» динамического отношения ВММБ истинного диагноза перед динамическим отношением ВММБ диагноза D_2 .

$$\gamma = R_{i|D_{И}} / R_{i|D_2} > \gamma_{п} > 1, \quad (1.43)$$

где $\gamma_{п}$ – пороговое значение, зависящее от требуемой точности распознавания, обычно $1,01 \leq \gamma_{п} \leq 1,04$. Зададим $\gamma_{п} = 1,03$.

При выполнении условия (1.43) диагноз $D_{И}$ подтвердится.

Система правил, состоящая из собственно РП (1.40) и подтверждающих условий (1.41) или (1.43), является окончательной моделью распознавания состояния исследуемого объекта, установления его $D_{И}$.

Из формулы (1.35) следует, что и

$$\frac{U(D_{И})_{n_{\bar{G}}+\varepsilon+1}}{U(D_2)_{n_{\bar{G}}+\varepsilon+1}} > \frac{U(D_{И})_{n_{\bar{G}}+\varepsilon}}{U(D_2)_{n_{\bar{G}}+\varepsilon}}.$$

В случае медицинской диагностики рекомендовано выбрать медикам-диагностам для инструментальной проверки ещё 2 ÷ 3 ближайших н.в.д. по критерию выбора согласно цепочке неравенств

$$\max R_{i|D_{\text{И}}} > R_{i \max-1|D_2} > R_{i \max-2|D_3} > R_{i \max-3|D_4}$$

1.5.4. Некоторые аналитические замечания

Метод последовательного вычеркивания ложных диагнозов или метод последовательного, с ростом проверок, движения вектора ΦC_i к истинному диагнозу ($D_{\text{И}}$), показанный на рис. 5, является геометрической модификацией метода координат (см. п.п. 3.4.3 и V.2). Он самодостаточен, т.е. позволяет установить $D_{\text{И}}$ без применения РП (1.32) или (1.40). Однако для его реализации при значительных пересечениях большого числа диагнозов (>10), может потребоваться более 3-х проверок, что с одной стороны увеличит время установления $D_{\text{И}}$, а с другой, – можно не успеть их провести в случае внезапного отказа. Поэтому в этом случае после первой или второй проверки следует использовать РП (1.32) или (1.40). Движение ΦC_i к $D_{\text{И}}$ ввиду ряда случайностей не обязательно будет по прямой (кратчайшему пути). Если вектор ΦC_i при второй ($n+1$ -ой) ε -проверке не переместился, то он указал на $D_{\text{И}}$ уже при первой (n -ой) проверке.

Число проверок до надежного установления $D_{\text{И}}$ зависит от а) числа диагнозов L_1 – пересекающихся областей этих диагнозов, в которые попала точка ΦC_{j^*} конца результирующего вектора ΦC диагностируемого объекта при обнаружении его неисправного (нездорового) состояния после проведения $n_{\bar{G}}$ -й проверки и б) кучности диагнозов L_1 вокруг т. ΦC_{j^*} , т.е. распределения концов векторов н.в.д. в каждом из квадрантов. Если считать $L_1 = 12$, то при равномерном распределении диагнозов в квадрантах условно можно считать, что после $n + 1$ -й проверки ($\varepsilon = 1$) останется L_2 н.в.д. = $3 + 1 + 1 = 5$ (3 – число диагнозов в одном из квадрантов, где оказался конец вектора ΦC_{j^*} , а $1 + 1$ – ближайшие смежные диагнозы из соседних квадрантов). После $n + 2$ -й ($\varepsilon = 2$) проверки останутся $\max L_3$ н.в.д. = $3 (2 + 1 + 1)$. После $\varepsilon = 3$ -й – $L_4 = 2$ и после

$\varepsilon = 4$ -й – один диагноз, который и окажется истинным. Таким образом, $\max \varepsilon = 4$ -м проверкам. В реальных случаях $D_{И}$ можно будет установить за $\varepsilon = 2 \div 4$ -е проверки (ε -проверки – проверки, выясняющие причину \bar{G} состояния).

Как мы видим, с ростом числа проверок н.в.д., которые оказались ложными, вычеркивают и в конечном итоге остается один диагноз – $D_{И}$.

Динамика роста апостериорной вероятности – $P_a(D_{И}/\Phi C)$ истинного диагноза в зависимости от числа проверок – n (или ε) может быть аппроксимирована степенной функцией вида

$$P_{a|D_{И}} = P_{И_1} + a[t_{п}(n - 1)]^b, a > 0, b \geq 1,$$

где $t_{п}$ – межпроверочный период; при $b = 1$ получим линейные зависимости, см. рис. 6.

Одно и то же значение $P_{a|D_{И}}$ может быть достигнуто при разных числах проверок: при большем, если число пересечений областей диагнозов значительно ($L_1 \geq 10$) и при меньшем, если число пересечений мало.

В разделе I.6 приведено РП и условия установления прилеминарного (не обязательно истинного) диагноза на основе первого принципа распознавания – обобщенного рангово-метрического принципа, на котором зиждутся созданные для многомерного случая функции (или функционалы) состояний, две из которых представлены в заключительном разделе 1.7.

I.6. Решающие правила установления предварительного диагноза на основе метрического подхода

Для правильного распознавания состояния объекта в связи с наложением случайности при расстановке параметров в ранжированных по их значениям рядах, необходимо усилить и расширить условия в методе распознавания (см. РП (3.13)), непосредственно вытекающего из первого принципа, т.е. из метрической меры близости (или различия). Это расширение состоит из следующих условий принадлежности состояния проверяемого объекта к

прелиминарному диагнозу – D_n . Эти условия, записанные в форме РП, примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \rho_{\min |D^*} &= \min_{\pi \in L} \left[\min_{i' \in \pi} \left(\sum_{l=1}^{m_l} |N_{l_i} - N_{l_{i'}}| + \sum_{S=1}^{m_S} |N_{S_i} - N_{S_{i'}}| \right) \right] \\ \rho_{|D^*} &= \min_{\pi \in L} \left(\sum_{l=1}^{m_l} |N_{l_i} - N_{l_{D\pi}}| + \sum_{S=1}^{m_S} |N_{S_i} - N_{S_{D\pi}}| \right) \\ \rho_{\max}^{min} |D^* &= \min_{\pi \in L} \left[\max_{i' \in \pi} \left(\sum_{l=1}^{m_l} |N_{l_i} - N_{l_{i'}}| + \sum_{S=1}^{m_S} |N_{S_i} - N_{S_{i'}}| \right) \right] \end{aligned} \right\} \rightarrow X_{ij} \in D^* \equiv D_{\Pi}, \quad (1.44)$$

i' – один из объектов в обучающей выборке – M кластера с диагнозом D_{π} ; $i'=1, 2, \dots, M$; N_{l_i} и N_{S_i} – номера l и S параметров i -го диагностируемого объекта в ранжированных по их значению рядах; $N_{l_{D\pi}}$ и $N_{S_{D\pi}}$ – номера l и S параметров объектов в кластере с эталонным π -м диагнозом, в ранжированных по их средним значениям рядах; $N_{l_{i'}}$ и $N_{S_{i'}}$ – номера l и S параметров каждого i' -го объекта в кластере с π -м диагнозом, в ранжированных по их значениям рядах.

И ещё одно дополнительное условие принадлежности к диагнозу D^* :

$$\rho_{i-D^*} < \max \rho_{i'-D^*}, \quad (1.45)$$

$$\text{где } \rho_{i'-D^*} = \max_{i'} \left(\sum_{l=1}^{m_l} |N_{l_{i'}} - N_{l_{D^*}}| + \sum_{S=1}^{m_S} |N_{S_{i'}} - N_{S_{D^*}}| \right)$$

$$\rho_{i-D^*} = \left(\sum_{l=1}^{m_l} |N_{l_i} - N_{l_{D^*}}| + \sum_{S=1}^{m_S} |N_{S_i} - N_{S_{D^*}}| \right)$$

Условие (1.45) – это условие попадания на выборке M проверяемого объекта в кластер с диагнозом D^* по условию близости номеров одноименных параметров; i -й объект должен быть ближе к D^* , чем самый дальний объект с D^* .

При развитии какого-либо процесса параметры проверяемого объекта ранжируют по их измеренным безразмерным значениям. Параметры в кластерах различных состояний (диагнозов) также ранжируют, но по средним значениям параметров:

$$\bar{\xi}_{l_{\pi}} = \frac{1}{M} \sum_{i'=1}^M \xi_{l_{i'\pi}}; \quad \bar{\xi}_{S_{\pi}} = \frac{1}{M} \sum_{i'=1}^M \xi_{S_{i'\pi}}, \quad l = \overline{1, m_l}; \quad S = \overline{1, m_S}$$

Выражение в круглых скобках – расстояния ρ_{D^*} (см. (1.44)), можно записать как расстояния до множества: расстояния i -го исследуемого объекта до каждого из объектов кластера с тем или иным диагнозом ($\pi = 1, 2, \dots, L$).

$$d(i, \pi) = \frac{1}{M} \left(\sum_{i'=1}^M \sum_{l=1}^{m_l} |N_{l_i} - N_{l_{i'\pi}}| + \sum_{i'=1}^M \sum_{s=1}^{m_s} |N_{s_i} - N_{s_{i'\pi}}| \right)$$

(1.44) можно представить и в виде сумм квадратов расстояний. Следует отметить, что условия системы РП (1.44) намного «устойчивее» общепринятых мер расстояний по неким значениям признаков (параметров), т.к. основаны на ранжировках номеров параметров, а не на расстояниях их случайных значений.

Для того, чтобы ΦC_{j^*} в РП (1.32) ÷ (1.34) и конечной системе РП (1.40) и (1.41) или (1.43) не зависела от каждого π -го диагноза, расстояние $d(i, \pi)$ необходимо представить опосредованно на базе либо опорного диагноза, либо произвольно заданной расстановки параметров в ряд и присвоения им номеров натурального ряда от 1 до m_l и от 1 до m_s . В этом случае неранжированная последовательность параметров проверяемого объекта и неранжированные последовательности этих же параметров объектов в обучающих кластерах с различными диагнозами (состояниями) будут сравниваться (различаться) через или относительно номеров натурального ряда одноименных параметров в указанной выше заданной их расстановке.

1.7. Функции состояния (ΦC_1 и ΦC_2)¹

1. Запишем словесную формулировку способа различия (сравнения) в формализованном виде.

$$\begin{aligned} d(i, 0) &= \sum_{l=1}^{m_l} |N_{l_i} - N_{l_0}| + \sum_{s=1}^{m_s} |N_{s_i} - N_{s_0}| \\ d(\pi, 0) &= \sum_{l=1}^{m_l} |N_{l_\pi} - N_{l_0}| + \sum_{s=1}^{m_s} |N_{s_\pi} - N_{s_0}| \quad (1.46) \\ \text{или } d(\pi, 0) &= \frac{1}{M} \left(\sum_{i'=1}^M \sum_{l=1}^{m_l} |N_{l_{i'\pi}} - N_{l_0}| + \sum_{i'=1}^M \sum_{s=1}^{m_s} |N_{s_{i'\pi}} - N_{s_0}| \right), \end{aligned}$$

¹ Подробнее о функциях состояний в медицинской диагностике см. разделы III.4 и III.5.

где N_{l_0} и N_{S_0} – номера l и S параметров при их заранее заданной расстановке или опорном диагнозе.

Расстояния $d(i, 0)$ и $d(\pi, 0)$ могут быть значительными, но их разность $\Delta d_{(i-\pi)} = d(i, 0) - d(\pi, 0)$ будет минимальной или близка к минимальной, если состояние $X_i \in D^* \equiv D_\pi$ и вероятностно-метрическая мера тангенса угла распознавания запишется как

$$tg\Theta_{1\pi i} = \frac{f[d(\pi, 0|i)/D_\pi]}{d(i, 0) - d(\pi, 0)}, \quad (1.47)$$

где $f[d(\pi, 0|i)/D_\pi]$ – оценка плотности вероятности величины $d(\pi, 0)$ при значении $d(i, 0)$; здесь $d(\pi, 0)$ выступает как один из ΦC_π , а $d(i, 0) \equiv \Phi C_i$. Формула (1.47) ВММБ аналогична (1.10).

Итак, $d(\pi, 0) \equiv \Phi C_{1\pi}$, $d(i, 0) \equiv \Phi C_{1i}$.

2. Суть метода построения ΦC_2 заключается в следующем. Опять строят ранжированные последовательности значений параметров вида l и S : $(\xi_{1l}, \xi_{2l}, \dots, \xi_{m_l})_0$ и $(\xi_{1S}, \xi_{2S}, \dots, \xi_{m_S})_0$ некоего опорного диагноза. Эти последовательности нумеруют числами натурального ряда от 1 до m_l и от 1 до m_S . Тогда для остальных диагнозов-эталонов и i -го объекта с \bar{G} состоянием последовательности, соответственно, средних значений параметров однотипных объектов с этими диагнозами и значений параметров i -го объекта, построенные в соответствии с номерами параметров опорного диагноза, окажутся неупорядоченными, неранжированными.

От номеров 1, 2, ..., m_l и 1, 2, ..., m_S откладывают $\bar{\xi}_{l\pi}^\delta$, $\bar{\xi}_{S\pi}^\delta$ диагнозов-эталонов и ξ_{li}^δ и ξ_{Si}^δ i -го диагностируемого объекта. Полученные точки соединяют, получая обобщенные конфигурационные кривые, где наибольшие значения, при неранжированности, могут оказаться в середине ряда 1, 2, ..., m_l или 1, 2, ..., m_S . Понятно, что разные диагнозы будут иметь и различные конфигурационные кривые, и тот диагноз, у которого эта кривая окажется более похожа на конфигурационную кривую i -го объекта, будет предпочтительным. Это высказывание математически можно выразить

разными способами. Один из них следующий: полученные конфигурационные кривые аппроксимируют линейной зависимостью: $\xi_l = C_l + d_l \cdot N_l$, $N_l = \overline{1, m_l}$ и $\xi_S = C_S + d_S \cdot N_S$, $N_S = \overline{1, m_S}$, где d_l и d_S – тангенсы углов наклона аппроксимирующих линий к осям нумерации; коэффициенты C_l , d_l и C_S , d_S находят МНК.

Таким образом, за вторую ФС можно принять:

$$\Phi_{C_{2i|0,\Psi}} = \frac{\operatorname{tg}\varphi_{li}}{C_{li}} \Big|_{\Psi} + \frac{\operatorname{tg}\varphi_{Si}}{C_{Si}} \Big|_{\Psi}, \quad \Phi_{C_{2\pi|0}} = \frac{\operatorname{tg}\varphi_{l\pi}}{C_{l\pi}} + \frac{\operatorname{tg}\varphi_{S\pi}}{C_{S\pi}}, \quad (1.48)$$

где Ψ – номер проверки; здесь, вместо индекса « i » следует указать – « j_*i » – j_* -ю составную часть i -го объекта.

Если число параметров – m – велико, то за Φ_{C_1} можно принять $\operatorname{tg}\varphi_l/C_l$, а за Φ_{C_2} – $\operatorname{tg}\varphi_S/C_S$ или за Φ_{C_1} можно принять Φ_{C_l} – левые части сумм (1.46), а за $\Phi_{C_2} \equiv \Phi_{C_S}$ – правые. Это важно с позиции независимости параметров вида l и S и следующих в связи с этим соображений.

Необходимо заметить, что не вполне корректно выбирать в качестве двумерной или трехмерной функции ФС, основанные лишь на первом принципе распознавания, т.е. на одной метрической мере близости. Ведь в этом случае возможна корреляция двух (или трех) ФС, в результате чего все значения ФС диагнозов-эталонов, в виде точек на координатной плоскости, выстроятся вблизи линии корреляции с коэффициентом корреляции $r \approx 1$, а не займут большую часть «координатного поля». Во избежание корреляции необходимо ФС строить как на первом, так и на втором принципах распознавания, а векторы состояний – на сочетании этих ФС, которые должны быть независимыми.

Напомним, что основа второго принципа в случае технической диагностики, – это соотношения ряда физических или физико-химических параметров объектов в эксплуатационных условиях или при определенных тестовых режимах при разных состояниях. В случае медицинской диагностики на основе обычных стандартных лабораторных анализов крови, – это соотношения различных сочетаний ОКО наборов параметров: общего

клинического, биохимического и иммунологического анализов крови (независимых наборов) при различных диагнозах (см. п. 3.4.2).

Поясняющий пример

При диагностировании технического объекта, имеющего $L = 20$ возможных состояний-диагнозов, было обнаружено, что вычисленное по измеренным безразмерным значениям параметров $ОКО_{j^*}$ j^* -ой составной части по РП (1.19) превысило C_n , т.е. состояние объекта перешло в неисправное. По обучающим выборкам построены кривые плотности вероятности $\Phi C_{1\pi}$ и $\Phi C_{2\pi}$ для кластеров (обучающих выборок) каждого π -го диагноза ($\pi \in L$).

Пусть конец вектора ΦC_{j^*i} i -го проверяемого объекта после n -ой проверки попал в области пересечения двумерных плотностей распределений ΦC 8-ми диагнозов, т.е. $L_C = 8$. Известно, что эти диагнозы имеют следующие априорные вероятности $P(D_\pi)$ появления, внесенные в табл. 1.

Таблица 1.

Диагнозы	$P(D_\pi)$	$U = \text{tg}\theta_{1\pi} \cdot \text{tg}\theta_{2\pi}$	$ОДО_\pi$	Диагнозы	$P(D_\pi)$	$U = \text{tg}\theta_{1\pi} \cdot \text{tg}\theta_{2\pi}$	$ОДО_\pi$
D_1	0,05	2,1	0,105	D_5	0,12	2,75	0,33
D_2	0,08	50,6	4,048	D_6	0,05	0,51	0,025
D_3	0,08	0,014	0,005	D_7	0,06	23,5	1,41
D_4	0,11	38,8	4,268	D_8	0,03	0,13	0,004

Требуется с высокой вероятностью $P_n \geq 0,96$ поставить истинный диагноз, обнаружив начавшееся повреждение, если вычисленная по формуле (1.22) ВММБ состояния j^* -ой составной части объекта к каждому из 8-ми диагнозов имеет следующие значения, также внесенные в табл. 1.

1. По ф-ле (1.23) получим, соответственно, 8 значений $ОДО_\pi$ и запишем их в табл. 1.

2. Из табл. 1 видно, что диагнозы по наибольшим значениям $ОДО_\pi$ располагаются в следующей последовательности: $D_4; D_2; D_7; D_5; D_1; D_6; D_3; D_8$.

3. Переобозначим номера диагнозов таким образом, чтобы диагноз с max $ОДО_{\pi}$ имел номер 1 и т.д.: $D_4 \equiv D_1$; D_2 – остается со своим номером; $D_7 \equiv D_3$; $D_5 \equiv D_4$; $D_1 \equiv D_5$; D_6 и D_8 – со своими номерами; $D_3 \equiv D_7$.

Записываем ранговую цепочку предпочтения диагнозов (1.28):

$$D_1 \succ D_2 \succ \dots \succ D_8.$$

4. Для того, чтобы определить сколько н.в.д. (Ω) следует выбрать для установления истинного диагноза с $P_n \geq 0,96$, необходимо вычислить апостериорные вероятности этих диагнозов по ф-ле (1.24), где вместо L будет $L_C = 8$, поскольку $L - L_C = 20 - 8 = 12$ диагнозов оказались «нулевыми». Вычисленные значения $P_a(D_{\pi}/\Theta_{\pi})$ вносим в таблицу 2.

Таблица 2.

Диагнозы	$P_a(D_{\pi}/\Theta_{1\pi}, \Theta_{2\pi})$	Диагнозы	$P_a(D_{\pi}/\Theta_{1\pi}, \Theta_{2\pi})$
D_1	0,4186	D_5	0,010
D_2	0,397	D_6	0,0025
D_3	0,1384	D_7	0,0005
D_4	0,0325	D_8	0,0004

5. Далее, для того, чтобы было выполнено неравенство (1.30), т.е. $P_n \geq P_3 = 0,96$, необходимо вычислить значения

$$P_n = \sum_{\pi=1}^{\Omega} P_a(D_{\pi}/\Theta_{\pi}) = \sum_{\pi=1}^{\Omega} \frac{ОДО_{\pi}}{\sum_{\pi=1}^{L_C=8} ОДО_{\pi}}$$

последовательно при $\Omega = 3, 4, 5$ н.в.д., проверяя условие (1.30). Это условие выполняется при $\Omega = 4$: $\sum_{\pi=1}^{\Omega=4} P_a(D_{\pi}/\Theta_{\pi}) = P_n = 0,987 > P_3 = 0,96$.

Мы видим, что после n -ой проверки только два диагноза: D_1 и D_2 с $P_{\Sigma} = 0,816$ претендуют на «звание» истинного, причем D_1 имеет бóльшую апостериорную вероятность.

6. После проведения второй ($n+1$ -ой) проверки $U(D_1)_{n+1} = 42,65$, $U(D_2)_{n+1} = 57,8$, а апостериорные вероятности диагнозов D_1 и D_2 с учетом нового положения конца результирующего вектора состояния, составили, соответственно, $P_a(D_1/\Phi C)_{n+1} = 0,473$ и $P_a(D_2/\Phi C)_{n+1} = 0,466$ и казалось бы, что истинный диагноз – D_1 , ибо апостериорные вероятности D_1 были больше

как при n -ой, так и при $n+1$ -ой проверках. Но РП (1.34) показывает, что истинным диагнозом является D_2 , так как

$$\lambda_{1,n+1} = \frac{0,473}{0,4186} |_{D_1} = 1,13 < \lambda_{2,n+1} = \frac{0,466}{0,397} |_{D_2} = 1,174 \text{ и } X_{j^*} \in D_2 \equiv D_{И}.$$

То, что истинным диагнозом является $D_2 \equiv D_{И}$ подтверждает основное РП (1.40), применение которого экономит расчетное время установления $D_{И}$, так как не вычисляются апостериорные вероятности диагнозов. В результате вычислений по РП (1.40) имеем

$$R_{i|D_2} = \frac{U_{D_2,n+1}}{U_{D_2,n}} = \frac{57,8}{50,6} = 1,142; \quad R_{i|D_1} = \frac{U_{D_1,n+1}}{U_{D_1,n}} = \frac{42,65}{38,8} = 1,099$$

т. е. $R_{i|D_2} > R_{i|D_1}$ и $D_2 \equiv D_{И}$

И по условию (1.43) $\gamma = \frac{1,142}{1,099} = 1,039$. Если принять $\gamma_{п} = 1,03$, то $\gamma = 1,039 > \gamma_{п}$ и диагноз D_2 действительно истинный.

«Перевес» D_2 получился благодаря большему значению ВММБ. Столь небольшой перевес объясняется тем, что $P(D_1) > P(D_2)$ и центры $\overline{\Phi C}_{D_1}$ и $\overline{\Phi C}_{D_2}$ расположены близко друг от друга с наибольшим пересечением областей этих диагнозов.

Если есть возможность, то проводят 2-ую ε -проверку, при которой истинность D_2 будет доказана неравенством (1.41).

Сознательно приведен пример утрированно сложного случая распознавания.

Преимущества вероятностно-метрического подхода

В условиях преобладания неспецифичных, малоинформативных параметров (признаков) и при наличии помех с доминированием случайной составляющей, только ВМП может позволить при двух, трех периодических ε -проверках с высокой вероятностью поставить правильный, истинный диагноз или спрогнозировать «поведение» исследуемого процесса.

При одном и том же числе выбранных информативных параметров вероятность правильной постановки диагноза на множестве диагнозов при

использовании ВМП будет выше по сравнению с известными методами дискриминантного анализа.

Выводы к главе I

1. РП (1.31) ÷ (1.34) и конечная система РП (1.40) и (1.41) или (1.43) наглядно показывают «симбиоз», а точнее, синтез вероятностного и метрического подходов распознавания, их единение, характеризующее ВМП.

2. Истинный диагноз имеет максимальное значение динамического отношения ВММБ.

3. ОКО, введенное ранее [34] в процесс распознавания, сводит многомерность параметров к одной обобщенной оси, к одному обобщенному параметру, каким ОКО и является.

4. Созданные функции состояния (ФС) – математико-диагностические модели позволят без применения аппарата линейного дискриминантного анализа Фишера, рассчитанного на нормальное распределение, и не приспособленного для разделения множества пересекающихся диагнозов, – эти диагнозы разделить и с использованием введенной в ВМП распознавания состояний ВММБ с высокой вероятностью установить $D_{и}$ у проверяемого объекта.

5. Метод вычеркивания (удаления) ложных диагнозов позволит за несколько ε -проверок (шагов) установить $D_{и}$, т.е. при этом методе результирующий двумерный (две ФС) или трехмерный (три ФС) вектор ФС проверяемого объекта укажет на его истинный диагноз за некоторое число шагов.

Приложение главы I

Другой вариант вероятностно-метрической меры близости (ВММБ)

В работе [34] и разделе I.1 была введена ВММБ, объединяющая, как видно из её названия, вероятностную и метрическую меры близости. Приведем еще раз ее базисную формулу

$$U = \frac{f(\Phi C_i / D_\pi)}{|\Phi C_i - \overline{\Phi C_\pi}|}, \quad (\text{П. 1})$$

где $f(\Phi C_i / D_\pi)$ – оценка плотности вероятности ΦC объектов с состоянием (диагнозом) – D_π при значении ΦC_i i -го проверяемого объекта при условии, что состояние этого объекта принадлежит D_π , $i = \overline{1, M}$, $\pi = \overline{1, L}$.

В знаменателе ф-лы (П. 1) метрическая мера близости, чтобы не иметь неопределенность при $\Phi C_i = \overline{\Phi C_\pi}$ (при делении на 0), может быть представлена в виде

$$\mu = 1 + |\Phi C_i - \overline{\Phi C_\pi}|$$

или в более усиленном варианте

$$\mu_y = 1 + a |\Phi C_i - \overline{\Phi C_\pi}|^n, \quad (\text{П. 2})$$

где $a > 1, n > 0$ – коэффициенты, значения которых подбирают экспериментально в ходе обучения.

С учетом (П. 2) перепишем (П. 1) следующим образом

$$U = f(\Phi C_i / D_\pi) \cdot \frac{1}{1 + a |\Phi C_i - \overline{\Phi C_\pi}|^n}. \quad (\text{П. 3})$$

Но второй сомножитель формулы (П.3) представляет собой $K(\Phi C_i, \overline{\Phi C_\pi})$ – модифицированную потенциальную функцию [39], где вместо векторов признаков (параметров) введены – ΦC_i и $\overline{\Phi C_\pi}$. В этом случае ВММБ будет являться произведением вероятностной меры близости на модифицированную потенциальную функцию, т.е.

$$U = f(\Phi C_i / D_\pi) \cdot K(\Phi C_i, \overline{\Phi C_\pi}) = \frac{f(\Phi C_i / D_\pi)}{1 + a |\Phi C_i - \overline{\Phi C_\pi}|^n}. \quad (\text{П. 4})$$

В формуле (П. 4) $K(\Phi C_i, \overline{\Phi C_\pi})$ входит составной частью в ВММБ. При совпадении ΦC_i и $\overline{\Phi C_\pi}$ ВММБ максимальна: определяется максимальным значением вероятностной меры близости – $f(\Phi C_i / D_\pi)$ при нормальном законе распределения, а максимальная вероятностная дискриминантная функция (ВДФ)

$$\max \text{ВДФ} = P(D_\pi) \cdot f(\Phi C_i / D_\pi),$$

где $P(D_\pi)$ – априорная вероятность диагноза D_π .

Из сравнения (П. 1) и (П. 4) видно, что ВММБ (П. 1), а тем более ее запись через $tg\theta$ (см. (1.10)), обладает большей «чувствительностью» к изменению ΦC_i , однако она не определена при $\Phi C_i = \overline{\Phi C_\pi}$.

Отношения правдоподобия и ВММБ

Модифицированное отношение правдоподобия (МОП) для двух состояний (диагнозов) запишем в виде

$$\text{МОП} = f(\Phi C_i/D_1)/f(\Phi C_i/D_2).$$

МОП отличается от отношения правдоподобия тем, что вместо вектора параметров (признаков) применяется ΦC от измеренных безразмерных значений и нумерации параметров в ранжированных по их значениям рядах, т.е. – математико-диагностическая модель состояния (диагноза).

Отношение ВММБ для двух диагнозов

$$\mu_i = \frac{U(\Phi C_i/D_1)}{U(\Phi C_i/D_2)} \quad (\text{П. 5})$$

Подставляя ВММБ из формулы (П.1) в (П.5), получим

$$\mu = \frac{f(\Phi C_i/D_1)}{|\Phi C_i - \Phi C_1|} \cdot \frac{|\Phi C_i - \Phi C_2|}{f(\Phi C_i/D_2)} = \frac{f(\Phi C_i/D_1)}{f(\Phi C_i/D_2)} \cdot \frac{|\Phi C_i - \Phi C_2|}{|\Phi C_i - \Phi C_1|}$$

или

$$\mu = \text{МОП} \frac{|\Phi C_i - \Phi C_2|}{|\Phi C_i - \Phi C_1|} \quad (\text{П. 6})$$

Вывод приложения

1. Потенциальная функция $K(\Phi C_i, \overline{\Phi C_\pi})$ входит составной частью в ВММБ, представленную формулой (П. 4).

2. Отношение правдоподобия и МОП, как видно из формулы (П.6), входят составной частью в отношение ВММБ.

Таким образом, и потенциальная функция и отношение правдоподобия являются частными случаями ВММБ и ее отношения.

ГЛАВА II. МЕТОДЫ РАСПОЗНАВАНИЯ СОСТОЯНИЙ. СВЯЗЬ ЧИСЛА НАИБОЛЕЕ ВЕРОЯТНЫХ ДИАГНОЗОВ И ВЕРОЯТНОСТИ УСТАНОВЛЕНИЯ ИСТИННОГО С ЧИСЛАМИ ПРОВЕРОК И ПАРАМЕТРОВ

II.1. Введение к главе II

Эта глава, как и последующие, продолжает знакомить читателя с новыми методами математической диагностики, реализующими в большинстве своем первый и третий принципы распознавания состояний. Приведены два качественно отличных друг от друга метода, основанных на первом принципе, но использующих разные математические построения.

Вторая часть в названии главы носит обобщающий характер. Ее смысл заключается в показе общности и взаимосвязи нескольких множеств: параметров, состояний (диагнозов) и проверок (контроля состояний), раскрытии природы установления истинного диагноза ($D_{и}$) при увеличении числа проверок и параметров, подытоживании результатов теоретических исследований в двух первых главах книги.

Вероятностно-метрический подход (ВМП) и его РП, изложенные в главе I, разработаны для самого худшего с точки зрения надежности распознавания и прогноза состояния случая: множества малоинформативных косвенных параметров и одноразовых измерений параметров, когда случайности и неопределенности возникают в том числе и из-за невозможности проведения многократных измерений параметров (признаков), характеризующих состояния объектов (процессов), при их очередном диагностировании (проверке, контроле). Однократные (реже, двукратные) измерения проводят (с целью экономии) при большом числе измеряемых параметров (от 100 и выше), при дорогостоящих проверках сложных технических объектов, систем, технологических процессов. Так же только единичные измерения параметров возможны при диагностировании ранних стадий онкологических заболеваний,

приводящих к постепенному отказу организма, и при краткосрочном прогнозе землетрясений¹.

В других случаях рассмотрим возможность нескольких и более (до $7 \div 10$) измерений каждого параметра за одну проверку (диагностирование), в результате чего случайная составляющая в значительной степени подавляется, а надежность распознавания повышается.

Основные задачи данной главы: 1) показать, что при большом числе параметров и многократных их измерениях разделение диагнозов-эталонов, на основе первого принципа и принципа 3а распознавания состояний (см. п. I.1), вполне осуществимо и постановка $D_{и}$ не вызывает особых затруднений, ведь эти принципы дают ключ к его установлению у i -го проверяемого объекта. Код $D_{и}$ должен совпасть с кодом диагноза-эталона, к которому принадлежит состояние диагностируемого объекта, равно как должны максимально совпасть одноименные параметры i -го объекта и диагноза-эталона в различных интервалах ранжировок параметров и 2) – другой задачей является иллюстрация и анализ зависимостей вероятности установления $D_{и}$ и числа наиболее вероятных диагнозов (н.в.д.) от числа параметров – m и числа проверок.

II.2. Метод конгруэнции (совпадения) кодов²

2.2.1. Преамбула метода

Метод, изложенный ниже, реализует первый принцип распознавания состояний и предлагает кодовое различие диагнозов наборами номеров ранжированных параметров.

Этот метод можно назвать также методом «нулевых расстояний» (между состоянием диагностируемого объекта и $D_{и}$).

¹ Дело в том, что в первом случае человека нельзя принудить более одного раза за полгода сдавать анализы крови (измерение других параметров другими способами значительно дороже, а порой и небезопасно), а во втором, – поскольку землетрясения подобны внезапному отказу, можно просто не успеть сделать более одного, двух измерений.

² Является разновидностью, развитием метода вычисления оценок [41]. Имеет другое РП, при котором отказ от распознавания не возможен. Дальнейшее развитие метода см. п. II.5 с нечисловой мерой близости и своим РП. Коды метода – разнотипные.

В главе I, п. I.7 приведены две функции состояния (ФС), полученные различными методами. Для простоты рассмотрим одномерный случай, в смысле одной ФС, определяемой формулами расстояний между номерами одноименных параметров

$$d(i, 0) = \sum_{r=1}^m |N_{r_i} - N_{r_0}|, \quad (2.1)$$

$$d(\pi, 0) = \sum_{r=1}^m |N_{r_\pi} - N_{r_0}|, \quad (2.2)$$

где $d(i, 0) \equiv \Phi C_i$, а $d(\pi, 0) \equiv \overline{\Phi C_\pi}$; $\pi = \overline{1, L}$; $i = \overline{1, M}$; L – число диагнозов-эталонов, i – объект диагностирования; $r = \overline{1, m}$ – r -й параметр; m – число выбранных параметров; N_{r_i} и N_{r_π} – номера одноименных параметров в ранжированных рядах параметров состояний проверяемого объекта и кластеров диагнозов-эталонов; N_{r_0} – номер r -го параметра при заранее заданной расстановке или опорном диагнозе, относительно которого расставляются номера параметров всех остальных диагнозов и i -го объекта.

Расстояние между точками с состоянием i -го объекта и D_π получим, вычитая из (2.1) (2.2)

$$\rho(i, \pi) = d(i, 0) - d(\pi, 0) = \Phi C_i - \overline{\Phi C_\pi}. \quad (2.3)$$

ΦC_i и $\overline{\Phi C_\pi}$ – соответственно, функция состояния i -го объекта диагностирования и статистический центр рассеяния ФС по кластеру, представляющий собой «центр тяжести» области π -го диагноза по выборке или ее медиану при состоянии (диагнозе) D_π .

Вообще, ФС, представленные формулами (2.1) и (2.2) – это созданные на основе первого принципа математико-диагностические модели различных состояний, зависящих от значений выбранных параметров, измеряемых при диагностировании. В общем виде (см. п. I.1)

$$\Phi C = \varphi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m, N_1, N_2, \dots, N_m),$$

где ξ_1, ξ_m – измеряемые значения параметров, приведенные к безразмерному виду для удобства их сравнения, ибо параметры в большинстве

своем имеют разные размерности; N_1, N_m – порядковые номера параметров в ранжированных по их значениям рядах.

Безразмерность параметров можно получить через следующие отношения, например:

$$\overline{\xi_{r_\pi}^\delta}^{-1} = \overline{\xi_{r_\pi}} / \overline{\xi_{r_H}}, \xi_{r_i}^\delta = \xi_{r_i} / \overline{\xi_{r_H}},$$

где $\overline{\xi_{r_\pi}}$ и ξ_{r_i} – выборочное среднее арифметическое значение r -го параметра в кластере с диагнозом D_π и измеренное случайное значение r -го параметра у i -го диагностируемого объекта;

$\overline{\xi_{r_H}}$ – номинальное (нормативное) значение r -го параметра или среднее значение r -го параметра в кластере новых, исправных однотипных объектов.

Если параметры безразмерны, то их можно свести к одной безразмерной оси.

В главе I рассматривались параметры, значения которых с развитием деструктивных процессов имели тенденции, как к возрастанию, так и к убыванию. Для простоты и снижения громоздкости формул рассмотрим лишь параметры с тенденцией к росту, подразумевая, что изложенное ниже относится и к параметрам с тенденцией к убыли.

2.2.2. Математическая основа метода конгруэнции (совпадения) кодов

Считаем, что у диагностируемого объекта уже выявлено неисправное состояние. Решающее правило (РП) его установления дано в п. I.4, формула (1.19). Требуется определить конкретную возникшую неисправность, т.е. установить истинный диагноз у этого объекта из L возможных.

Если какой-либо объект принадлежит кластеру с диагнозом D_π , то в идеале ранжированные последовательности его параметров и по кластеру в целом должны совпадать.

Проводят ранжировку параметров в кластерах каждого диагноза по средним арифметическим значениям параметров. Для этого:

¹ Далее в тексте индекс « δ » опускаем.

1. Вычисляют средние арифметические значения параметров в кластере с π -м диагнозом

$$\bar{\xi}_{1\pi} = \frac{1}{K} \sum_{i'=1}^K \xi_{1i'\pi}; \bar{\xi}_{2\pi} = \frac{1}{K} \sum_{i'=1}^K \xi_{2i'\pi}; \dots; \bar{\xi}_{r\pi} = \frac{1}{K} \sum_{i'=1}^K \xi_{ri'\pi}; \dots;$$

$$\bar{\xi}_{m\pi} = \frac{1}{K} \sum_{i'=1}^K \xi_{mi'\pi},$$

где K – число объектов в кластере с π -м диагнозом, примем $K = const$; $i' = \overline{1, K}$; $r = \overline{1, m}$; $\pi = \overline{1, L}$.

2. Проводят ранжировку $\bar{\xi}_{r\pi}$ и номеров – $N_{r\pi}$. Допустим, что

$$\bar{\xi}_{1\pi} < \bar{\xi}_{2\pi} < \dots < \bar{\xi}_{r\pi} < \dots < \bar{\xi}_{m\pi}. \quad (2.4)$$

Тогда ранжировка¹ параметров, обозначенных номерами из чисел натурального ряда от 1 до m , будет подобна (2.4), т.е.

$$\begin{array}{cccccc} 1_{11}, & 2_{21}, & \dots & N_{r1}, & \dots & m_{m1}, \\ N_{12}, & N_{22}, & \dots & N_{r2}, & \dots & N_{m2}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ N_{1\pi}, & N_{2\pi}, & \dots & N_{r\pi}, & \dots & N_{m\pi}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ N_{1L}, & N_{2L}, & \dots & N_{rL}, & \dots & N_{mL}; \end{array} \quad (2.5)$$

где первая строка – нумерация первого (опорного) диагноза; 1_{11} – номер первого параметра первого (опорного) диагноза; m_{m1} – номер m -го параметра первого (опорного) диагноза; $N_{r1} \neq N_{r2} \neq \dots \neq N_{r\pi} \neq \dots \neq N_{rL}$; элемент матрицы (2.5) – $N_{r\pi}$ – номер r -го параметра объекта с π -м диагнозом; это означает, например, что $N_{12} \vee \dots \vee N_{1\pi} \vee \dots \vee N_{1L}$ не обязательно будут равны 1; r – наименование параметра; N_r – его номер.

Строки матрицы (2.5) – суть коды диагнозов, представляющие собой наборы номеров параметров.

Для всех объектов кластера с диагнозом D_π ранжировка их параметров (числовой код) теоретически (при отсутствии случайностей) должна быть одна и та же и отлична от кодов объектов с другими диагнозами, т.е.

¹ Ранжировку проводят относительно опорного диагноза, у которого ранжировка соответствует 1, 2, ... m . Тогда в остальных строках матрицы последовательность чисел уже не будет упорядоченной.

$$\forall i' \in D_{\pi} \left(N_{1_{i'\pi}}, N_{2_{i'\pi}}, \dots, N_{m_{i'\pi}} \right) = \left(N_{1_{\pi}}, N_{2_{\pi}}, \dots, N_{m_{\pi}} \right).$$

Но это возможно только при математических ожиданиях или выборочных средних арифметических значениях параметров у i' -го объекта (при малой дисперсии и неоднократных измерениях параметров), т.е. тогда, когда будет соблюдена цепочка неравенств

$$\begin{aligned} \overline{\xi_{1_{i'\pi}}} &= \frac{1}{n} \sum_{\varepsilon=1}^n \xi_{1_{\varepsilon i'\pi}} < \overline{\xi_{2_{i'\pi}}} = \frac{1}{n} \sum_{\varepsilon=1}^n \xi_{2_{\varepsilon i'\pi}} < \dots < \overline{\xi_{r_{i'\pi}}} = \frac{1}{n} \sum_{\varepsilon=1}^n \xi_{r_{\varepsilon i'\pi}} < \dots < \overline{\xi_{m_{i'\pi}}} = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{\varepsilon=1}^n \xi_{m_{\varepsilon i'\pi}}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где n – число измерений r -го параметра за одно диагностирование; $\xi_{r_{\varepsilon i'\pi}}$ – случайное значение r -го параметра при ε -м измерении у i' -го объекта с π -м диагнозом; $\varepsilon = \overline{1, n}$; $r = \overline{1, m}$; $i' = \overline{1, K}$ и $\pi = \overline{1, L}$.

Ранжировку параметров в матрице (2.5) для кластеров с различными диагнозами-эталонами можно провести и по уточненным значениям $\overline{\xi_{r\pi}}$ по формулам

$$\overline{\xi_{r\pi}} = \frac{1}{K \cdot n} \sum_{i'=1}^K \sum_{\varepsilon=1}^n \xi_{r_{\varepsilon i'\pi}}. \quad (2.6б)$$

Все диагнозы в матрице (2.5) оказываются разделенными со своими числовыми кодами. Согласно неравенствам (2.6), чтобы надежно диагностировать состояние i -го предъявляемого объекта ($i \neq i'$) также следует n раз измерить каждый из m параметров и определить для них выборочные средние арифметические значения: $\overline{\xi_{1_i}}, \overline{\xi_{2_i}}, \dots, \overline{\xi_{r_i}}, \dots, \overline{\xi_{m_i}}$ по формуле, аналогичной (2.6), где будет отсутствовать только индекс « π ». Полагаем, что возможно осуществить $n = 6 \div 7$ измерений, при этом необходимо, чтобы эти измерения были бы независимыми: интервалы между измерениями должны быть больше интервала корреляции.

Если $\overline{\xi_{1_i}} < \overline{\xi_{2_i}} < \dots < \overline{\xi_{r_i}} < \dots < \overline{\xi_{m_i}}$, то и ранжировка параметров с соответствующими номерами будет:

$$N_{1_i}, N_{2_i}, \dots, N_{r_i}, \dots, N_{m_i}; N_{r_i} \neq N_{r_{\pi}}. \quad (2.7)$$

Чтобы установить принадлежность состояния i -го объекта к тому или иному диагнозу-эталону надо сравнить ранжировку (2.7) (код состояния i -го объекта) с каждой из строк ранжировок (2.5). Конгруэнция (совпадение) ранжировок состояния i -го объекта и D_* диагноза будет означать отнесение состояния объекта к этому диагнозу и его истинность.

РП установления D_{II} отличается от РП, приведенных в п. 1.6 и согласно (2.3) с учетом (2.1) и (2.2), представлено в виде

$$\begin{aligned} \rho(i, D_*) &= d(i, 0) - d(D_*, 0) = \sum_{r=1}^m |N_{ri} - N_{r0}| - \sum_{r=1}^m |N_{rD_*} - N_{r0}| = \\ &= \sum_{r=1}^m |N_{ri} - N_{rD_*}| \vee |N_{1i} - N_{1D_*}| \wedge |N_{2i} - N_{2D_*}| \wedge \dots \wedge |N_{mi} - N_{mD_*}| = 0 \\ &\rightarrow X_i \in D_* \equiv D_{II}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где X_i – состояние i -го объекта; \rightarrow – знак импликации; $D_* \in L$.

Если при какой-то проверке, после проведенных подряд n измерений m параметров, окажется, что динамика каждого параметра имеет ярко выраженную тенденцию к росту, что свидетельствует о прогрессирующем развитии неисправности и является предвестником внезапного отказа, то, не прибегая к обработке данных (2.4) ÷ (2.8), объект следует немедленно снять с эксплуатации. Это условие в виде символов можно записать так

$$(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_m > 1) \wedge (v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_m > 0) \rightarrow \downarrow O_i,$$

где α_r и v_r – значения коэффициентов степенной аппроксимирующей функции; α_r и v_r находят МНК; O_i – i -й объект; \downarrow – знак, обозначающий снятие с эксплуатации с целью текущего ремонта (введен автором).

Если это условие соблюдается лишь на половину, то причину неисправности выясняют по РП (2.8) с составлением кода состояния i -го объекта.

Практически 100%-я надежность установления D_{II} по РП (2.8) возможна, если будут иметь место следующие неравенства:

$$\begin{aligned}
\bar{\xi}_{1i} + \frac{t(n-1, P_g = 0,99)^1}{\sqrt{n}} \sigma_1 &< \bar{\xi}_{2i} - \frac{t(n-1, P_g = 0,99)}{\sqrt{n}} \sigma_2; \\
\bar{\xi}_{2i} + \frac{t(n-1, P_g = 0,99)}{\sqrt{n}} \sigma_2 &< \bar{\xi}_{3i} - \frac{t(n-1, P_g = 0,99)}{\sqrt{n}} \sigma_3; \dots; \\
\bar{\xi}_{r-1i} + \frac{t(n-1, P_g = 0,99)}{\sqrt{n}} \sigma_{r-1} &< \bar{\xi}_{ri} - \frac{t(n-1, P_g = 0,99)}{\sqrt{n}} \sigma_r; \\
\bar{\xi}_{m-1i} + \frac{t(n-1, P_g = 0,99)}{\sqrt{n}} \sigma_{m-1} &< \bar{\xi}_{mi} - \frac{t(n-1, P_g = 0,99)}{\sqrt{n}} \sigma_m,
\end{aligned} \tag{2.9}$$

где σ_r – среднее квадратическое отклонение r -го параметра по выборке n . Его несмещенная оценка вычисляется по известной формуле

$$\sigma_{ri} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{\varepsilon=1}^n (\xi_{r\varepsilon i} - \bar{\xi}_{ri})^2}.$$

Число неравенств в (2.9) будет $m-1$, поэтому в $r-1$ -м неравенстве нумерация r начинается с двойки. Условия (2.9) возможны, как было отмечено выше, при малой дисперсии параметров.

Неравенства (2.9) означают, что интервалы $\left[\bar{\xi}_{r-1i}; \bar{\xi}_{r-1i} + \frac{t(n-1, P_g=0,99)}{\sqrt{n}} \sigma_{r-1} \right]$ и $\left[\bar{\xi}_{ri} - \frac{t(n-1, P_g=0,99)}{\sqrt{n}} \sigma_r; \bar{\xi}_{ri} \right]$ не должны перекрывать друг друга, при этом первый интервал находится на оси ξ левее второго, так как $\bar{\xi}_{r-1i} < \bar{\xi}_{ri}$. Иначе, если будет перекрытие, может случиться так, что станет возможным $\bar{\xi}_{ri} < \bar{\xi}_{r-1i}$ и нарушится код состояния i -го объекта, которое по РП (2.8) будет принадлежать уже диагнозу π' ($\pi' \neq \pi$).

В случае соблюдения неравенств (2.9) ранжировка параметров с формированием различных кодов диагнозов уже будет не случайной, что и позволит с $P \approx 1$ установить D_{II} проверяемого объекта.

Вопрос о том, как поступать в случае не соблюдения условия (2.9) рассмотрим в следующих разделах: 2.2.3 и 2.2.4.

¹ $t(n-1, P_g = 0,99)$ – квантиль распределения Стьюдента с $(n-1)$ степенями свободы и доверительной вероятностью $P_g = 0,99$. Считаем (условно), что это значение обеспечивает не перекрытие интервалов.

2.2.3. Анализ метода и соображения по поводу необходимого числа параметров и его связи с числом диагнозов L_1 ¹.

Согласно первого принципа можно, не прибегая к строгому математическому доказательству, понять, что чем большее число параметров (признаков), в т.ч. и косвенных, будут характеризовать состояние того или иного объекта, тем из большего числа различных номеров параметров в ранжированных по их значениям рядах будут состоять шифры (коды) диагнозов-эталонов и, следовательно, тем легче их отличить друг от друга, что дает возможность надежного выделения истинного диагноза. Однако для исследователей несомненный интерес представляет определение необходимого числа – m наиболее значимых параметров объекта, характеризующих его состояние, а также выбор и ранжирование этих параметров по степени их значимости, весу в процессе диагностирования. Естественно, что на первые места в шеренге предпочтения (по весомости) следует поставить имеющиеся информативные параметры. Их число $m_{II} < m$; остальные $m - m_{II}$ параметры – косвенные, малоинформативные. Они расставляются после информативных в ранговой цепочке значимости, если число m_{II} оказывается недостаточным для надежного распознавания состояния объекта. Выбор наиболее значимых параметров из числа $m - m_{II}$ проводят подобно «максимину»: выбор наиболее значимых параметров из числа малоинформативных выполняют по цепи убывания значений весовых коэффициентов λ_r соответствующих параметров. Формулы для вычисления λ_r даны в главе III, п. III.2. Доминирующими при выборе являются параметры с наибольшими значениями, наибольшей динамикой при развитии той или иной неисправности (диагноза). Пусть эти параметры будут с большими номерами.

$$\text{Если } \max \lambda_m > \lambda_{m-1} \max - 1 > \dots > \lambda_r > \dots > \lambda_2 > \lambda_1, \quad (2.10)$$

¹ Остальные $(L - L_1)$ – «нулевые» и сравнивать код состояния i -го объекта с кодами $L - L_1$ диагнозов нет необходимости. В зависимости от ΦC_i объекта другие или часть других диагнозов из числа L_1 , которое может быть иным, занимают свое положение на интервале АВ (см. рис. 4). Вообще, при этом методе можно рассматривать и все L диагнозов, если не определено число L_1 (не построены плотности распределений $f(\Phi C/D_r)$).

то ранговая цепочка предпочтения выбора параметров $r(r = \overline{1, m})$

$$m > m - 1 > \dots > r > \dots > 1, \quad (2.11)$$

где $>$ – знак предпочтения параметру, стоящему слева.

Общее число m параметров при технической диагностике состояний определяется по формуле (1.16) для объектов, состоящих из множества составных частей. Что касается медицинской диагностики, диагностики заболеваний по ПК и М, то общее число параметров обычно задают равным числу М – объектов, в данном случае – пациентов, в кластерах с различными диагнозами, т.е. $m = M$ (в обозначениях формулы (2.6б) $M \equiv K$). Если $M = 40 \div 50$, то и $m = 40 \div 50$ (см. п. III.2).

Перейдем теперь к вопросу, поставленному в конце предыдущего раздела. Если одно, несколько или половина неравенств (2.9) окажутся с обратным знаком, то коды состояния i -го проверяемого объекта будут различными и его действительный истинный диагноз может оказаться «закамуфлированным», ложным (истинный диагноз – один, остальные $(L - 1)$ – ложные). Причина невыполнения условий (2.9) в этом случае – большие оценки дисперсий, возникших из-за разных негативных факторов, и из-за невозможности проведения более 3-х измерений каждого параметра за одну проверку.

Для выхода из сложившейся тупиковой ситуации применим следующий прием, оказавшийся методом в методе, который выведет на решение вопроса о необходимом числе параметров и его связи с числом имеющихся диагнозов.

Итак, что нужно сделать, чтобы в случае перекрытия интервалов $l_r = \left[\bar{\xi}_{r_i}, \bar{\xi}_{r_i} + \frac{t(n-1, P_g=0,99)}{\sqrt{n}} \sigma_r \right]$ и $l_{r+1} = \left[\bar{\xi}_{r+1_i} - \frac{t(n-1, P_g=0,99)}{\sqrt{n}} \sigma_{r+1}, \bar{\xi}_{r+1_i} \right]$ – левых и правых доверительных полуинтервалов, отнести состояние i -го объекта с вероятностью $P \approx 1$ к одному из диагнозов?

1. В качестве иллюстрации представим несколько из множества вариантов перекрытий обозначенных интервалов.

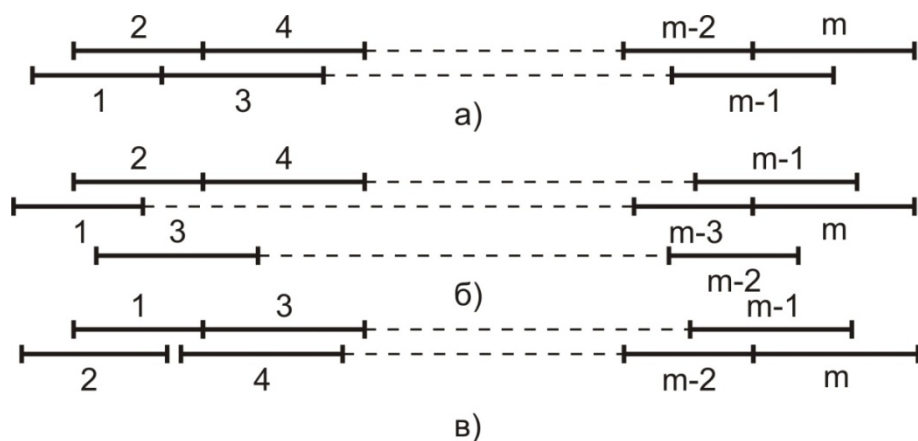


Рис. 7. Примеры возможных перекрытий интервалов; на рис. 7а и 7в показаны однократные перекрытия; возможны и многократные перекрытия, на рис. 7б – 2-ву-кратные.

Параметры с бóльшими номерами, начиная с $N = t$, являются главными, наиболее значимыми по (2.10), так как имеют наибольшие значения $\bar{\xi}$, и цепочка (2.11) указывает на это.

2. Для того чтобы добиться однозначности в ранжировке параметров i -го объекта, т.е. добиться инвариантности ранжировок при любом $\bar{\xi}_r$ на интервале, а именно это требование дает гарантию правильного установления диагноза при сравнении ранжировок (кодов) состояний i -го объекта со строками кодов диагнозов матрицы (2.5), – необходимо каким-то образом убрать, ликвидировать перекрытия. Раздвинуть интервалы нельзя, следовательно, надо удалить из кода состояния (ранжировки параметров), начиная с $t - 1$ -го, (ведь $\bar{\xi}_{m-1} < \bar{\xi}_m$) все параметры, которые создают перекрытия левых полуинтервалов параметров с бóльшими $\bar{\xi}_r$: на рис. 7а – это: $t - 1$ -й, $t - 3$, ... 3 и 1; оставить: t -й, $t - 2$ -й, ... 4-й и 2-й, так как их интервалы не перекрывают друг друга; на рис. 7б имеет место другая очередность параметров: имеем $\bar{\xi}_m > \bar{\xi}_{m-1} > \bar{\xi}_{m-2} > \bar{\xi}_{m-3}$, но интервалы параметров $t - 1$ и $t - 2$ перекрывают друг друга и интервал t , поэтому остаются параметры: t , $t - 3$, ... 4 и 2, а удаляются, соответственно, $t - 1$, $t - 2$, ... 3 и 1; на рис. 7в следует оставить параметры: t , $t - 2$, ... 3 и 1, а остальные удалить.

Оставшиеся во всех 3-х примерах ранжированные последовательности параметров и будут кодами возможных 3-х из L состояний i -го объекта.

Для сравнения кода состояния i -го объекта с кодами диагнозов следует оставить в строках матрицы (2.5) те же m_n параметров, обозначающих код состояния i -го объекта. Таким образом, матрица (2.5) должна быть преобразована в новую, с новым, сокращенным набором параметров (точнее, их номеров).

Переобозначим оставшиеся m_n параметров опорного диагноза номерами: 1, 2, ... m_n . Тогда матрица (2.5) трансформируется в матрицу ($m_n \times L_1$). Число параметров – m_n в определенных комбинациях их номеров – это новый m_n -значный код состояний i -го объекта и m_n -значные коды диагнозов-эталонов. При самом слабом «мягком» ограничении

$$m_{кр} \leq m_n \leq m, \quad (2.12)$$

где $m_{кр}$ – минимальное число параметров, ещё позволяющее разделить диагнозы.

Если число перекрытий параметров на рис. 7 (не путать с перекрытиями областей диагнозов) больше, то число удаляемых параметров тоже больше, а число оставшихся – меньше, которое может достигнуть – $m_{кр}$, тесно связанного с числом диагнозов – L ; $m_{кр}$ имеет предел – m_0 , которое находится из целочисленного решения неравенства $m_0! \geq L$. Это – теоретический случай, когда все диагнозы абсолютно гетерогенны (разнородны), абсолютно различны, не имея ничего общего, когда последний в ранжировке параметр при одном диагнозе может оказаться на первом месте в ранжировке параметров другого диагноза. В реальности диагнозы могут отличаться друг от друга «похожими» кодами.

Из неравенства (2.12) вытекает равенство

$$m_n = m - m_y \text{ или } m = m_n + m_y, \quad (2.13)$$

где m_y – число удаляемых параметров.

«Антиподом» указанного выше случая являются очень близкие коды диагнозов, связанные или обусловленные их (диагнозов) физическим или физико-химическим «родством», сходством, когда области диагнозов очень сильно пересечены. В этом случае коды могут отличаться, например, одной

транспозицией, причем соседних номеров, т.е. одной перестановкой (инверсией) лишь двух соседних номеров параметров. Приведем этот случай на примере и покажем, что для составления кодов L_1 диагнозов потребуется не более L_1 параметров, т.е. $m_n \leq L_1$.

Пример

Пусть имеется $m_n = 10$ параметров и начнем составлять коды с опорного диагноза: 1, 2, ..., 10. Осуществляя транспозицию параметров в кластерах с другими диагнозами, получим матрицу, которая окажется квадратной

$$\begin{array}{rcccccccccc}
 D_1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\
 D_2 & 1 & 3 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\
 D_3 & 2 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\
 D_4 & 1 & 2 & 4 & 3 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\
 D_5 & 1 & 2 & 3 & 5 & 4 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\
 D_6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 5 & 7 & 8 & 9 & 10 \\
 D_7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 7 & 6 & 8 & 9 & 10 \\
 D_8 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 8 & 7 & 9 & 10 \\
 D_9 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 9 & 8 & 10 \\
 D_{10} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 10 & 9
 \end{array} \tag{2.14}$$

Получилась квадратная матрица (10x10). Столбцы матриц (2.14) и (2.5) – суть номера одноименных параметров – $N_{rп}$. В матрице (2.14) $r = \overline{1, m_n}$, $m_n = 10$ и $L = 10$.

В каждом коде диагнозов (в каждой строке матрицы (2.14)) – всего одна перестановка. Следовательно, для того, чтобы все коды были разными, необходимо составлять их 10 раз. Но разные коды соответствуют разным диагнозам, а это означает, что число диагнозов $L_1 = m_n = 10$. Если число параметров увеличить на m_0 параметров, то будет сделано еще m_0 перестановок соседних диагональных параметров, т.е. будут составлены коды $m_n + m_0$ диагнозов. Этим показано, что $m_n \leq L_1$ ¹, так как число m_n параметров, превышающее L_1 , будет избыточным. Таким образом, в реальных случаях имеем следующее неравенство

$$m_0 < m_{кр} \leq m_n \leq L_1 \tag{2.15}$$

¹ Однако возможен случай с почти полностью пересекающимися диагнозами, число которых L_1 мало, а два диагноза почти неотличимы, имея один и тот же код из нескольких начальных цифр. Только в этом случае $m_n > L_1$.

Приведем упрощенный пример применения РП (2.8) при установлении истинного диагноза для реального случая (2.15), когда $m_n < L_1$, а области диагнозов не сильно пересекаются и их отличие может выразиться в трех и более несовпадениях одноименных параметров. Пусть параметрами в количестве $m_n = 5$ составлены коды 8-ми диагнозов и образована матрица

$$\begin{array}{l|ccccc}
 D_1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
 D_2 & 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \\
 D_3 & 2 & 3 & 2 & 5 & 4 \\
 D_4 & 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\
 D_5 & 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \\
 D_6 & 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \\
 D_7 & 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \\
 D_8 & 1 & 3 & 2 & 4 & 5
 \end{array} \quad (2.16)$$

В ходе диагностирования i -го объекта выяснилось, что код его технического состояния составил: 1 2 3 5 4. Осуществляя проверку – сравнение номеров параметров в коде состояния i -го объекта с номерами одноименных параметров в столбцах матрицы (2.16), приходим к заключению, что $\rho(i, D_\pi) = 0$ при D_6 , т.е. $D_6 \equiv D_i$. Понятно, что при множестве параметров и диагнозов по РП (2.8) необходимо вычислить суммы для всех L диагнозов: $\sum_{r=1}^{m_n} |N_{r_i} - N_{r_1}|, \sum_{r=1}^{m_n} |N_{r_i} - N_{r_2}|, \dots, \sum_{r=1}^{m_n} |N_{r_i} - N_{r_\pi}|, \dots, \sum_{r=1}^{m_n} |N_{r_i} - N_{r_L}|$ и выбрать ту сумму, которая будет равна 0 (с диагнозом $D_* \equiv D_i$).

При гетерогенных, не сходных между собой состояниях (диагнозах) совершенно не обязательно, чтобы эти состояния характеризовались кодами, составленными из наборов одних и тех же m_n параметров. Число параметров может быть расширено до числа $m_p > m_n$. Но тогда уже следует отказаться от опорного диагноза и расставлять m_n параметров из числа или набора m_p в заранее заданной последовательности, ранжированной условно по неким усредненным значениям параметров по всем диагнозам. Эта последовательность и будет опорной. Этот случай – более благоприятный для разделения диагнозов, так как в строках образующей матрицы появятся другие параметры из числа $m_p - m_n$, создающие специфику, удобную для

распознавания. Приведем пример такой матрицы в качестве сопоставления с матрицей (2.16) в приведенном примере, где по-прежнему $m_n = 5$, а $m_p = 7$

	1	2	3	4	5	6	7
D_1	3	1	6	5	2		
D_2	2	4	1	7	3		
D_3	4	1	3	6	5		
D_4	1	3	5	7	6		
D_5	2	4	3	5	7		
D_6	3	2	1	4	5		
D_7	1	3	2	5	4		
D_8	2	4	5	3	6		

(2.166)

Из матрицы (2.166) видно, что ее строки (коды диагнозов) более различимы: они не содержат отдельных параметров, например, в коде D_1 по сравнению с кодом D_2 отсутствуют параметры №4 и №7, а в коде D_2 отсутствуют параметры №5 и №6 кода D_1 и т.д. Из набора m_p можно составить много больше кодов состояний. В предельном случае

$$L_{\text{пр}} = C_{m_p}^{m_p - m_n} m_n! = \frac{m_p!}{(m_p - m_n)!} = 2520.$$

В случае многократных перекрытий интервалов параметров и значительных пересечений областей диагнозов (матрица (2.14)) $\max m_n = L_1 \ll m_y$. Следовательно, общее начальное число параметров – m , согласно (2.13), должно быть значительным. Оценим, каким оно должно быть. Пусть интервал значений $\bar{\xi}_r$ r -го параметра, $r = \overline{1, m_n}$, имеет n_r перекрытий. Тогда все m_n интервалов m_n параметров будут содержать $m_y = \sum_{r=1}^{m_n} n_r$ перекрытий, т.е. m_y удаляемых параметров. С учетом (2.13)

$$m = m_n + \sum_{r=1}^{m_n} n_r \quad (2.17a)$$

когда $m_n \leq L_1$

$$m \leq L_1 + \sum_{r=1}^{m_n=L_1} n_r = A, \quad (2.176)$$

т.е. m не превышает A .

Формулы (2.17а), (2.17б) и ограничение (2.15) показывают связь общего числа – m параметров с числом имеющихся состояний (диагнозов) – L_1 .

2.2.4. Зависимость числа параметров от доверительной вероятности не перекрытия их интервалов

Еще раз заметим, что возможная вариация m_n от m_0 до L связана как с имманентными физическими или физико-химическими признаками сходства или различия диагнозов, так и с числом измерений параметров и их дисперсией.

Однако задаваемая в приведенном выше примере вероятность установления истинного диагноза $P_3 = 1$ – слишком жесткое требование, не налагаемое даже в области медицины при постановке диагноза или при диагностике и прогнозировании технического состояния пилотируемых космических кораблей. Поэтому снизим заданную вероятность до $P_3 = 0,95 \div 0,97$ и оценим число оставшихся параметров m_n . Уменьшение P_3 допускает незначительные перекрытия интервалов – m_n параметров. Ясно, что их число будет больше числа параметров – m_{n0} без перекрытий (см. рис. 8), что позволит составить коды диагнозов из большего числа номеров параметров.

На рис. 8 кривые плотности распределений условно изображены в виде нормального закона. В действительности они могут иметь различные законы распределения.

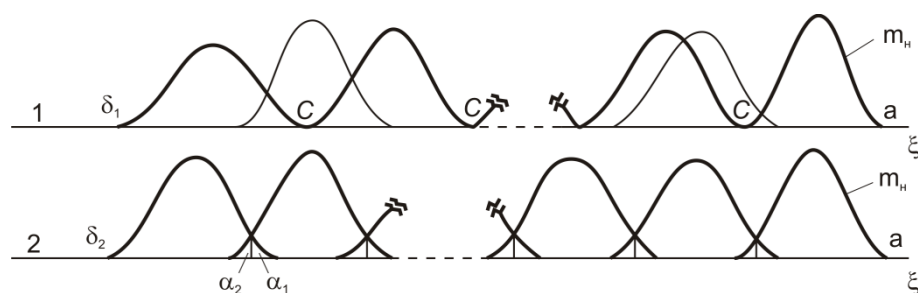


Рис. 8. Иллюстрация к определению m_n – числа параметров с перекрытиями (пересечением областей распределений величин $\bar{\xi}_r$); оси 1 и 2 – плотности распределений $\bar{\xi}_{r_1}$ и $\bar{\xi}_{r_2}$ параметров, соответственно, без пересечений и с пересечениями, $r_1 \neq r_2$; a – точка $\max \xi$; $\delta_1 \approx \delta_2$ (δ) – точка $\min \xi$; нежирными линиями на оси 1 показаны распределения тех параметров, которые включены в число m_n и попали на ось 2; $\alpha_1 \approx \alpha_2 = \alpha$; C – «демаркационные точки», разграничивающие интервалы.

$m_n > m_{n_0}$, так как они размещаются на одном и том же общем интервале $I_0 = \max \xi_{m_n} - \min \xi_1$. Допустим для простоты, что интервал $I_0 \approx I_{01} \approx I_{02} \approx \dots \approx I_{0\pi} \approx I_{0L}^1$. I_0 должно быть таким, чтобы m_{n_0} было не менее 3-х.

Считая полный непересекающийся интервал r -го параметра при $P_g = 0,99$ равным $I_r = \frac{2t(n-1, P_g=0,99)\sigma_r}{\sqrt{n}}$, и $\sigma_r \approx \sigma_{r_1} \approx \sigma_{r_2} \approx \dots \approx \sigma_{r_\pi} \approx \sigma_{r_L}$ исходя из рис. 8, можно составить следующее уравнение:

$$I_0 = \frac{2}{\sqrt{n}} \left\{ t(n-1, P_g) \sum_{r=1}^{m_n} \sigma_r - [t(n-1, P_g) - t(n-1, P_{g,и})] \cdot \sum_{r=1}^{m_n-1} \sigma_r \right\}, \quad (2.18)$$

где $m_n - 1$ – число интервалов перекрытий (пересечений); $P_{g,и}$ – фактическое искомое значение доверительной вероятности.

Второе уравнение, связывающее искомые величины m_n и $P_{g,и}$ с заданной вероятностью правильного диагностирования – P_3 , найдем из следующих соображений. Код диагноза составляется по ранжиру параметров, при котором значения каждого последующего в шеренге параметра больше значения предыдущего: $\bar{\xi}_{r+1} > \bar{\xi}_r$. Когда интервалы не перекрыты (ось 1 на рис. 8) переход $\bar{\xi}$ через «демаркационную» точку – «С» из одного интервала в другой не возможен. Но с перекрытием интервалов (ось 2) такой переход становится возможным с вероятностью $\alpha = \frac{1-P_{д.и.}}{2}$. Код диагноза будет изменен (нарушен) при одновременном осуществлении двух независимых событий: попадания $\bar{\xi}_r$ в $r + 1$ -й интервал с вероятностью $P_{r,r+1} = \alpha$ и попадания $\bar{\xi}_{r+1}$ в r -й интервал тоже с вероятностью α . Только в этом случае $\bar{\xi}_r > \bar{\xi}_{r+1}$ и произойдет изменение кода. Событие A_r , при котором на r -м перекрытии ($r = \overline{1, m_n - 1}$) номера кода состояния i -го объекта поменяются местами, произойдет с вероятностью $P = \alpha^2 = \left(\frac{1-P_{г.и.}}{2}\right)^2$. Но событие A_r может случиться на любом из $m_n - 1$ интервалов перекрытий (пересечений). Тогда вероятность изменения кода и,

¹ В действительности, при неизменном числе m_n номеров кодов L_1 диагнозов, эти интервалы могут быть разными и при определении m_n следовало бы исходить из I_{min} какого-то диагноза $I_{\pi'} = \min_{\pi \in L_1} (\max \xi_{m_n} - \min \xi_1)_\pi$. Для инвариантности ранжировок должны выполняться неравенства доверительных интервалов, например, $6\sigma_{r_i} \leq \min 6\sigma_{r_\pi}$.

соответственно, вероятность ошибочного диагностирования увеличивается прямопропорционально числу интервалов перекрытий – $m_H - 1$. Следовательно, вероятность установления ложного диагноза – $P_L = (m_H - 1) \left(\frac{1 - P_{g.и.}}{2} \right)^2$. С другой стороны $P_L = 1 - P_3$. Итак, второе уравнение

$$\left(\frac{1 - P_{g.и.}}{2} \right)^2 (m_H - 1) = 1 - P_3 \quad (2.19a)$$

или

$$m_H - 1 = 4 \left[\frac{1 - P_3}{(1 - P_{g.и.})^2} \right], \quad (2.19б)$$

где квадратные скобки – означают целую часть числа; при равном удалении дробного числа от целых берется большее целое число.

Формула (2.18) не удобна для решения. Необходимо так же, как и в (2.19б) выделить $m_H - 1$. Для этого представим

$$\sum_{r=1}^{m_H-1} \sigma_r = \sigma(m_H - 1) \text{ и } \sum_{r=1}^{m_H} \sigma_r = \sigma \cdot m_H, \quad (2.20)$$

где $\sigma = \frac{1}{m_H-1} \sum_{r=1}^{m_H-1} \sigma_r$ или $\sigma = \frac{1}{m_H} \sum_{r=1}^{m_H} \sigma_r$.

Подставляя (2.20) в (2.18), получим после небольших преобразований

$$I_0 = \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} [t(n-1, P_g) + t(n-1, P_{g.и.})(m_H - 1)].$$

Продолжая преобразовывать далее, окончательно получим

$$[m_H - 1] = \frac{t(n-1, P_g = 0,99)}{t(n-1, P_{g.и.})} [m_{H_0} - 1], \quad (2.21)$$

где $m_{H_0} = (\max \xi_m - \min \xi_1) \sqrt{n} / 2\sigma t(n-1, P_g = 0,99)$.

Систему двух уравнений (2.19б) и (2.21) проще решить графически, задав ряд возможных значений входящих в эти формулы величин.

Пусть $P_3 = 0,95$ и $0,97$; $n = 6$; $m_{H_0} = 3, 4$ и 5 . Задавая также ряд значений $P_{g.и.} = 0,8, 0,9, 0,95, 0,98$ и $0,99$, построим зависимости $m_H - 1$ от $P_{g.и.}$, отраженные в формулах (2.19б) и (2.21) и представленные на рис. 9.

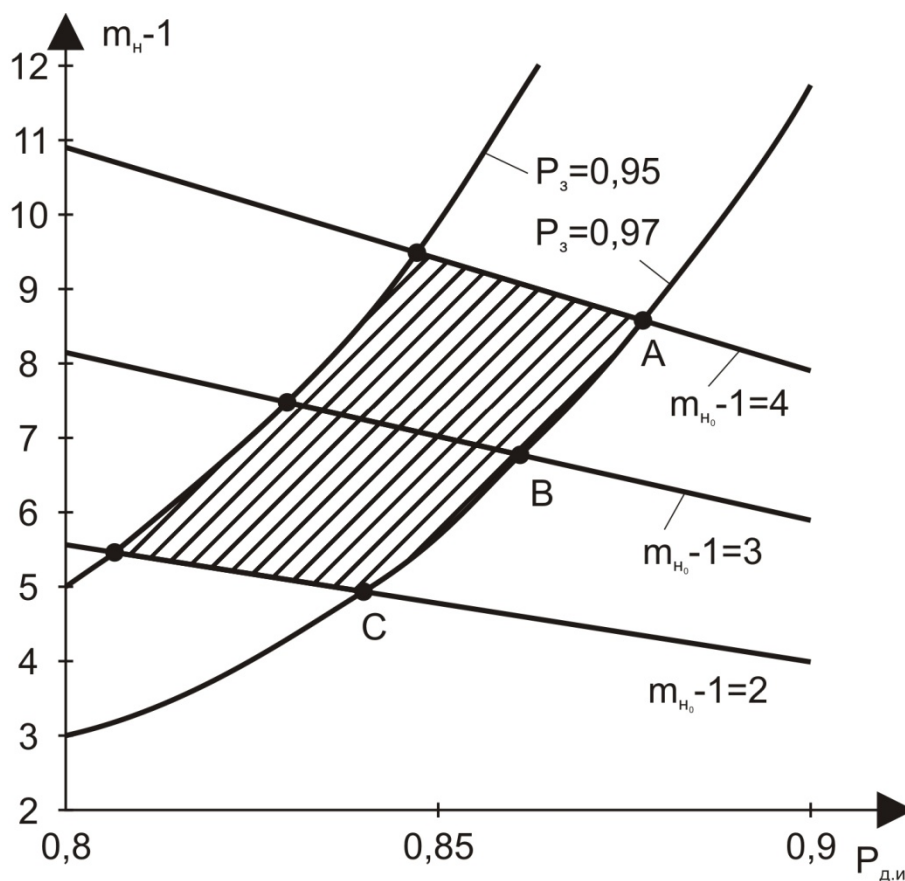


Рис. 9. Зависимости числа параметров, оставшихся для формирования кодов возможных состояний (неисправностей) однотипных объектов от значений доверительной вероятности не перекрытия интервалов параметров.

На рис. 9 область решений уравнений (2.19б) и (2.21) с шестью возможными значениями $m_n - 1$, обозначенными жирными точками, – заштрихована.

Предпочтительными являются решения A , B и C , так как они имеют место при очень высокой заданной ($P_z = 0,97$) вероятности правильного диагностирования.

Таким образом, предложенным выше методом можно надежно, с $P_z = 0,95 \div 0,97$, поставить правильный диагноз за одну проверку (диагностирование), не прибегая к использованию второго и третьего принципов распознавания состояний. Однако применение этого метода не эффективно при следующих условиях: однократное измерение параметров; большая дисперсия их значений; быстро протекающие процессы разрушения материалов, приводящие к внезапным отказам; когда из числа оставшихся m_n

параметров при использовании всех шкал нельзя образовать различные коды для всех диагнозов. В этих случаях следует применить методы и РП вероятностно-метрического подхода (ВМП) или предлагаемый ниже, в п. II. 3, метод, являющийся обобщением методов, приведенных в главе V, п. V.1. Этот метод допускает однократное измерение параметров.

2.2.5. Общее РП, касающееся разных шкал¹

При недостаточном для разделения диагнозов числе оставшихся – m_n параметров, измеряемых в относительной шкале, следует использовать дополнительно и другие независимые друг от друга шкалы сравнения, например, шкалы качественных признаков [40], нечисловую статистику [38], см. п. II.3 и II.5. Надо использовать и другие признаки, не имеющие нормативов, на которые можно разделить, получив безразмерные величины; разряды диагностических признаков (интервалы того или иного признака (параметра) при разных состояниях); цветовые, звуковые, температурные различия, цветовая, звуковая интенсивности в разрядах признаков и др.

Суммируя числа совпадений одноименных признаков и их разрядов в разных шкалах при состоянии i -го объекта и имеющихся состояниях-эталонах, приходим к следующим общим РП, основанным на первом принципе:

$$\sum_{j=1}^{\Omega} C_{j|D_*} = \max_{\pi \in L} \rightarrow X_i \in D_*, j = \overline{1, \Omega},$$

либо

$$\sum_{j=1}^{\Omega} \bar{C}_{j|D_*} = \min_{\pi \in L} \rightarrow X_i \in D_*, \quad (2.22)$$

где Ω – число шкал сравнения; C_j и \bar{C}_j – соответственно, число совпадений и несовпадений одноименных параметров или признаков, номеров одноименных параметров в j -й шкале сравнений состояния i -го объекта с состояниями (диагнозами)-эталонами при одном замечании: признаков в каждой из шкал сравнения недостаточно для разделения диагнозов.

¹ Это общее РП нельзя отождествлять с методом, изложенном в работе [42].

В предельном случае РП (2.22) будет

$$\sum_{j=1}^{\Omega} \bar{C}_{j|D_* \in L} = 0 \rightarrow X_i \in D_*.$$

Преимущества метода совпадения кодов

Простота и наглядность. Простое решающее правило установления истинного диагноза.

Несложные вычислительные операции, не связанные с вычислением вероятностей, построением сложных функционалов и, следовательно, экономия на вычислительном процессе (машинном времени).

II.3. Обобщенный качественно-количественный метод распознавания состояний¹

В ранжированных последовательностях всех m параметров, соответствующих состояниям i -го объекта и всем эталонным состояниям (диагнозам), номера параметров проставляют относительно ранжировки опорного диагноза (1, 2, ... m). Проводят разбивку этих последовательностей на ряд интервалов. Ось наименований параметров (а не ось средних значений ξ на рис. 8) делят на интервалы, как показано на рис. 10: сначала по два параметра, затем по три и т.д. до K параметров в каждом (положим $K = 10$).

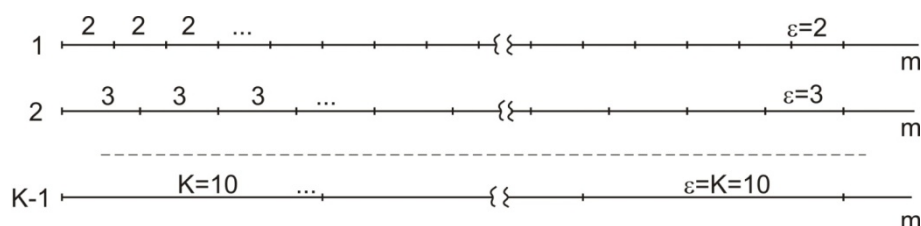


Рис. 10. Разбивка оси наименований m ранжированных параметров состояний i -го объекта и диагнозов-эталонов на интервалы с варьируемым числом параметров в каждом.

При этом значения ξ_r параметров внутри каждого j -го интервала могут быть меньше или больше друг друга: главное, чтобы параметры с этими значениями были внутри интервала. В связи с этим, несмотря на то, что случайная составляющая при одном измерении превалирует, и расстановка параметров в ранжированных последовательностях будет случайной, интервальное сравнение наименований параметров, попавших в каждый из

¹ Является «интервальным» обобщением, разновидностью одного из методов вычисления оценок [41].

интервалов, эту случайность в значительной степени нейтрализуют: ведь интервальное оценивание или сравнение обладает устойчивостью к перестановкам параметров внутри интервалов (не зависит от этих перестановок). С увеличением числа разбинок (всего – $K - 1$ на рис. 10) m параметров на Ω_ε интервалов с ε_j -ми параметрами в каждом ($\varepsilon_j = \overline{2, K}$; $j = \overline{1, \Omega_\varepsilon}$) – ошибка в диагностировании будет уменьшаться.

Предлагаемый метод основан не только на первом, но и третьем принципе распознавания состояний, точнее, на его первом абзаце, принципе За (см. п. I. 1).

Из сущности этого принципа следует, что в любом случае, при любой случайной расстановке параметров суммарное число совпадений одноименных параметров в различных заданных интервалах разбинок при состоянии i -го диагностируемого объекта и диагноза, к которому это состояние должно принадлежать, – будет больше числа совпадений при сравнении состояния i -го объекта с другими диагнозами-эталоном.

Совпадение и не совпадение одноименных параметров в различных интервалах разбинок при состоянии i -го объекта и диагнозах-эталоном обозначим в бинарном виде: 1 – совпадение; 0 – не совпадение или в символьной записи нечисловая мера близости (совпадения)

$$q_{i, \varepsilon_j | \pi} = \begin{cases} 1, & \text{если } \forall r \in \varepsilon_j, Nr_{\varepsilon_j i} \equiv Nr_{\varepsilon_j \pi} \\ 0, & \text{если } \forall r \in \varepsilon_j, Nr_{\varepsilon_j i} \not\equiv Nr_{\varepsilon_j \pi}, \end{cases} \quad (2.23)$$

где $Nr_{\varepsilon_j i}$ и $Nr_{\varepsilon_j \pi}$ – наименование r -го параметра в ε_j -м наборе параметров j -го интервала, соответственно, в ранжированных последовательностях i -го объекта и кластера с π -м диагнозом; знак \equiv – кроме эквивалентности, тождественности, означает и соответствие.

Другими словами, 1 – если все параметры в их j -м интервале с набором из ε_j параметров присутствуют как у i -го проверяемого объекта, так и в кластере с π -м диагнозом; 0 – если хотя бы один параметр в данном ε_j -м наборе j -го интервала отсутствует.

Далее, с учетом (2.23) вычисляют сначала при $\varepsilon_j = 2$ сумму $\sum_{j=1}^{\Omega(2)} q_{\varepsilon_j=2,i(\pi)}$. Так же получают суммы и для остальных ε_j :

$$\sum_{j=1}^{\Omega(\varepsilon)} q_{\varepsilon_j,i(\pi)}, \dots \sum_{j=1}^{\Omega(K)} q_{\varepsilon_j=K,i(\pi)},$$

где $\Omega(\varepsilon) = m_\varepsilon / \varepsilon_j$, $m_\varepsilon \leq m$: удаляют такое минимальное число параметров слева, чтобы число m_ε делилось на ε_j без остатка, т.е. получались целые числа интервалов $\Omega(\varepsilon)$, $\varepsilon = \overline{2, K}$.

Затем вычисляют суммы $\sum_{\varepsilon=2}^K \sum_{j=1}^{\Omega(\varepsilon)} q_{\varepsilon_j,i(\pi)}$ для каждого π -го диагноза ($\pi = \overline{1, L}$).

Максимум $\sum_{\varepsilon=2}^K \sum_{j=1}^{\Omega(\varepsilon)} q_{\varepsilon_j,i|D_*}$ при диагнозе D_* будет означать его истинность, $D_* \equiv D_{\text{и}}$. РП установления истинного диагноза запишется в виде

$$\sum q_{i|D_*} = \max_{\pi \in L} \sum_{\varepsilon=2}^K \sum_{j=1}^{\Omega(\varepsilon)} q_{\varepsilon_j,i(\pi)} \rightarrow X_i \in D_* \equiv D_{\text{и}}. \quad (2.24)$$

РП (2.24) гарантированно обеспечит выделение 2 ÷ 3-х наиболее вероятных диагнозов (н.в.д.), среди которых с $P = 1$ будет находиться истинный ($D_{\text{и}}$). Для установления $D_{\text{и}}$ из 2 ÷ 3-х н.в.д. следует применить ВМП.

К сожалению, эффективность этого метода снижается при значительных пересечениях областей диагнозов. В этом случае также следует использовать методы ВМП.

II. 4. Обобщающие теоретические результаты и зависимости

Метод раздела II. 2 показал, что с увеличением числа параметров – m надежность распознавания состояния повышается. В работах [28] и [32] также доказывалось, что с увеличением числа признаков (параметров) вероятность правильного распознавания увеличивается. При этом области диагнозов будут меньше пересекаться, а при достаточно большом m вероятность установления $D_{\text{и}}$ может достигнуть ≈ 1 .

Метод, изложенный в п. 1.5.2 главы I (метод вычеркивания ложных диагнозов) показал, что с ростом числа проверок число Ω н.в.д. уменьшается до

единицы – истинного диагноза, а вероятность его установления увеличивается и близка к 1.

Чтобы рассмотреть вторую часть выдвинутых в названии главы вопросов обратимся вновь к введенным в теорию распознавания образов (состояний) новым понятиям: ОДО (см. формулу (1.3)), коэффициенту надежности распознавания – E_π (см. формулы (1.6) и (1.24)), эквивалентному вероятности установления того или иного диагноза, и суммарному коэффициенту надежности распознавания E_Σ , определяемому по формуле

$$E_\Sigma = \frac{\sum_{\pi=1}^{\Omega} \text{ОДО}_\pi}{\sum_{\pi=1}^{L_c} \text{ОДО}_\pi} \approx \sum_{\pi=1}^{\Omega} P_a(D_\pi/\Phi C) = \frac{\int_0^{\Omega} \varphi(\omega) d\omega}{\int_0^{L_c} \varphi(\omega) d\omega}, \quad (2.25)$$

где $1 \leq \Omega \leq L_c < L_1$, $\varphi(\omega)$ – аппроксимирующая функция (2.27).

После первой или n -ой проверки значения ОДО всех L_c н.в.д., включая $D_{\text{и}}$, выстраиваются по ранжиру в соответствии со своими номерами от 1 до L_c , образуя некую криволинейную «лестницу». Эту лестницу, составленную из значений $\text{ОДО}_1, \text{ОДО}_2, \dots, \text{ОДО}_{L_c}$, где

$$\text{ОДО}_1 > \text{ОДО}_2 > \dots > \text{ОДО}_{L_c}, \quad (2.26)$$

аппроксимируем на интервале $(0, L_c)$ степенной функцией вида

$$\text{ОДО}(N_\pi) = \varphi(\omega) = a - bN_\pi^c, \quad \text{где } a \text{ и } b > 0, 0 < c < 1, \quad (2.27)$$

N_π – номера н.в.д., $\pi \in L_c \subset L_1$.

Аппроксимация ОДО показана на рис. 11 кривой линией aL_c .

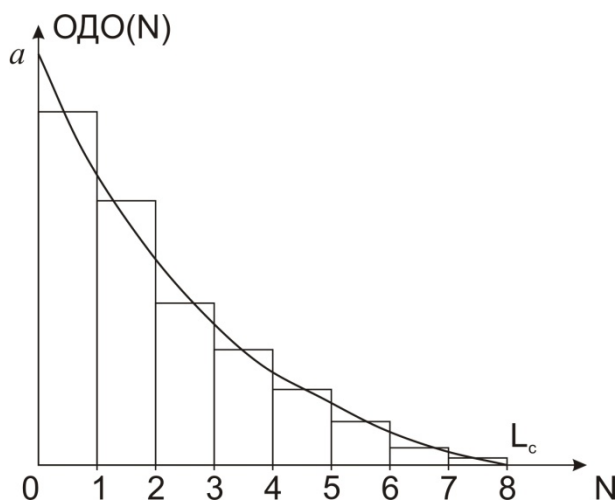


Рис 11. Аппроксимация ОДО в зависимости от числа или нумерации н.в.д. на интервале от 0 до L_c

Изначально в цепочке неравенств (2.26) первый диагноз – D_1 , имеющий наибольшее значение ОДО, считаем прелиминарным, предпочтительным диагнозом, не обязательно являющимся истинным, ибо при последующих проверках прелиминарный диагноз может быть иным. После n -ой проверки, в момент обнаружения \bar{G} состояния, вероятность установления $P_a(D_1)$ диагноза D_1

$$E_{D_1} \approx P_a(D_1) = \frac{\int_0^1 \varphi(\omega) d\omega}{\int_0^{L_c} \varphi(\omega) d\omega} \quad (2.256)$$

Согласно третьего принципа распознавания и его положений D_{ii} будет всегда оставаться среди н.в.д., число которых с каждой последующей ε -проверкой уменьшается (см. метод вычеркивания ложных диагнозов, п. I.5.2), а ОДО истинного диагноза с ближайшими конкурирующими, увеличивается. Следовательно, кривая $a_{n+1}\Omega_{n+1}$ при $n + 1$ -й или первой ε -проверке ($\varepsilon = 1$), должна пересечь кривую $a_n L_c$. При каждой последующей ε -проверке ордината, т.е. значение ОДО с обозначающей его т. a_{ψ} , будет расти, а абсцисса (Ω н.в.д.) – уменьшаться, при этом новая кривая будет пересекать предыдущие. Построенные кривые изображены на рис. 12.

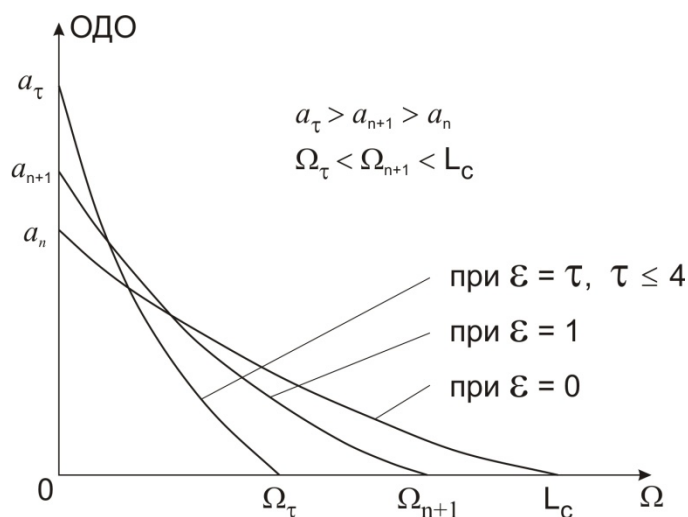


Рис. 12. Кривые ОДО н.в.д. в зависимости от числа н.в.д. при росте ε -проверок

Коэффициенты a , b и c аппроксимирующей функции (2.27), которые вычисляют МНК, зависят от числа проверок – n и числа параметров – m , а

точка пересечения функции (2.27) с осью абсцисс – осью номеров диагнозов, определяет число Ω н.в.д. (число Ω н.в.д. определяется и методом вычеркивания ложных диагнозов, см. п. 1.5.2 главы I).

$$[\Omega_{|n,m}] = \left(\frac{a_{n,m}}{b_{n,m}} \right)^{1/c_{n,m}}$$

квадратные скобки означают, что надо брать целую часть числа.

При каждой ε -проверке $P_{D_{\text{И}}}$ и $P_{D_{\pi}}$ – вероятность установления $D_{\text{И}}$ и любого другого диагноза из L_c н.в.д., прямопропорциональна величине ОДО истинного диагноза или ОДО любого другого. Это следует из формулы $P_{D_{\text{И}}} \approx E_{\pi \equiv D_{\text{И}}}$ (1.6), где знаменатель для всех н.в.д. – один и тот же. Отсюда следует, что если ОДО истинного диагноза увеличивается с уменьшением числа Ω н.в.д., то и $P_{D_{\text{И}}}$ тоже будет увеличиваться с уменьшением Ω н.в.д. Действительно, E_{Σ} (2.25) перепишем в виде, соответствующем полной группе событий

$$E_{\Sigma} \approx P \left(\bigcup_{\pi=1}^{L_c} D_{\pi} \right) = P_{D_{\text{И}}} + \sum_{\pi=1}^{L_c-1} P_{\text{Л}} + \sum_{\pi=1}^{L-L_c} P_{D_0} = 1,$$

где $P_{\text{Л}}$ – вероятность установления ложного диагноза из числа $L_c - 1$ (после n -й проверки); D_0 – «нулевой» диагноз.

Так как вероятность установления «нулевых» диагнозов $\sum_{\pi=1}^{L-L_c} P_{D_0} = 0$, то

$$E_{\Sigma} = P_{D_{\text{И}}} + \sum_{\pi=1}^{L_c-1} P_{\text{Л}} = 1 \quad (2.28)$$

С каждой ε -проверкой число Ω н.в.д. уменьшается в связи с «выбраковкой» ложных диагнозов из бывших н.в.д. (допустим, что пороговое значение вероятности выбраковки ложного диагноза – $q_{\text{п}} = 0,05$). Но сумма (2.28) останется равной 1, а поскольку Ω н.в.д. уменьшается, то уменьшается и слагаемое $\sum_{\pi=1}^{\Omega} P_{\text{Л}}$ – вероятность установления какого-либо диагноза из состава ложных. В связи с тем, что сумма (2.28) останется равной 1, а $\sum_{\pi=1}^{\Omega} P_{\text{Л}}$ уменьшается, следует, что $P_{D_{\text{И}}}$ увеличивается.

Установим зависимость $P_{D_{И}}$ от числа Ω н.в.д. Для этого в соответствии с формулой ОДО (1.3) выпишем ряд значений ОДО для истинного диагноза при уменьшении Ω н.в.д. с ростом числа ε -проверок, предварительно записав $P_{D_{И}} \equiv P_{И}$

$$P_{И_n} = \frac{\text{ОДО}_{И_n}}{\text{ОДО}_{И_n} + \sum_{\pi=1}^{L_c-1} \text{ОДО}_{Л_n}}; P_{И_{n+1}} = \frac{\text{ОДО}_{И_{n+1}}}{\text{ОДО}_{И_{n+1}} + \sum_{\pi=1}^{\Omega_{n+1}} \text{ОДО}_{Л_{n+1}}}; \dots$$

$$\dots; P_{И_{n+\varepsilon}} = \frac{\text{ОДО}_{И_{n+\varepsilon}}}{\text{ОДО}_{И_{n+\varepsilon}} + \sum_{\pi=1}^{\Omega_{n+\varepsilon}} \text{ОДО}_{Л_{n+\varepsilon}}}; \dots; P_{И} = \frac{\text{ОДО}_{И_{n+\varepsilon_{\max}}}}{\text{ОДО}_{И_{n+\varepsilon_{\max}}} + 0_{Л}} = 1, \quad (2.29)$$

где $\varepsilon = 1 \div 5$, ε_{\max} – максимальное число проверок для конкретного случая распознавания. Число ложных диагнозов с ростом ε

$$\Omega_{Л_n} = L_c - 1 > \Omega_{Л_{n+1}} > \dots > \Omega_{Л_{n+\varepsilon}}.$$

По полученным точкам можно провести кривую линию, отражающую зависимость $P_{И}$ от Ω н.в.д. Эту зависимость удобнее аппроксимировать функцией вида

$$P_{И} = 1 - (1 - P_{И_1}) \exp \left[-\gamma_1 \left(\frac{L_c - \Omega}{\Omega - 1} \right) \right], \quad \gamma_1 > 0, \quad (2.30)$$

где $P_{И_1}$ – вероятность установления $D_{И}$ в момент первой или $n_{\bar{G}}$ -й проверки, при которой было обнаружено \bar{G} состояние объекта (неисправное или нездоровое), когда число Ω н.в.д. = L_c ; $P_{И_1}$ можно определить только апостериори, потому что $D_{И}$ устанавливаются на конечном шаге, через несколько ε -проверок при одном и том же выбранном числе параметров – m (до этого момента $D_{И}$ не известен).

Функция (2.30) отвечает граничным условиям: при $\Omega = L_c$ $P_{И} = P_{И_1}$; при $\Omega = 1$ $P_{И} = 1$.

Зависимость (2.30) изображена на рис. 13.

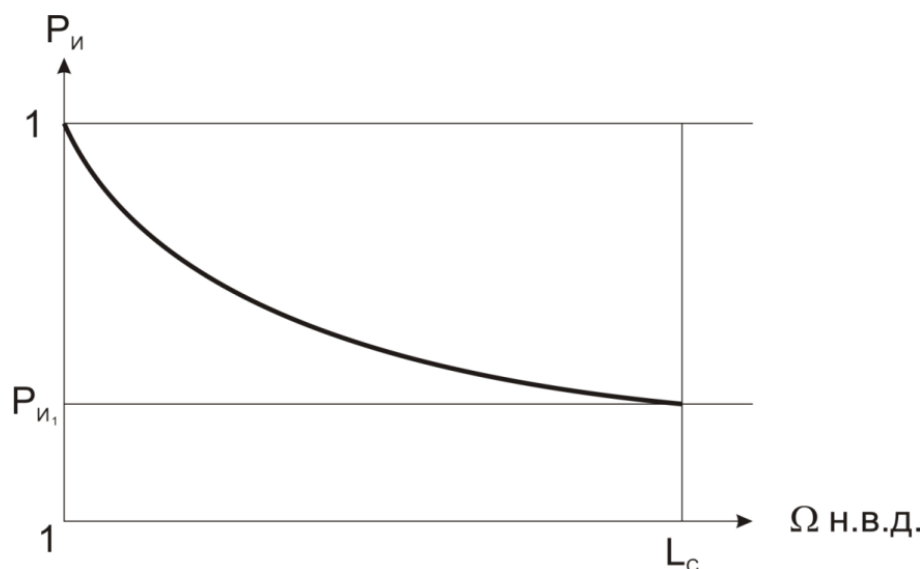


Рис. 13. Зависимость вероятности установления $D_{и}$ от числа Ω н.в.д.

Последнее равенство в формуле (2.29) относится к лучшему случаю распознавания, когда при $(n + \varepsilon_{\max})$ -й проверке ни одного ложного диагноза не останется, т.е. его вероятность $0 \leq P_{л} < q_n = 0,05$. В худшем случае останутся два диагноза: истинный и ложный, и установление $D_{и}$ произойдет с привлечением РП (1.40) и подтверждающих условий (1.41) или (1.43).

Теперь покажем, что и при увеличении числа параметров – m число Ω н.в.д. будет уменьшаться.

В начале этого раздела отмечено, что в методе П.2 было показано, что с увеличением m вероятность установления $D_{и}$ повышается от значения $P_{и_1}$ при $n_{\bar{c}}$ -й проверке и выбранном минимальном числе параметров – m_1 до значения $P_{и} \cong 1$ при больших числах m , когда произошло полное кодовое разделение диагнозов-эталонов посредством устранения случайной составляющей при измерениях. Понятно, что кривая повышения $P_{и}$ в зависимости от увеличения m – не линейна и будет асимптотически приближаться к 1 при большом числе m . Такую зависимость также можно аппроксимировать экспоненциальной функцией вида

$$P_{и} = 1 - (1 - P_{и_1}) \exp[-\gamma_2(m - m_1)], \quad \gamma_2 > 0 \quad (2.31)$$

При этом зависимость вероятности установления ложных диагнозов – $P_{л}$ от числа m будет

$$P_{л} = (1 - P_{И_1}) \exp[-\gamma_2(m - m_1)]. \quad (2.31б)$$

Кривые зависимостей (2.31) и (2.31б) изображены на рис. 14.

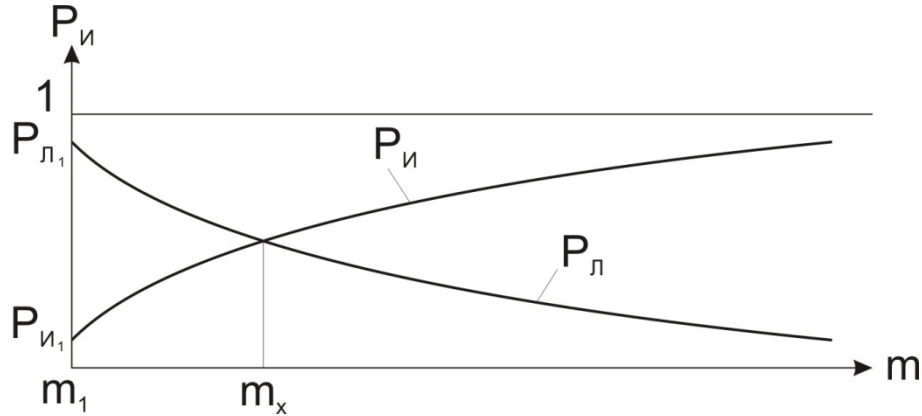


Рис. 14. Зависимости $P_{И}$ и $P_{л}$ от числа параметров m .

Равенство $P_{И}(m_x) = P_{л}(m_x)$ на рис. 14 наступит при числе параметров

$$m_x = \left[\frac{\ln 2(1 - P_{И_1})}{\gamma_2} \right] + m_1.$$

Аппроксимирующая функция (2.31) удовлетворяет граничным условиям: при $m = m_1$ $P_{И} = P_{И_1}$; при $m = \infty$ $P_{И} = 1$.

Перейдем к выяснению зависимости Ω н.в.д. = $f(m)$. Исходя из формул (2.30) и (2.31), определим граничные значения зависимости Ω н.в.д. = $f(m)$. Приравняв правые части формул (2.30) и (2.31), получим после сокращений

$$\gamma_1 \frac{L_c - \Omega}{\Omega - 1} = \gamma_2(m - m_1), \quad \gamma_1 > \gamma_2.$$

Выразив в этом равенстве Ω через m , получим Ω н.в.д. = $f(m)$

$$\Omega = \frac{L_c - 1}{1 + \gamma_3(m - m_1)} + 1, \quad \text{где } \gamma_3 = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} > 0 \quad (2.32)$$

При $m = m_1$ $\Omega = L_c$; при $m = \infty$ $\Omega = 1$.

$\Omega_{\text{н.в.д.}} = f(m)$, удовлетворяющую указанным граничным условиям, можно представить и в виде

$$\Omega = (L_c - 1) \exp[-\gamma_3(m - m_1)] + 1 \quad (2.32б)$$

Зависимость (2.32) или (2.32б) изображена на рис. 15.

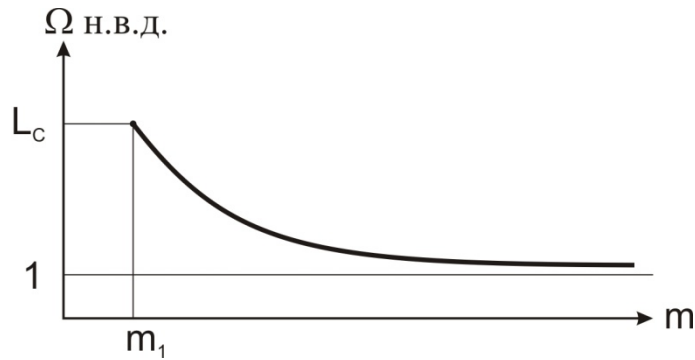


Рис. 15. Зависимость Ω н.в.д. от числа параметров m .

Теоретический интерес представляют предельные случаи (асимптотические): 1) при минимальном числе ($2 + 3$) косвенных параметров области всех состояний (диагнозов) окажутся почти совпадающими, т.е. с почти 100%-ым пересечением и функция ОДО = $\varphi(\Omega)$ будет близка к горизонтальной прямой, параллельной оси абсцисс; 2) в предельном случае гильбертова пространства, при числе параметров $m = \infty$, области диагнозов пересекаться не будут и функция ОДО = $\varphi(\Omega)$ окажется близка уже к вертикальной прямой, параллельной оси ординат с $\Omega = 1$. В этом предельном, несбыточном случае будет единственный истинный диагноз (см. рис. 12 и 15).

II.5. Приложение к методу конгруэнции кодов

Ранжировку параметров (признаков) проводим по их средним значениям $-\bar{\xi}_{r\pi}$, определенным при проверках выборок каждого из возможных состояний (диагнозов), где $r = \overline{1, m}$, $\pi = \overline{1, L}$. Аналогично ранжируем параметры по их средним значениям ξ_{r_i} за n измерений каждого параметра при мониторинге, проверке некоего i -го состояния, $i \in L$. Необходимо определить к какому из известных состояний принадлежит наблюдаемое. При этом $i = \pi$ только тогда, когда i -ое состояние совпадает с π -ым, т.е. принадлежит ему. Разница в том, что диагностируется не i -й объект с неким состоянием, а само i -ое состояние (процесс, явление).

Выпишем диагностическую матрицу верифицированных состояний, матрицу соответствующих ранжированных параметров по их наименованиям и

ранжированные ряды значений параметров и их наименований при i -ом состоянии.

$$\begin{array}{c} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_\pi \\ \vdots \\ D_L \end{array} \left| \begin{array}{cccccc} \xi_{11} & \xi_{21} & \dots & \xi_{r1} & \dots & \xi_{m1} \\ \xi_{12} & \xi_{22} & \dots & \xi_{r2} & \dots & \xi_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \xi_{1\pi} & \xi_{2\pi} & \dots & \xi_{r\pi} & \dots & \xi_{m\pi} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \xi_{1L} & \xi_{2L} & \dots & \xi_{rL} & \dots & \xi_{mL} \end{array} \right. \quad (2.33) \quad \begin{array}{cccccc} N_{11} & N_{21} & \dots & N_{r1} & \dots & N_{m1} \\ N_{12} & N_{22} & \dots & N_{r2} & \dots & N_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ N_{1\pi} & N_{2\pi} & \dots & N_{r\pi} & \dots & N_{m\pi} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ N_{1L} & N_{2L} & \dots & N_{rL} & \dots & N_{mL} \end{array} \quad (2.34)$$

$$\xi_{1i} \xi_{2i} \dots \xi_{ri} \dots \xi_{mi} \quad (2.35) \quad N_{1i} N_{2i} \dots N_{ri} \dots N_{mi} \quad (2.36)$$

где N_r – наименование r -го параметра; все параметры также должны быть безразмерными (ξ_r^b), пригодными для сравнения:

$\xi_r^b = \xi_r / \xi_{rH}$, где ξ_{rH} – значение r -го параметра при нормальном («невозмущенном») состоянии.

В матрице (2.33) ранжировка параметров: $\xi_{1\pi} < \xi_{2\pi} < \dots < \xi_{r\pi} < \dots < \xi_{m\pi}$. В ряду (2.35): $\xi_{1i} < \xi_{2i} < \dots < \xi_{ri} < \dots < \xi_{mi}$. $\xi_{r1} \neq \xi_{r2} \neq \dots \neq \xi_{r\pi} \neq \dots \neq \xi_{rL}$ и $\xi_{r\pi} \neq \xi_{ri}$. В матрице (2.34) $N_{r1} \neq N_{r2} \neq \dots \neq N_{r\pi} \neq \dots \neq N_{rL}$.

Матрица (2.34) и ряд (2.36) – с нечисловой ранжировкой. Нечисловая ранжировка, ранжировка наименований параметров, позволила обойтись без опорного диагноза, так как не нужно было составлять разности, как в РП (2.8).

Далее следует поочередно сравнить ряд (2.36) с каждой из строк матрицы (2.34) при каждой проверке (контроле) i -го состояния. Строки матрицы (2.34) – своеобразные нечисловые коды диагнозов.

Обозначим число совпадений наименований параметров в ряду (2.36) и строке π -го диагноза при Ψ -й проверке через $C_{i|\pi,\Psi}$. Тогда РП выбора прелиминарного диагноза D_π будет

$$K_{i|D_*,\Psi} = \max_{\pi \in L} C_{i|\pi,\Psi} \rightarrow X_i \in D_* \equiv D_\pi.$$

$C_{i|\pi,\Psi}$ определяется через бинарную форму нечисловой меры близости μ :

$$\mu_{i|\pi,\Psi} = \begin{cases} 1, & \text{если } N_{ri} \equiv N_{r\pi} \\ 0, & \text{если } N_{ri} \neq N_{r\pi} \end{cases}$$

Откуда
$$C_{i|\pi,\Psi} = \sum_{r=1}^m \mu_{r|i|\pi}. \quad (2.37)$$

РП установления истинного диагноза – D_{II} при нескольких проверках будет в виде неравенств

$$\max C_{i|D_*,\Psi} < \max C_{i|D_*,\Psi+1} < \dots < \max C_{i|D_*,\Psi+\varepsilon} \rightarrow X_i \in D_* \equiv D_{II},$$

где $\varepsilon = 1, 2 \vee 3$.

В идеальном случае максимальное число совпадений – m , как видно из формулы (2.37), может быть и при первой ε -проверке. РП установления D_{II} запишется:

$$C = \max C_{i|D_*,\Psi+\varepsilon} = m \rightarrow X_i \in D_* \equiv D_{II} \quad (2.38)$$

В развернутой записи, в виде m совпадений (тождеств), РП (2.38)

$$N_{1i} \equiv N_{1D_*} \wedge N_{2i} \equiv N_{2D_*} \dots \wedge N_{ri} \equiv N_{rD_*} \dots \wedge N_{mi} \equiv N_{mD_*} \rightarrow X_i \in D_* \equiv D_{II}.$$

или в компактной:

$$\forall_r N_{ri} \equiv N_{rD_*} \rightarrow X_i \in D_* \equiv D_{II}, \quad r = \overline{1, m}.$$

Ранжировки наименований параметров (нечисловых характеристик) по их средним значениям, пусть и не создают зримых цифровых кодов состояний (диагнозов), но повышают качественный уровень диагностики и прогноза.

Общий вывод к главе II

Изложенный материал наглядно продемонстрировал «работу» первого и частично третьего принципов распознавания состояний.

Выводы к главе II

п. 1. Предложенный метод конгруэнции (совпадения) кодов, при значительном числе параметров, малых дисперсиях и возможности неоднократных измерений параметров за одно диагностирование, – позволит надежно ставить правильный диагноз проверяемому объекту.

п.2. Если имеют место условия п. 1, то справедливо утверждение: вероятность установления истинного диагноза будет близка к 1, если доверительная вероятность попадания среднего значения r -го параметра в доверительный интервал находится в пределах $0,81 < P_{g.и.} < 0,88$ (см. рис. 9),

так как этим достигается инвариантность ранжировки параметров и, следовательно, кода состояния i -го диагностируемого объекта.

п.3. Число параметров – m_n , выбранных с не перекрытыми или слабо перекрытыми интервалами своих значений, меньше или равно числу возможных диагнозов (состояний) L_1 , но больше некоторого критического числа параметров, факториал которого должен быть больше или равен числу диагнозов.

п.4. Большое число параметров – m при применении метода совпадения кодов позволит различить имеющиеся диагнозы соответствующими разными для каждого из них кодами и с высокой вероятностью установить $D_{и}$.

п.5. При однократных измерениях параметров и значениях $m_{н_0} < 3$ применять метод совпадения кодов не рекомендуется. Необходимо использовать качественно-количественный метод или методы ВМП.

п.6. Предложенный обобщенный качественно-количественный метод в значительной степени подавляет случайности, связанные с ранжировкой параметров и повышает устойчивость распознающего РП при интервальной оценке совпадений.

п.7. При множестве параметров, множестве возможных диагнозов и множестве проверок, надежного установления $D_{и}$ можно добиться: а) при большом числе малоинформативных параметров в случае одной проверки или б) при меньшем числе параметров, но при нескольких проверках, т.е. за некоторое число шагов.

п.8. При сокращении числа н.в.д., при каждой последующей проверке, вероятность установления $D_{и}$ повышается.

ГЛАВА III. МЕТОДЫ РАСПОЗНАВАНИЯ ПРИ НЕСПЕЦИФИЧНЫХ ПРИЗНАКАХ (ПАРАМЕТРАХ)

Изложенные в работе методы распознавания состояний могут быть применены в разных областях. Однако, начиная с III-й главы, рассмотрена возможность их применения на примере диагностики рака по привычным для всех анализам крови и мочи. Это связано, прежде всего, с непреходящей актуальностью нерешенной еще проблемы века.

Выдвинуты две гипотезы «поведения» параметров крови и мочи (ПК и М) при пересекающихся областях диагнозов, являющиеся основой предложенных способов разделения. Приведены решающие правила постановки диагноза. Рассмотрены варианты выбора наиболее вероятных диагнозов. В Приложениях даны методы диагностики нездорового состояния при периодических проверках в ходе скрининга (диспансеризации).

Введение к главе III

Для диагностики рака (обозначим этот диагноз буквой – К) при скрининге необходимо располагать простыми экономичными и надежными диагностическими методами исследования [1, 2] и связанными с ними методами (способами) раннего выявления К.

Наиболее простыми и малозатратными по сравнению с надежными, но дорогостоящими и поэтому неприемлемыми для скрининга инструментальными методами диагностики, могут служить гематологические, иммунологические и биохимические анализы крови, а также анализы мочи, т.е. дешевые лабораторные методы.

Параметры двух диагностических сред, крови и мочи, достаточно хорошо характеризуют гуморальный гомеостаз человека и в процессе метаболизма поддерживаются организмом (а в случае какой-либо болезни – после лечения) на определенных уровнях в состоянии динамического равновесия. Процесс поддержания этих уровней осуществляется подобно системе управления с отрицательной обратной связью [3].

Кровь, как биоматериал, специалисты по диагностике используют для различных целей: поиска специфичного антитела-индикатора для конкретной формы или локализации К, например [4], прогноза течения [5], раннего выявления всех наиболее распространенных локализаций по значениям всех параметров крови или их комбинаций и параметров мочи [6-7], диагностирования состояний по типу «рак – не рак» физическими методами исследования сыворотки крови [8].

Первое направление связано с этиологией, патогенезом К на цитологическом уровне, а также с иммунологией. Но пока в крови больных К людей не найдены антигены или специфичные антитела-индикаторы всех основных, наиболее распространенных локализаций¹, позволяющие с вероятностью не менее 0,95 ставить правильный диагноз, разработку упомянутых способов ранней диагностики целесообразнее, на наш взгляд, ориентировать и на применение результатов лабораторных анализов крови и мочи по измеряемым при скрининге значениям их параметров.

Реализация предложенных методов требует проведения клинических и неклинических статистических исследований однородных по ряду признаков групп (кластеров) больных и не больных раком людей для выявления динамики и тенденции изменений ПК и М за доклиническую стадию К. Однако необходимо заметить, что диагностирование К по ПК и М сопряжено со значительными трудностями: низкой информативностью каждого параметра в отдельности, связанной с тем, что изменение того или иного параметра может быть вызвано как онкопатологией, так и развитием любого из числа ω - выбранных, наиболее распространенных и весьма продолжительных хронических заболеваний (ХЗ)² и числа χ – наиболее распространенных доброкачественных опухолей (ДО); высокой дисперсией ПК и М, при которой

¹ В настоящее время в крови найдены маркеры ПСА канцера простаты [9], позволяющие достоверно ставить диагноз.

² Клиническая картина, симптоматика ряда наиболее распространенных ХЗ, проявляются через год и более. Поэтому, несмотря на то, что изложенные ниже методы позволяют диагностировать как К, так и ХЗ, последние вкупе с ДО следует считать определенной помехой в обнаружении К. Острые инфекционные и воспалительные заболевания, равно как инфаркт миокарда и инсульты – эфемерны: первые – проявляются и излечиваются, как правило, быстро, вторые – могут привести к быстрому летальному исходу.

случайная составляющая отклонения от среднего превалирует, «камуфлируя» детерминированную («полезный сигнал»), несущую информацию о развитии онкопроцесса; изменения ПК и М не выходят за границы их нормативных значений даже на метастатических стадиях К [2], области распределения плотностей вероятностей значений ПК и М у больных К и ХЗ и у людей с ДО пересекаются (диагнозы К, ДО и ХЗ «перемешаны»).

Но перечисленные недостатки лабораторных методов можно учесть и они не являются камнем преткновения созданию новых методов распознавания К по ПК и М.

Что касается случайностей субъективного характера, то их можно устранить соблюдением определенных условий при сдаче анализов, например: натощак, при нормальной температуре и рабочем давлении, спокойном состоянии и т.д., и при отсутствии любых воспалительных процессов и даже легких травм. После выполнения этих условий останется лишь стохастическая составляющая, связанная с имманентной физиологической флюктуацией гомеостаза.

Недостатками работ [6-7] являются в основном недостаточный учет значительной перемешанности областей диагнозов ХЗ, К и ДО.

Следует выделить одну особенность канцера. Рост, развитие злокачественных опухолей относится в большинстве случаев к медленно протекающим процессам [10].

В биосистемах с их сложными многофункциональными «нежесткими связями» всегда будет некое запаздывание реакции организма на возмущающее воздействие. Это запаздывание в зависимости от генезиса воздействия может быть разной продолжительности и в случае образования злокачественных опухолей весьма значительной.

Огромную роль в возникновении и развитии заболеваний, в том числе и онкологических, играет иммунная система человека, которая может быть представлена математическими моделями [11]. При ослаблении резистентности

организма вероятность появления онкологических и хронических заболеваний возрастает.

В начальных стадиях развитие «р» выбранных основных локализаций К в отличие от большинства хронических, в т.ч. воспалительных заболеваний, проходит, как правило, латентно и бессимптомно, где семиотика не применима и, следовательно, не применимы известные алгоритмы распознавания по признакам, например: алгоритмы обучения распознавания образов «Кора», «CORAL», метода «трубок» [13], «Обобщенного портрета» и др. [12], «Опорных векторов» [41] и т.д. Аппарат теории распознавания образов уже применялся ранее в онкологии, на примере диагностирования одной конкретной локализации К [14, 15, 25], но не по ПК и М. В этих работах о разделении перемешанных диагнозов К и ХЗ можно говорить при наличии симптомов-признаков, характерных для того или иного заболевания уже в их клинических стадиях. Кроме того, указанные алгоритмы при сильной перемешанности диагнозов не принесут желаемого результата – достоверной постановки правильного диагноза.

Для достижения этой цели необходимо сначала разработать способы отличия диагнозов (состояний): относительно здорового – G или \bar{G}_0 – нездорового, но стабильного состояния людей, проходящих полный курс лечения от сопутствующих одного или двух ХЗ - от диагнозов нездорового состояния - \bar{G} , т.е. одного из диагнозов К, ДО или ХЗ, обнаруженных при проверке, где $K \wedge XZ \subset \bar{G}$. Диагноз ДО также относим к \bar{G} .

Каждый из приведенных ниже способов отличия состояния G от \bar{G} и самих \bar{G} диагнозов базируется на двух физиологических гипотезах, их следствиях и принципах.

III.1. Гипотезы и постановка задач

1. Средние значения большинства ПК и М с развитием патологий различного генезиса в разной степени монотонно изменяются. При этом одна

часть значений параметров имеет тенденцию к росту, а другая – к уменьшению (речь идет о трендах).

2. Патологии, связанные с развитием К и ХЗ, различны по своей природе и структуре развития (опухолевые и неопухолевые) и поэтому следует ожидать и различных иммунно-фагоцитозных и адаптационных реакций организма на их развитие и, следовательно, различные значения гомеостатических показателей, в т.ч. ПК и М. Кроме того, различные локализации К, т.е. поражения различных органов, также вызовут различную реакцию гомеостаза и, как следствие, различия в некоторых группах или отдельных ПК и М. Различия в реакции ПК и М при К и ДО вызваны разным воздействием опухолевых клеток на интактные (здоровые).

Следствие первой гипотезы

Средние значения ПК и М в кластерах здоровых людей и проверяемых, при их нормальном состоянии, стационарны с ростом числа проверок (имеет место «нулевой» тренд).

Следствия второй гипотезы

1. Вероятность совпадения наименований большого (более 30-ти) числа ПК и М в ранжированных по их средним значениям последовательностях при диагнозах К, ДО и ХЗ и любых двух диагнозах К или ХЗ близка к нулю.

2. Патологии К и ХЗ по-разному влияют на отдельные группы параметров крови: биохимические (Б/Х), иммунологические (И), гематологические (П) и параметры мочи.

Первая гипотеза с ее следствием позволяет отличить G от \bar{G} состояния, а вторая гипотеза с ее следствиями – разделить К, ДО и ХЗ диагнозы.

Непосредственно способы разделения диагнозов К и ХЗ основаны на двух принципах, выводимых из двух следствий второй гипотезы.

Принцип 1(а). Последовательность наименований ПК и М в ранжированных по их средним значениям и динамике рядах будет различной для каждого из диагнозов К и ХЗ. При этом нумерация, очередность

(определенный порядок следования) ПК и М в этих рядах представляет собой шифр или код того или иного диагноза. Этот цифровой код будет специфичен для каждого диагноза К и ХЗ и отличен от других.

Принцип 1(б). Неучтенные ХЗ и ДО, равно как неучтенные локализации К, окажутся различимыми (в смысле К или \bar{K}), так как будут располагать ранжированными нумерационными последовательностями, близкими к выбранным ХЗ, ДО или локализациям К.

Принцип 2. Отношения произведений или сумм средних значений параметров крови: биохимической, иммунологической и гематологической групп и значений параметров мочи в их сочетаниях между собой, будут различны при диагнозах К и ХЗ.

В форме символов первый принцип можно записать (ДО опускаем для сокращения записи)

$$\begin{aligned} A_{\xi_l}[l|K] \neq A_{\xi_l}[l|XZ], \quad A_{\xi_l}[l|K_k] \neq A_{\xi_l}[l|K_{k'}], \quad A_{\xi_l}[l|XZ_\rho] \neq A_{\xi_l}[l|XZ_{\rho'}] \\ A_{\xi_s}[S|K] \neq A_{\xi_s}[S|XZ], \quad A_{\xi_s}[S|K_k] \neq A_{\xi_s}[S|K_{k'}], \quad A_{\xi_s}[S|XZ_\rho] \neq A_{\xi_s}[S|XZ_{\rho'}] \end{aligned} \quad (3.1)$$

где A – оператор ранжирования; ξ_l и ξ_s – средние значения ПК и М, имеющих тенденции к росту (параметры вида l) и убыли (параметры вида s); \neq – здесь обозначает знак несовпадения; $k \neq k'$ – разные локализации К; $\rho \neq \rho'$ – разные ХЗ; $k = 1, 2, \dots, p$; $\rho = 1, 2, \dots, \omega$.

Постановка задач

Общую целевую задачу достоверного установления правильного (истинного) диагноза разделим на две: на первом этапе – постановку дихотомического диагноза $G \vee \bar{G}$ или $\bar{G}_0 \vee \bar{G}$. На втором – выявление причины \bar{G} состояния в случае его возникновения, т.е. постановку предварительного диагноза $K_k \vee XZ_\rho \vee DO_\varepsilon$, $\varepsilon = 1, 2, \dots, \chi$.

Пусть в результате проведенных клинических и неклинических исследований уже собрана необходимая статистическая информация о значениях ПК и М в различных кластерах. Таксономия проведена по совокупности различных сходственных, одинаковых признаков: полу, возрасту,

социальному статусу, наличию или отсутствию того или иного сопутствующего ХЗ и др. Число кластеров зависит от p , ω и χ и числа признаков и их разрядов. Чем больше признаков введено, тем больше кластеров и тем меньше дисперсия значений ПК и М в каждом кластере. Число кластеров λ , сформированных для последующего сравнения с состоянием проверяемых, не превосходит λ_0^1 .

$$\lambda_0 = abc[(1 + C_{\omega}^1 + C_{\omega}^2)(1 + p + \omega + \chi) - C_{\omega}^1 - 2C_{\omega}^2] \quad (3.2)$$

где единица, умноженная на произведение чисел разрядов признаков (a , b , c) – число кластеров с G состоянием; $abc(C_{\omega}^1 + C_{\omega}^2)$ – число кластеров с \bar{G}_0 состоянием; $1 + p + \omega + \chi$ – общее число выбранных, наиболее распространенных состояний (диагнозов), одно из которых: K_k или XZ_p или DO_{ε} может быть обнаружено при проверке и добавится к одному из имеющихся состояний (если у проверяемого не возникло заболевание, то диагноз или состояние остается прежним). Общий объем выборки

$$W = \lambda N_j,$$

где $N_j = const$ – число людей или пациентов в каждом j -м кластере ($j = 1, 2, \dots, \lambda$).

Понятно, что сбор и обработка очень большого объема статистической информации о значениях ПК и М по всем кластерам, их предварительное формирование, потребуют и больших затрат времени, но зато весь последующий многолетний скрининг (если при первой проверке у человека не возник или не обнаружен К) будет очень простым, дешевым и надежным.

Допустим также, что найдены МО и σ и построены распределения плотностей вероятностей значений l -го и s -го ПК и М, полученных в каждом j -м кластере состояния G и верифицированных диагнозов К, ХЗ и ДО.

Требуется из множества – М рекомендуемых для анализов неспецифичных ПК и М выбрать – m наиболее значимых ($m = m_l + m_s$),

¹ Если К желудка возникает по причине продолжительного гастрита или язвы, то состояния К + гастрит не может быть или, например, артро- и остео-ХЗ встречаются в основном в 3-й возрастной группе. Поэтому $\lambda < \lambda_0$, определяемому по формуле (3.2).

разработать методы, способные максимально разделить диагнозы, минимизировать область их пересечения

$$\min\left(K \cap_{\bar{G}} X3 \vee K \cap_{\bar{G}} ДО\right) \text{ или в общем, } \min\left(K \cap_{\bar{G}} X3 \cap_{\bar{G}} ДО\right)$$

и, на основе этих методов, предложить решающие правила (РП) установления прелиминарного диагноза с оценкой вероятности его правильной постановки и риска ошибочного решения при конкурирующих диагнозах К и ХЗ или К и ДО, и выбрать 4 ближайших диагноза-соседа, т.е. предоставить медикам до 5-ти н.в.д.

III.2. Параметры крови и мочи и их ОКО

Прежде всего, необходимо определиться с числом – m ПК и М и критериями их выбора. Известно [16], что число объектов, в данном случае людей, в каждой обучающей выборке-кластере должно быть не меньше размерности параметрического пространства – m , т.е. $m \leq N_j$.

Диагностически значимыми ПК и М считаем те, которые имеют наибольшую динамику при развитии К и те, которые вообще ее не имеют, а также те ПК и М, которые имеют наименьшую дисперсию в кластерах. Выбирают ПК и М с большей динамикой, начиная с параметра, имеющего наибольшую.

Наиболее полно диагноз может быть охарактеризован комплексом – m выбранных по указанным критериям ПК и М, а точнее – кривой распределения некоего функционала или функции состояния (ФС) этого диагноза.

Многие ПК и М имеют разную размерность. Поэтому при сравнении динамик их следует привести к безразмерному нормированному виду, поделив абсолютные разности динамик на средние арифметические средних значений параметров. Тогда относительная динамика l -го и s -го ПК и М

$$\Delta \xi_{\ell, K(X3)}^H = 2 \frac{\overset{\circ}{\xi}_{\ell, K(X3)} - \overset{\circ}{\xi}_{\ell, G \vee \bar{G}_0}}{\overset{\circ}{\xi}_{\ell, K(X3)} + \overset{\circ}{\xi}_{\ell, G \vee \bar{G}_0}}, \quad \Delta \xi_{s, K(X3)}^H = 2 \frac{\overset{\circ}{\xi}_{s, G \vee \bar{G}_0} - \overset{\circ}{\xi}_{s, K(X3)}}{\overset{\circ}{\xi}_{s, G \vee \bar{G}_0} + \overset{\circ}{\xi}_{s, K(X3)}} > 0, \quad (3.3)$$

$$\ell = 1, 2, \dots, m_\ell \quad s = 1, 2, \dots, m_s,$$

где $\overset{\circ}{\xi}_{lK(X3)}$ и $\overset{\circ}{\xi}_{lG\check{G}0}$ – средние значения l -го параметра в j -м кластере, соответственно, при первой и второй клинических стадиях диагнозов К или ХЗ и состояний G или \bar{G}_0 ; (ДО, для сокращения числа индексов, опускаем); $\overset{\circ}{\xi}_{sjK(X3)}$ и $\overset{\circ}{\xi}_{sjG\check{G}0}$ – то же самое, но для s -го параметра.

При неодномодальном распределении $\overset{\circ}{\xi}_{l(s)}$ и $\sigma_{\xi_{l(s)}}$ лучше вычислять как для дискретных случайных величин. При неравномерности значений в интервалах

$$\overset{\circ}{\xi}_{l(s)} = \sum_{g=1}^{\Omega} \frac{1}{N_{gj}} \sum_{i'=1}^{N_{gj}} \xi_{l(s)i'g} \cdot P_{l(s)gj}, \quad P_{l(s)} = \frac{N_{gjl(s)}}{N_j}, \quad (3.3.б)$$

где $g = 1, 2, \dots, \Omega$; $i'_j = 1, 2, \dots, N_{jg}$, i'_j – пациент j -го кластера диагноза К(ХЗ); Ω – число интервалов; N_{jg} – число человек j -го кластера в g -ом интервале $l(s)$ параметра; $P_{l(s)gj}$ – вероятность или относительная частота значений l -го (s -го) параметра в его g -м интервале для пациентов j -го кластера диагнозов К(ХЗ).

Затем $\Delta \overset{\circ}{\xi}_{l(s)}$ ранжируют, записывая их в ряд, и отсчитывают влево от параметра с наибольшей динамикой m_ℓ и m_s параметров, отмечая их наименования. Считаем, что наименования ПК и М, вошедших в m_ℓ и m_s , одни и те же при диагнозах К и ХЗ (если это не так, то диагнозы будут отличимыми по наименованиям ПК и М, что сразу снимает вопрос о разделении диагнозов).

Также ранжируют и $\overset{\circ}{\xi}_{l(s)jK(X3)}$, – нормированные в долях средних нормативных значений ($\overset{\circ}{\xi}_{l(s)0}$) параметров l и s значения $\overset{\circ}{\xi}_{l(s)jK(X3)}$ в формулах (3.3). Если

$$\overset{\circ}{\xi}_{\ell'jK\check{X}3} > \overset{\circ}{\xi}_{\ell jK\check{X}3} \Big|_{\Delta \overset{\circ}{\xi}_{\ell jK\check{X}3}}, \quad \text{а} \quad \overset{\circ}{\xi}_{s'jK\check{X}3} < \overset{\circ}{\xi}_{sjK\check{X}3} \Big|_{\Delta \overset{\circ}{\xi}_{sjK\check{X}3}},$$

$$\ell \neq \ell' \qquad \qquad \qquad s \neq s'$$

то выбирают те ПК и М, которые имеют бóльшие средние нормированные значения для параметров вида ℓ и меньшие – для параметров вида s .

Если обнаружится, что один или несколько – m_0 ПК и М имеют динамику меньше 3%, то их фиксируют отдельно для каждого диагноза. Разница в m_0 и наименованиях будет означать специфику того или иного диагноза [17].

Из теории вероятностей [18] (центральная предельная теорема и теоремы о МО и σ^2 для сумм независимых случайных величин) можно показать, что при совместном учете большого числа параметров относительная разность сумм безразмерных измеренных и истинных значений ПК и М будет меньше относительной разности измеренного и истинного значения любого параметра, т.е. в суммарном случае относительные отклонения от истинных значений будут меньше, случайные флуктуации гомеостаза «сглаживаются» и частично нивелируются. Нивелирование случайностей при скрининге создается за счет многопараметричности и объясняется тем, что при измерениях число положительных и отрицательных случайных отклонений от истинных значений (математических ожиданий) параметров, приведенных к одной обобщенной оси, равновероятно и сумма этих отклонений при большом числе параметров близка к нулю). О том, что усложнение конструкций признаков и их комбинаций ведет к повышению точности распознавания, отмечено еще в работе [19]. Таким образом, при разделении по ПК и М здорового и нездорового состояний можно эффективно пользоваться и одним интегральным показателем, обобщающим изменения всех выбранных ПК и М.

Итак, одной из подзадач медицинской диагностики являлось представление такого интегрального показателя в форме функции или функционала состояния, который наилучшим образом обобщал и точно характеризовал состояния кластеров при G и \bar{G} диагнозах.

Из изложенного ясно, что этот интегральный показатель должен содержать суммы или произведения нормированных значений ПК и М. Очевидно, что большая часть нормированных параметров с тенденцией к росту будет больше единицы при развитии К или ХЗ, а с тенденцией к убыли – меньше единицы. Если теперь в числителе этого показателя записать произведение или сумму нормированных значений ПК и М, имеющих

тенденцию к росту, а в знаменателе – произведение или сумму нормированных значений ПК и М, имеющих тенденцию к убыли, то это отношение всегда будет больше единицы и иметь выраженную тенденцию к росту при патологиях К или ХЗ и теоретически равно единице по кластеру при здоровом состоянии, если $m_\ell = m_s$.

Этот показатель был назван в [17] обобщенным конфигурационным отношением (ОКО), уже примененном в разделе I.4 главы I. В рассматриваемых ниже способах ОКО применяется взамен обобщенного параметра, приведенного в [16] и уступающего ОКО по «чувствительности» к изменениям ПК и М. Формула¹ ОКО для j -го кластера диагноза К с учетом усиливающих эффектов

$$\text{ОКО} = R_{jk} = \left[\frac{\prod_{\ell=1}^{m_\ell} (\xi_{\ell jk}^{\circ H})^{\lambda_{\ell jk} b}}{\prod_{s=1}^{m_s} (\xi_{s jk}^{\circ H})^{\lambda_{s jk} b}} \right]^n \quad \text{или} \quad R_{jk} = \frac{\sum_{\ell=1}^{m_\ell} \lambda_{\ell jk} \xi_{\ell jk}^{\circ H} \sum_{s=1}^{m_s} \lambda_{s jk}}{\sum_{s=1}^{m_s} \lambda_{s jk} \xi_{s jk}^{\circ H} \sum_{\ell=1}^{m_\ell} \lambda_{\ell jk}}, \quad (3.4)$$

где $\xi_{\ell jk}^{\circ H} > 1$, а $\xi_{s jk}^{\circ H} < 1$; при $\xi_{\ell j|G}^{\circ H} \approx \xi_{s j|G}^{\circ H} \approx 1$ $R_{j|G} \approx 1$; $1 \leq n \leq 3$; $\lambda_{\ell jk}$ и $\lambda_{s jk}$ – весовые коэффициенты соответствующих параметров; b – добавочный коэффициент.

$$\lambda_{\ell jk} = \mu_{\ell jk} / \sigma_{\ell jk}^{\circ H} \cdot P_{\ell j} \cdot \delta_\ell \quad \text{и} \quad \lambda_{s jk} = \mu_{s jk} / \sigma_{s jk}^{\circ H} \cdot P_{s j} \cdot \delta_s, \quad (3.5)$$

где $\mu_{\ell jk}$ и $\mu_{s jk}$ – доли или коэффициенты вклада ℓ -го и s -го параметров крови (мочи) по отношению к среднему изменению остальных; $\delta_{\ell(s)}$ – коэффициент нестабильности при измерениях.

$$\mu_{\ell jk} = \frac{\Delta \xi_{\ell jk}^{\circ H} (m_\ell - 1)}{\sum_{\ell=1}^{m_\ell} \Delta \xi_{\ell jk}^{\circ H} - \Delta \xi_{\ell jk}^{\circ H}}, \quad \mu_{s jk} = \frac{\Delta \xi_{s jk}^{\circ H} (m_s - 1)}{\sum_{s=1}^{m_s} \Delta \xi_{s jk}^{\circ H} - \Delta \xi_{s jk}^{\circ H}}, \quad \delta_{\ell(s)} = \max_{i \in N} \frac{H_{\ell(s)_i} \cdot n}{\sum_{\psi=1}^n \xi_{\ell(s)_\psi}^{\circ H}};$$

$\Delta \xi_{\ell jk}^{\circ H}$ и $\Delta \xi_{s jk}^{\circ H}$ определяют по формулам (3.3); $H_{\ell(s)_i}$ – размах значений за n измерений;

¹ Для краткости записи формулы, произведения значений параметров мочи опускаем; для сокращения числа индексов диагноза ХЗ и ДО также опускаем, подразумевая их.

$$P_{\ell(s)}\left(\mathbb{K} \cap \overline{\mathbb{K}}\right) = \sum_{k=1}^p \sum_{\rho=1}^{\omega} P_{(\mathbb{K}_k - X_{3\rho})_{\ell,s}} + \sum_{k=1}^p \sum_{\varepsilon=1}^{\chi} P_{(\mathbb{K}_k - \text{ДО}_{\varepsilon})_{\ell,s}},$$

где $P_{\ell(s)}$ – общая площадь пересечения диагнозов \mathbb{K} и $\overline{\mathbb{K}}$ по параметру $\ell(s)$; $P_{(\mathbb{K}_k - X_{3\rho})}$ и $P_{(\mathbb{K}_k - \text{ДО}_{\varepsilon})}$ – вероятности пересечения соответствующих распределений плотностей вероятностей; если $\min \lambda_s < \min \lambda_l < 1$, то $b \geq 1/\min \lambda_s$.

Параметр, имеющий $\max \lambda$, будет наиболее значимым.

Несомненным достоинством ОКО является его высокая реакция на незначительные изменения ПК и М. В связи с этим повышается разрешающая способность распознавания.

Для сравнения с ОКО: R_{jG} , $R_{j\overline{G}_0}$, $R_{j\mathbb{K}(X_3)}$ вычисляют также ОКО i -ого проверяемого человека¹ – R_{ij} .

III.3. Решающие правила разделения здорового и нездорового состояний

Рассмотрим два варианта РП на первом этапе диагностирования при различении состояний G (или \overline{G}_0) и \overline{G} . Очевидное следствие первой гипотезы дает $R_{\overline{G}} > R_{G(\overline{G}_0)}$.

1. Вариант, когда с введением ОКО происходит разделение указанных состояний с отсутствием зоны их пересечения (перемешивания).

В этом случае РП при первой проверке следующие:

$$\begin{aligned} R_{ij} \leq R_{jG} \max &\rightarrow X_{ij} \in G \\ R_{ij} > R_{jG} \max &\rightarrow X_{ij} \in \overline{G}, \end{aligned} \tag{3.6}$$

где $R_{jG} \max$ определяется при нормальном распределении R_{jG} (или $R_{j\overline{G}_0}$) по формуле

¹ Проверяемого человека по его мед. карте и вербальным ответам при предварительном осмотре относят к j -му кластеру. Естественно, что если у проверяемого появились болевые ощущения, его подвергают инструментальному диагностированию и с учетом данных анализов ставят диагноз.

$$R_{jG} \max = R_{jG} + \sigma_{R_{jG}} \cdot t_{P_\partial}, \quad (3.7)$$

где обычно $t_{P_\partial} < 3$ зависит от заданной доверительной вероятности P_∂ ; \rightarrow – знак импликации, сходный с союзом «если..., то...»; X_{ij} – состояние i -го проверяемого человека, отнесенного к j -му кластеру, $j = \overline{1, abc(1 + C_\omega^1 + C_\omega^2)}$.

2. Менее удачный вариант, при котором имеет место незначительное пересечение областей состояний (диагнозов) G и \bar{G} .

а) постановка диагноза при первой проверке вне области пересечения

$$\begin{aligned} R_{ij} > R_{jG} \max &\rightarrow X_{ij} \in \bar{G} \\ R_{ij} \leq \min_{\bar{G}} R_{j\bar{G}} \min &\rightarrow X_{ij} \in G, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где $R_{j\bar{G}} \min$ – нижняя граница распределения плотностей вероятности ОКО в j -м кластере диагнозов \bar{G} .

б) внутри области пересечения.

В этом случае неизбежно появляются ошибки 1-го рода («ложная тревога») и 2-го – пропуск цели (К или ХЗ).

Для достоверной постановки диагнозов \bar{G} следует применить первое из условий (3.8), при этом вероятность пропуска цели

$$\beta = P(K_K) \vee P(XZ_\rho) \int_{-\infty}^{R_{jG} \max} f(R_{jK_K \vee XZ_\rho}) dR_{jK_K \vee XZ_\rho}, \quad (3.9)$$

где $P(K_K)$ и $P(XZ_\rho)$ – априорные вероятности диагнозов.

Еще один способ разделения G и \bar{G} состояний основан на составлении независимых, очевидных неравенств, при которых ОКО и групповые ОКО (ГОКО) ПК и М в кластерах \bar{G} диагнозов заведомо больше ОКО и ГОКО ПК и М при состоянии $G(\bar{G}_0)$. Это, например, такие неравенства:

$$R_K > R_M, \quad R_K[>0,5] > R_K[<0,5], \quad R_M[>0,5] > R_M[<0,5], \quad (3.10)$$

где «К» и «М» – индексы, обозначающие кровь и мочу; $R_{K(M)}[>0,5]$ и $R_{K(M)}[<0,5]$ – ОКО ПК и М, половины из которых имеют, соответственно, большую и меньшую динамики.

При перемножении левых и правых частей неравенств (3.10) центры¹ распределений отношений их произведений будут значительно удалены друг от друга. Обозначим произведения левых и правых частей неравенств (3.10) через $\prod_{v=1}^3 \varphi_v$ и $\prod_{v=1}^3 \psi_v$. Тогда РП постановки $G(\bar{G}_0)$ диагнозов будут:

$$\rho_{\bar{G}} / \rho_G > \sigma_{\rho_{\bar{G}}} / \sigma_{\rho_G} \rightarrow X_{ij} \in G, \quad (3.11)$$

$$\text{где } \rho_{\bar{G}} = \frac{\prod_{v=1}^3 \varphi_{v_{ij}}}{\prod_{v=1}^3 \psi_{v_{ij}}} - \frac{\prod_{v=1}^3 \varphi_{v_{j\bar{G}}}}{\prod_{v=1}^3 \psi_{v_{j\bar{G}}}}, \quad \rho_G = \frac{\prod_{v=1}^3 \varphi_{v_{ij}}}{\prod_{v=1}^3 \psi_{v_{ij}}} - \frac{\prod_{v=1}^3 \varphi_{v_{jG}}}{\prod_{v=1}^3 \psi_{v_{jG}}}.$$

Обратный знак неравенства (3.11) означает, что $X_{ij} \in \bar{G}$, $\rho_{G(\bar{G})}$ – абсолютное расстояние или расстояние по Хэммингу [20].

Считаем, что при этом удается полностью разделить области G и \bar{G} состояний. Если все же имеет место небольшое их пересечение, то следует применить методы, изложенные в разделе III.4.

III.4. Методы разделения пересекающихся диагнозов² К и ХЗ

Если конкурирующие диагнозы – К и ХЗ, то ошибка 1-го рода означает «ложную тревогу», а ошибка 2-го рода – пропуск цели (пропуск К). При двух ХЗ или двух К бессмысленно говорить о ложной тревоге и пропуске цели.

Два-пять конкурирующих диагноза выдаются компьютером по экстремуму выбранной меры близости состояния i -го проверяемого к кластерам этих диагнозов.

В методах 3.4.1 и 3.4.2. применена метрическая мера близости, на основе которой в п. I.7 главы I созданы только две функции состояний – ΦC_1 и ΦC_2 из ряда v ΦC , которые можно составить. В методе координат сначала используется метрическая мера близости, а затем вероятностная (п. 3.4.3).

¹ Если распределения близки к нормальному; если же они будут отличаться от нормального, то следует говорить об удаленности их мод или медиан.

² С целью сокращения числа символов и индексов в последующих формулах и тексте, - диагноз ДО опускаем, подразумевая его.

Методы аугментации и аппроксимации локально-дискретных отношений.

Эти методы решают две задачи: достоверное установление состояния $G \vee \bar{G}$ или «болен – не болен» при первой проверке и если «болен» (\bar{G}) - постановку конкретного диагноза: $K_K \vee XZ_p$.

Сущность первого метода заключается в том, что для разделения диагнозов G , XZ и K , прибегают к трансформации параметрического пространства, сведенного к ОКО, к целенаправленному преобразованию пространства ПК и М, построенному на дифференцированной аугментации (усиления, наращивания) максимальных и близких к ним отношений ПК и М числителя и знаменателя ОКО диагнозов K и XZ , благодаря чему все полученные отношения смещаются вправо, в сторону увеличения. При состоянии G изменений тех же параметров в сторону возрастания или уменьшения не происходит и их отношения не претерпевают изменений, в результате чего области G и \bar{G} состояний отдаляются друг от друга, а зона пересечения становится меньше. Таким образом проводят разъединение этих диагнозов.

Возведение ОКО в степень, бóльшую единицы, приводит к дилатации (растяжению) областей существования ОКО при диагнозах XZ и K и смещению их вправо.

3.4.1. Структура преобразованного ОКО при каскадной аугментации

В этом варианте разделение диагнозов обеспечивается за счет каскадной аугментации отношений произведений максимальных и близких к ним значений ПК и М, находящихся в числителе ОКО (возрастающих с развитием онкопатологии) и имеющих наибольшие изменения к произведениям наименьших и близких к ним значений ПК и М, находящихся в знаменателе (убывающих с развитием патологии и также имеющих наибольшие изменения, только в сторону убыли). В результате чего после каждой итерации максимальные значения преобразованного ОКО умножают на максимальные значения предыдущей и т.д. Полученное после перемножения на

первоначальное ОКО число будет значительным при диагнозах К и ХЗ, тогда как при диагнозе G это число мало изменяется, о чем было отмечено выше, благодаря чему и происходит разделение диагнозов.

Эту процедуру проводят следующим образом: а) для уменьшения области пересечения диагнозов средние значения параметров в ОКО при К и ХЗ диагнозах ранжируют, фиксируя очередность ПК и М в порядке их возрастания для числителя ОКО и убывания – для знаменателя, т.е. номер каждого параметра и его наименование;¹ б) ПК и М числителя и знаменателя ОКО делят на две части (разделение дихотомическое, но необязательно пополам), перемножают значения параметров правых частей числителя и знаменателя, имеющих, соответственно, большие и меньшие значения, и делят произведения числителя на произведение знаменателя; в) далее опять разделяют правые части числителя и знаменателя на две части и перемножают значения параметров правых частей числителя и знаменателя и делят произведение числителя на произведение знаменателя и т.д. (с каждой итерацией число параметров правых частей, естественно, уменьшается) до отношения наибольшего значения числителя и наименьшего – знаменателя; г) после этого первоначальное ОКО умножают на образованные итерацией отношения.

Расчетная формула аугментированного ОКО для j -х кластеров диагнозов К и ХЗ

$$\text{ОКО}_a = R_{a\xi} = R_{jK} \cdot \frac{\prod_{\ell=\frac{m_\ell}{2}}^{m_\ell} \xi_{\ell jK}^H \prod_{\ell=\frac{3m_\ell}{4}}^{m_\ell} \xi_{\ell jK}^H \cdot \dots \cdot \xi_{\ell^* jK}^H \max}{\prod_{s=\frac{m_s}{2}}^{m_s} \xi_{s jK}^H \prod_{s=\frac{3m_s}{4}}^{m_s} \xi_{s jK}^H \cdot \dots \cdot \xi_{s^* jK}^H \min}, \quad (3.12)$$

где R_{jK} – первоначальное ОКО, определенное по формуле (3.4); (индекс «хз» опускаем), $\xi_{\ell^* jK}^H \max$ и $\xi_{s^* jK}^H \min$ – максимальное и минимальное значения ℓ^* и s^* параметров в j -х кластерах К и ХЗ диагнозов (крайние правые члены

¹ Возможен другой вариант: фиксировать значения ПК и М для диагнозов К и ХЗ в заранее установленной нумерации параметров. Тогда последовательности этих значений будут неранжированными с различными конфигурационными кривыми для каждого из диагнозов.

ранжированных рядов). Аугментация ОКО в виде выражения (3.12) может полностью разделить диагнозы G и \bar{G} . Отношение R_{aij} определяют и для ij -го проверяемого человека.

При разделении K , $X3$ и $ДО$ диагнозов ПК и М пациентов кластеров с этими диагнозами и проверяемого человека, с измеренными при проверке значениями, в их ранжированных последовательностях должны быть расставлены в числителе и знаменателе ОКО в последовательности, соответствующие наименованиям (номерам) параметров в их ранжированных последовательностях в j -м кластере некоего опорного (базового) диагноза, имеющего наибольшую динамику параметров.

Если у j -го кластера опорного диагноза, например, K_K построить ранжированную (по значениям) последовательность ПК и М и пронумеровать числами натурального ряда от 1 до m_ℓ и от 1 до m_s , с фиксацией наименований ПК и М, то согласно принципу 1 (см. (3.1)) 2-й гипотезы, ранжированные нумерационные последовательности ПК и М, для остальных K диагнозов и диагнозов $X3$, окажутся неупорядоченными (отличными от натурального ряда) и при каждом диагнозе одноименные ℓ и s параметры в этих последовательностях будут иметь свои номера (N) и значения (ξ). При совпадении же номеров одноименных ПК и М в их последовательностях для кластеров опорного диагноза и остальных, различные значения ПК и М для кластеров других диагнозов будут расположены в виде веера конфигураций ломаных линий в отличие от прямых линий параметров ℓ и s для кластеров опорного диагноза.

Введение нумерации ПК и М усиливает их характеристики и поэтому наилучшим образом позволит разделить диагнозы K и $X3$.

Степень совпадения одноименных параметров и связанное с ним РП можно связать выражением:

$$\rho_N = \min_G \left(\sum_{\ell=1}^{m_\ell} |N_{\ell_{ij}} - N_{\ell_{jK(X3)}}| + \sum_{s=1}^{m_s} |N_{s_{ij}} - N_{s_{jK(X3)}}| \right) \rightarrow X_{ij} \in K \vee X3. \quad (3.13)$$

При $\rho_N = 0$ теоретически имеет место полное совпадение ℓ_{ij} и s_{ij} с $\ell(s)_{jK} \vee \ell(s)_{jX3}$.

Аугментацию ОКО по номерам ПК и М, т.е. R_{a_N} , можно построить подобно R_{a_ξ} , заменив в выражении (3.12) значения ПК и М на их номера, возведенные в знаменателе ОКО в степень «-1».

Аугментацию ОКО можно осуществить не только в виде (3.12), но и по другой схеме, например, путем разбивки последовательностей значений ПК и М и их номеров на интервалы (наборы) сначала по три, затем по четыре ПК и М и представлении математической модели того или иного диагноза К, ХЗ или ДО в виде функционала состояния (ФС). Допуская, что $m_\ell \approx m_s$

$$\Phi C_\xi = R_\xi = \sum_{\nu=1}^{\Omega_3} \frac{R_{\xi_3 \nu+1}}{R_{\xi_3 \nu}} \sum_{\nu=1}^{\Omega_4} \frac{R_{\xi_4 \nu+1}}{R_{\xi_4 \nu}} \quad \text{и} \quad \Phi C_N = R_N = \sum_{\nu=1}^{\Omega_3} \frac{R_{N_3 \nu+1}}{R_{N_3 \nu}} \sum_{\nu=1}^{\Omega_4} \frac{R_{N_4 \nu+1}}{R_{N_4 \nu}}, \quad (3.14)$$

где $R_{\xi(N)_{3\nu}}$ и $R_{\xi(N)_{4\nu}}$ – интервальные ОКО вида ξ и N, выбирая, соответственно, по 3 и 4 ℓ и s ПК и М в ν -м интервале разбивки; Ω_3 и Ω_4 – число интервалов при разбиении по 3 и по 4.

Параметры отсчитывают от бóльших номеров и значений к меньшим в кластерах опорного диагноза, отбрасывая 1 или 2 ПК и М вида ℓ и s при делении m_ℓ и m_s на 3 и 4 с остатком. Такой порядок отсчета ПК и М проводят и для кластеров остальных диагнозов.

Возможно конструирование и других, отличных от (3.14), ФС путем разбивки по иному типу.

По полученным значениям R_ξ и R_N для кластеров К и ХЗ диагнозов строят гистограммы и кривые распределения плотностей вероятностей этих отношений (для оценки областей пересечения диагнозов).

Итак, R_{a_ξ} и R_{a_N} представляют собой функционалы состояний кластеров диагнозов К и ХЗ и проверяемого человека, принадлежность которого к тому или иному диагнозу определится выбранной мерой близости, например, минимумом «расстояния по Хэммингу» - ρ или квадрата расстояния.

3.4.2. Метод линейной аппроксимации локально-дискретных отношений

В этом варианте значения ПК и М проверяемого человека каждый раз записывают в последовательности, соответствующей ранжированной последовательности каждого диагноза К, ХЗ и ДО. Их различие проводят в следующем порядке: а) если $m_l > m_s$, то число значений ξ_i'' в числителе оставляем равным m_s , т.е. $m_l = m_s$, убирая несколько параметров $\Delta = m_l - m_s$, которые имели наименьшие значения в ранжированном ряду; б) максимальное нормированное значение параметра (крайний правый член ранжированного ряда l параметров) делят на нормированное минимальное значение (крайний правый член ранжированного ряда s параметров), получая отношение r_{\max} ; в) ближайшее к максимальному нормированное значение l параметров делят на ближайшее к минимальному нормированное значение s параметров, получая отношение $r_{\max-1}$ и т.д., двигаясь к левым краям ранжированных рядов, т.е. к минимальному значению l параметров и максимальному – s параметров, получая при делении минимальное отношение r_{\min} ; г) наносят на оси абсцисс нумерацию полученных значений от единицы до m_s , а по оси ординат откладывают значения r от соответствующих им номеров, причем значение, отложенное от единицы, минимально, а от номера m_s – максимально; д) по полученным значениям r , методом наименьших квадратов (МНК), ломанную линию, соединяющую эти значения, аппроксимируют линейной зависимостью вида $y = c + dx$, где коэффициент d представляет собой тангенс угла наклона ($\text{tg}\varphi$) аппроксимирующей линии к оси нумерации; е) так же, как и в случае с ОКО_a , отношения r , $\text{tg}\varphi$ и c определяют для j -х кластеров К и ХЗ диагнозов и для i -го проверяемого человека.

Для ранжированных последовательностей ПК и М кластеров каждого из диагнозов К и ХЗ отношения r_n ($n = 1, 2 \dots m_s$) будут в идеале находиться на аппроксимирующей линии. Поэтому суммарная квадратичная погрешность аппроксимации (СКПА) будет минимальной при $m \geq 30$.

Если каждый раз выстраивать нумерационную последовательность ПК и М у проверяемого человека в соответствии с ранжированными последовательностями этих параметров в кластерах каждого из диагнозов К или ХЗ, то при сравнении эта последовательность у проверяемого окажется неранжированной, но она будет отображать состояние, близкое к тому диагнозу, который должен быть поставлен. Неранжированная последовательность приведет к увеличению СКПА. Близость состояния проверяемого к тому или иному диагнозу определится \min СКПА.

Если $m_s \ll m_l$ или наоборот, то указанную аппроксимацию можно провести отдельно для l и s параметров в соответствии с порядком их следования в ранжированных рядах каждого из диагнозов.

Методом линейной аппроксимации можно диагностировать К и ХЗ по $\operatorname{tg} \varphi$, c и СКПА, причем \min СКПА будет служить подтверждением установленного по $\operatorname{tg} \varphi$ и c диагноза.

Формулы для определения соответствующих СКПА имеют вид:

$$A_{ij} = \sum_{n=1}^{m_s} (\widehat{r}_{n_{ij}} - r_{n_{ij}})^2, \quad (3.15)$$

где $\widehat{r}_{n_{ij}}$ – линейризованные значения; $\widehat{r}_{n_{ij}} = c_{ij} + d_{ij} \cdot n$, $n = 1, 2, \dots, m_s$.

При отдельной аппроксимации для l и s параметров

$$A_{l(s)ij|_{\kappa(\bar{\kappa})}} = \sum_{l(s)=1}^{m_l(m_s)} (\widehat{\xi}^{H l(s)ij|_{\kappa(\bar{\kappa})}} - \xi^{H l(s)ij|_{\kappa(\bar{\kappa})}})^2 \quad (3.16)$$

Полагаем, что у пациентов одного и того же кластера, с одним и тем же диагнозом (D) будет соблюдаться отношение

$$\frac{\widehat{r}_{\max}}{\widehat{r}_{\min}} \Big|_{i'(j_o, D_o)} = \frac{\widehat{\xi}_{l_{\max}}^H \cdot \widehat{\xi}_{s_{\max}}^H}{\widehat{\xi}_{s_{\min}}^H \cdot \widehat{\xi}_{l_{\min}}^H} \Big|_{i'(j_o, D_o)} \approx \text{const},$$

что равносильно (индексы j_o и D_o опускаем) $d_{i'} / c_{i'} = \operatorname{tg} \varphi_{i'} / c_{i'} = a_{i'} \approx \text{const}$ или $\forall_{i'} a_{i'} \approx \text{const}$ (считаем, что $\operatorname{tg} \varphi_{i'} \neq \text{const}$), но $a_j \neq a_{j'}$, $a_{jk} \neq a_{j\bar{k}}$, $a_{jk} \neq a_{j\bar{k}'}$ и $a_{j\bar{k}} \neq a_{j\bar{k}'}$; $i' = \overline{1, N_j}$, – i' -й пациент j -го кластера.

Приведем РП постановки прелиминарного диагноза К или \bar{K}

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \min_G \left| \frac{tg \varphi_{ij}}{c_{ij}} \Big|_{\kappa(\bar{K})} - \frac{tg \varphi_{j \kappa(\bar{K})}}{c_{j \kappa(\bar{K})}} \right| \\ S &= \min_G A_{ij} \Big|_{\kappa(\bar{K})} \leq \max A_{ij} \Big|_{\kappa(\bar{K})} \end{aligned} \right\} \rightarrow X_{ij} \in K \vee \bar{K}. \quad (3.17)$$

В общем случае, когда $m_l \neq m_s$, чтобы не терять при образовании r часть параметров l или s , можно задать область существования всех K диагнозов пациентов j -го кластера с отдельными l и s параметрами. Тогда РП принадлежности к \bar{K} -диагнозам (индексы l и s опускаем) (в этом случае имеет место вариант опорного (базового) диагноза)

$$\max_{k \in p} \left[\max_{i'} (c_{j\kappa_k} \pm d_{j\kappa_k} n) \right] < (c_{ij|\kappa_k} \pm d_{ij|\kappa_k} n) \vee (c_{ij|\kappa_k} \pm d_{ij|\kappa_k} n) < \min_{k \in p} \left[\min_{i'} (c_{j\kappa_k} \pm d_{j\kappa_k} n) \right] \rightarrow X_{ij} \in \bar{K}$$

(знак « $-$ » для s -параметров).

Аппроксимирующие линии, выходящие за границы обозначенного «коридора», будут соответствовать \bar{K} . РП принадлежности к K_* диагнозу

$$\left. \begin{aligned} \min_{k \in p} \left[\min_{i'} (c_{j\kappa_k} \pm d_{j\kappa_k} n) \right] \leq (c_{ij|\kappa_k} \pm d_{ij|\kappa_k} n) \leq \max_{k \in p} \left[\max_{i'} (c_{j\kappa_k} \pm d_{j\kappa_k} n) \right] \\ S_{K_*} = \min(A_{lij|\kappa(\bar{K})} + A_{sij|\kappa(\bar{K})}) \end{aligned} \right\} \rightarrow X_{ij} \in K_*. \quad (3.18)$$

Здесь аппроксимирующие линии в пределах обозначенного коридора могут принадлежать и к \bar{K} . В этом случае для части диагнозов \bar{K} и всех K диагнозов применяют РП (3.17). СКПА вычисляют для ij и при возможных \bar{K} диагнозах, удовлетворяющих первому условию (3.18).

Для достоверного установления истинного диагноза при РП (3.18) выделяют еще 3 ÷ 4 диагноза – «соседа» с ближайшими к $\min S$ значениями. С этими пятью наиболее вероятными диагнозами проверяемого направляют на инструментальное диагностирование для установления истинного, если хотя бы один диагноз из первых двух – раковый; в противном случае, если первые два диагноза – нераковые, инструментальное диагностирование не проводят.

Вообще, достоверность постановки истинного диагноза при второй проверке увеличивается, поскольку она, подтверждая диагноз первой, обнаружит при развитии заболевания «дрейф» X_{ij} в сторону этого диагноза. Дрейф выразится с использованием, например, РП (3.17) в виде условий

$$\min \rho_1 > \min \rho_2 \wedge \min S_1 > \min S_2, \quad (3.19)$$

где 1 и 2 – номера проверок (межпроверочный период – 4-6 мес.).

РП (3.17) является самодостаточным, если выполняются оба условия; если второе условие, подтверждающее первое, с вычисленными по (3.15) СКПА, не выполняется, то надо применять другие ФС, которые, как уже отмечалось, являются моделями различия диагнозов.

Еще один ФС кластеров диагнозов К и ХЗ может быть построен, если будут верны второе следствие 2-й гипотезы и второй ее принцип, т.е. если в ходе клинических и поликлинических исследований будет установлено, что средние значения некоторых комбинаций отношений $R_{\delta/x}$, R_{Π} и R_{Π} окажутся различными при диагнозах К и ХЗ.

ФС в этом случае может быть таким:

$$F_{jK(XЗ)} = \frac{R_{\delta/x_{jK(XЗ)}} \times R_{\Pi_{jK(XЗ)}}}{R_{\Pi_{jK(XЗ)}}} \vee \frac{R_{\Pi_{jK(XЗ)}} \times R_{\delta/x_{jK(XЗ)}}}{R_{\Pi_{jK(XЗ)}}} \vee \frac{R_{\Pi_{jK(XЗ)}} \times R_{\Pi_{jK(XЗ)}}}{R_{\delta/x_{jK(XЗ)}}}.$$

РП имеет тот же вид: $\min \rho \quad \rho_F = \min_G |F_{ij} - F_{jKK(X)}| \rightarrow X_{ij} \in K \vee XЗ.$

Таким образом, при разделении диагнозов и постановке предварительного сравниваются не многомерные распределения ПК и М, а их ФС, являющиеся математическими характеристиками диагнозов К и ХЗ и проверяемого человека. То, что при построении ФС выбранные ПК и М приводятся к безразмерному виду, а их оси – к одной обобщенной оси, – позволяет оперировать с одномерными распределениями того или иного ФС. Но возможен и другой метод, позволяющий на плоскости различить точки того или иного диагноза.

3.4.3. Метод координат¹

В этом методе два или три ФС представляют в виде векторов и направляют их по осям координат.

Математическая процедура метода состоит из следующих пунктов.

¹ Формально его можно считать развитием метода К-ближайших соседей [43]. Дальнейшее обобщение и развитие см. п.п. III.6, 5.2.1 и 5.2.2.

1. По оси абсцисс откладывают значение одного ФС (ΦC_1) i' -го пациента j -го кластера диагноза $D_\pi (i' = \overline{1, N_j}, \pi = \overline{1, L}, \text{где } L = p + \omega + \chi)$, а по оси ординат – значение другого ФС (ΦC_2) этого же пациента. Таким образом, имеем точку с результирующим значением вектора ФС пациента, образующимся при сложении векторов

$$\Phi C = \alpha \Phi C_1 + \beta \Phi C_2,$$

где α и β – орты; ΦC_1 и ΦC_2 – координаты вектора состояния.

2. Подобным образом на плоскости отмечают все точки с координатами $\Phi C_{1_{ijD\pi}}$ и $\Phi C_{2_{ijD\pi}}$, являющимися концами векторов $\Phi C_{ijD\pi}$ и образующие нечеткие области состояний пациентов j -го кластера с каждым из выбранных диагнозов, причем их области существенно перемешаны.

3. Отмечают на координатной плоскости точку A_{ij} , соответствующую состоянию i -го проверяемого, отнесенного к j -му кластеру (здесь $j = \overline{1, \lambda_1}$ (см. п. III.3)), с координатами $\Phi C_{1_{ij}}$ и $\Phi C_{2_{ij}}$. (Две ФС в общем виде были представлены в разделе I.7 первой главы).

4. С центром в т. A_{ij} проводят окружность такого радиуса r , чтобы внутри этой окружности оказались точки с пятью разными диагнозами, наиболее вероятными (н. в. д.).

5. Подсчитывают число точек M каждого из 5-ти диагнозов с указанными в п. 2 координатами, удовлетворяющими неравенству

$$\sqrt{\left(\Phi C_{1_{i'jD\pi}} - \Phi C_{1_{ij}}\right)^2 + \left(\Phi C_{2_{i'jD\pi}} - \Phi C_{2_{ij}}\right)^2} \leq r; \quad \pi = \overline{1, 5}; \quad i' = \overline{1, N_j}.$$

6. Вычисляют вероятность принадлежности ij -го проверяемого к диагнозу D_π по вектору ФС

$$P(\Phi C_{ij} / D_\pi) = M_{jD\pi} / \sum_{\pi=1}^5 M_{jD\pi}; \quad \sum_{\pi=1}^5 P(\Phi C_{ij} / D_\pi) = 1 \quad (3.20)$$

7. Наиболее вероятный диагноз определяют по максимальному значению вероятностной дискриминантной функции

$$\max_{\pi} P(D_\pi) P(\Phi C_{ij} / D_\pi), \quad (3.21)$$

где $P(D_\pi)$ – априорная вероятность диагноза D_π .

Рассмотрим теперь выбор D_π , исходя из двумерной или трехмерной плотности распределений. В этих случаях координаты вектора состояний: ΦC_1 и ΦC_2 или ΦC_1 , ΦC_2 и ΦC_3 должны быть независимыми и двумерные плотности распределения

$$f(\Phi C_1, \Phi C_2/D_\pi) = f(\Phi C_1/D_\pi) \cdot f(\Phi C_2/D_\pi). \quad (3.22)$$

Тогда наиболее вероятный диагноз можно установить по максимуму двумерной дискриминантной функции

$$\max_\pi P(D_\pi) f(\Phi C_{1i}/D_\pi) \cdot f(\Phi C_{2i}/D_\pi) \quad (3.23)$$

При реализации второго принципа следствия второй гипотезы следует рассмотреть трехмерное пространство с разложением векторов $R_{\delta/x}$, R_π и R_n по осям координат с результирующим вектором

$$R = \alpha R_{\delta/x} + \beta R_\pi + \gamma R_n$$

В этом случае наиболее вероятный диагноз можно установить по максимуму трехмерной дискриминантной функции

$$\max_\pi \left[\lg P(D_\pi) + \sum_{\mu=1}^3 \lg f(R_{\mu_j} / D_\pi) \right] \quad (3.24)$$

8. Диагнозы упорядочивают в соответствии с цепочкой неравенств

$$\max_\pi (\cdot) > (\cdot)_{\max-1} > \dots > (\cdot)_{\max-4}, \quad (3.24б)$$

где $\max(\cdot)$ находят по условию (3.21 ÷ 23) или (3.24).

Можно предложить несколько (ν) различных независимых ФС, построенных исходя из изложенных выше гипотез и принципов.

Изобретение ФС является самым важным этапом в процессе постановки диагноза. При этом описание РП строится на основе ФС и выбранной меры близости.

Рассмотрим алгоритм постановки диагноза при числе ФС $\nu = 4$.

III.5. Алгоритм предварительного выбора нескольких наиболее вероятных диагнозов (н.в.д.) без применения ВМП

В этом и предыдущем разделах приведены промежуточные РП и условия упорядочения пяти н.в.д. отдельно для метрической и вероятностной мер близости с последующим сравнением, сопоставлением двух пятерок н.в.д. Это проведено для того, чтобы, во-первых, в случае их не совпадения применить ВМП и, во-вторых, при использовании ВМП определить число различных, возможных ОДО (см. следующий раздел, III.6), с дальнейшим выбором лучшего уже на практике.

При постановке диагноза можно использовать объединения двух или нескольких функционалов РП в виде обобщенного РП или ФС (см. ниже в этом разделе), но можно проанализировать, на какой диагноз укажут наибольшее число приведенных РП.

Сначала следует выяснить: при всех ли ФС ρ будет минимальным и соответствовать какому-то одному диагнозу – D , ($D \subset K \vee X3 \vee ДО$). Если ответ утвердительный, то этот диагноз и будет прелиминарным. Если нет, то ставится общий вопрос: «Сколько ФС дадут $\min \rho$ при том или ином диагнозе»?

1. На осях каждого из 4-х ФС наносят точки их средних значений – $\overline{\Phi C}_{jq}$ для j -х кластеров больных K и $X3$.

2. Для проверяемого человека, отнесенного к j -му кластеру, вычисляют ΦC_{ijq} для каждого q ($q = 1, 2, \dots, \nu = 4$) и наносят эти точки на оси ΦC_q . В качестве меры близости принимают, например, квадрат расстояния или ρ .

$$\rho_{qD} = \left| \Phi C_{ijq} - \overline{\Phi C}_{jqD} \right|.$$

3. Находят минимальное значение ρ , достигаемое при диагнозе D_B при данном q -м ФС, т.е.

$$\rho_{qD_B} = \min_{\pi} \left| \Phi C_{ijq} - \overline{\Phi C}_{jqD_{\pi}} \right| \rightarrow X_{ij} \in D_B.$$

Каждый ΦC_q укажет на один из возможных диагнозов, а каждый из них может оказаться предпочтительным, обеспечивающим $\min \rho$ при двух и более (до $\nu = 4$) ΦC .

Наиболее вероятный диагноз и «близкие» к нему, по значениям выбранной меры близости, диагнозы-«соседи» можно определить и по вероятностной дискриминантной функции, учитывающей непопадание ΦC_{qij} в границы доверительных интервалов распределения ΦC_q каждого из диагнозов

$$J_{qD_\pi} = \max_{\pi} [L_{D_\pi} P(D_\pi) f(\Phi C_{qij} / D_\pi)], \quad (3.25)$$

$$\text{где } L_{D_\pi} = \begin{cases} 1, & \text{если } \check{\Phi} C_{qD_\pi} < \Phi C_{qij} < \hat{\Phi} C_{qD_\pi} \\ 0, & \text{если } \hat{\Phi} C_{qD_\pi} < \Phi C_{qij} \wedge \Phi C_{qij} < \check{\Phi} C_{qD_\pi}; \end{cases}$$

$P(D_\pi)$ – априорная вероятность диагноза D_π ; $\pi = 1, 2, \dots (p + \omega + \chi)$;

$f(\Phi C_{qij} / D_\pi)$ – плотность вероятности ΦC_q пациентов j -го кластера диагноза D_π при значении ΦC_q i -го проверяемого, отнесенного к j -му кластеру, или при условии, что проверяемый принадлежит диагнозу D_π .

Для выбора наиболее вероятных диагнозов в случае, когда часть ПК и М имеет негауссово распределение, среди которых возможны и неодномодальные, – имеет смысл перейти вновь к исходным ПК и М. Тогда выбор диагнозов может быть осуществлен по схеме: $\max_{D_B} (\cdot) \rightarrow \max_{D_{B'}} - 1 (\cdot) \rightarrow \dots$ значений выражения, записанного в виде общей формулы Байеса

$$P(D_{\pi} / \xi_{l(s)j}) = \frac{P(D_\pi) \prod_{\ell=1}^{m_\ell} (P_{\ell gj} |_{\xi_{\ell ij}} / D_\pi) \cdot \prod_{s=1}^{m_s} (P_{sg'j} |_{\xi_{sij}} / D_\pi)}{\sum_{\pi=1}^{p+\omega+\chi} P(D_\pi) \prod_{\ell=1}^{m_\ell} (P_{\ell gj} |_{\xi_{\ell ij}} / D_\pi) \cdot \prod_{s=1}^{m_s} (P_{sg'j} |_{\xi_{sij}} / D_\pi)}, \quad (3.26)$$

$$\sum_{\pi=1}^L P(D_\pi) = 1, \quad \sum_{\pi=1}^L P(D_\pi / \xi_{l(s)j}) = 1,$$

где $P(D_{\pi} / \xi_{l(s)j})$ – апостериорная вероятность диагноза D_{π} ; выражения в скобках – это вероятности или относительные частоты значений ℓ -го (s -го) параметров, соответственно, на их интервалах (g и g'), куда попало значение $\xi_{l(s)}$

i -го проверяемого человека, отнесенного к j -му кластеру, к которому принадлежат и сравниваемые пациенты с D_π диагнозом.

4. В общем случае формально могут быть 5-ть вариантов степени предпочтения диагнозов D_b при всех ФС, если не оценивать вероятность существования того или иного варианта: 4-0; 3-1; 2-2; 2-1-1; 1-1-1-1- числа одноименных (> 1 - го) и не одноименных ($< 2 - x$) диагнозов D_{bq} с последующими оценками каждого из них по 5-ти бальной системе от 1 до 5 (диагнозам, не оказавшимся среди возможных, ставят нулевую оценку).

Первый вариант соответствует достижению \min_{ρ_q} или \max_{J_q} всех 4-х ФС при одном и том же предварительном диагнозе – D_π ; второй вариант показывает, что три ФС указали на один и тот же диагноз, а 4-ый – на другой и т.д. Первые два варианта не вызывают сомнений в каком-то конкретном D_π . В остальных вариантах установить D_π на этом уровне распознавания не представляется возможным. В этих случаях для выявления D^* и его ближайших 4-х диагнозов-соседей предлагается следующая процедура.

Степень предпочтения D_b при q -м ФС определим как:

$$n_{D_q} = \begin{cases} 5, \text{ если } \rho_q = \min \vee J_q = \max \\ 4, \text{ если } \rho_q = \min + 1 \vee J_q = \max - 1 \\ 3, \text{ если } \rho_q = \min + 2 \vee J_q = \max - 2 \\ 2, \text{ если } \rho_q = \min + 3 \vee J_q = \max - 3 \\ 1, \text{ если } \rho_q = \min + 4 \vee J_q = \max - 4 \end{cases} \quad (3.27)$$

Предпочтительный диагноз – D^* и принадлежность к нему проверяемого человека по всем ν определяем по РП.

$$n_{D^*} = \max_{D_\pi} \sum_{q=1}^{\nu} n_{D_q} \rightarrow X_{ij} \in D^* \quad (3.28a)$$

Такая степень предпочтения (3.28a) пригодна при примерно равновероятной постановке истинного (правильного) диагноза при всех ФС.

В идеале все ФС должны указывать по выбранному критерию на один и тот же предварительный диагноз – D_π . Этот случай соответствует

$$n_{D^*} = \max_{D_\pi} \sum_{q=1}^v n_{D_q} = 5v, \text{ где } D^* \equiv D_\pi.$$

В случае, если вероятности $P(D_\pi/\Phi C_q)$ различны и $P(D_\pi/\Phi C_q) < 0,95$, то эти вероятности выступают в качестве «весов» при n_{D_q} и тогда

$$n_{D^*} = \max_{D_\pi} \sum_{q=1}^v P(D_\pi/\Phi C_q) n_{D_q}, \quad (3.28б)$$

а РП постановки D^*

$$n_{D^*} = \max_{D_\pi} \sum_{q=1}^v P(D_\pi / \Phi C_q) n_{D_q} \rightarrow X_{ij} \in D^*, \quad (3.29)$$

где $P(D/\Phi C_q) = N_{D_q} / N_{0D}$, N_{D_q} – число случаев правильной постановки D при q -м ФС, а N_{0D} – общее число больных D -м диагнозом.

Поскольку неизвестно какое заболевание может возникнуть у проверяемого, т.е. какой будет диагноз, следует построить матрицу вероятностей размером $v \times L_1$ с элементом P_{Dq} , входящим в формулы (3.28б) и (3.29); $L_1 > 5$ -ти диагнозов. Но если $\max P(D/\Phi C_{q^*}) \geq 0,95$, то при диагностировании достаточно принять только q^* -й ФС.

5а. Оценки предпочтения возможных диагнозов по формуле (3.28б) – более точные и позволяют для всех вариантов выявить D^* по РП (3.29), и указать ближайшие к значениям n_{D^*} в формуле (3.28б) четыре диагноза-соседа (D_c), устанавливаемые по цепочке неравенств

$$\max_{D_\pi \in L_1} n_{D^*} > n_{D_{c_1 \max-1}} > n_{D_{c_2 \max-2}} > n_{D_{c_3 \max-3}} > n_{D_{c_4 \max-4}}. \quad (3.30)$$

Число очков в предельном случае совпадения D^* при всех ФС $_q$ и D_c также при всех ФС $_q$ в цепочке неравенств (3.30):

$$20 > 16 > 12 > 8 > 4.$$

Проведем выбор D_π и D_c , например, при 3-м варианте (2-2) степени предпочтения или выбор 3-его D_c при 4-ом конкурирующем (при последних двух вариантах) и оценку достоверности выбора, а также степень риска ошибочного решения.

5б. В общем случае ($D_{c'} \neq D_c$) диагноз D^* подтверждают одни ФС с разными значениями параметров распределений, а соседние (по значениям n_D)

диагнозы D_c – другие ФС со своими параметрами распределений. Но для сопоставления 2-х диагнозов необходимо, чтобы их распределения были одного ФС.

Резонным является создание нового приведенного или смешанного ФС в виде среднегеометрического мультипликативного состояния (СМС)

$$\text{СМС} = \left(\prod_{q=1}^v \overline{\Phi C}_q \right)^{1/v}, \quad (3.31)$$

6. Вычисляют СМС_{jD^*} и СМС_{jD_c} и строят распределения для D^* и D_c . Для последних 2-х вариантов придется рассмотреть попарно распределения СМС для D_{c3} и D_{c4} .

В общем случае распределение СМС для каждого диагноза является его обобщенной математико-диагностической моделью.

По формуле (3.31) вычисляют также СМС_{ij} .

Возможно также построения среднеарифметического (САР) и среднегеометрического мультипликативного расстояния (СМР) в виде

$$\text{САР} = \bar{\rho} = \frac{1}{v} \sum_{q=1}^v |\Phi C_{ijq} - \Phi C_{D\pi q}| \quad \text{и} \quad \text{СМР} = \left[\prod_{q=1}^v (\Phi C_{q_{ij}} - \Phi C_{q_{jD\pi}}) \right]^{1/v}$$

От абстрактных диагнозов D^* и D_c вернемся к реальным K и $XЗ$. Для эффективного разделения диагнозов K и $XЗ$ необходимо, чтобы

$$\overline{\Phi C}_{qK} > \overline{\Phi C}_{qXЗ},$$

если распределения $XЗ$ слева, а K – справа.

7. Постановку прелиминарного диагноза K_K или $XЗ_p$ и выбор D_{c3} или D_{c4} осуществим с позиций методов статистических решений, а именно: метода минимального риска [21, 22, 32], который при отсутствии стоимостей¹ ошибок 1-го и 2-го рода сводится к методу минимального числа ошибочных решений (МЧОР). Однако, необходимо заметить, что только в случае очевидного

¹ В медицинской диагностике стоимость ошибок 1-го и 2-го рода – абстрактные и расплывчатые понятия, поскольку невозможно оценить связанный с этими ошибками ущерб здоровью, нанесенный неправильным лечением по неверно поставленному диагнозу. Поэтому стоимости ошибок не могут влиять на диагноз в РП (3.32) и (3.33).

разделения на два конкурирующих диагноза при установлении предварительного можно использовать метод МЧОР. При разделении на несколько и более диагнозов следует применить ВМП с РП (1.40).

Рассмотрим два возможных случая: 1) когда оба конкурирующих диагноза – одноименные¹: K_k и $K_{k'}$ и 2) когда один диагноз – K_k , а другой – $X_{3\rho}$. Этот случай представляет особый интерес. РП постановки D_π в этих случаях:

$$\frac{f(\text{СМС}_{ij} / K_k)}{f(\text{СМС}_{ij} / K_{k'})} > \frac{P(K_{k'})}{P(K_k)} \rightarrow X_{ij} \in K_k, \quad (3.32)$$

$$\frac{f(\text{СМС}_{ij} / X_{3\rho})}{f(\text{СМС}_{ij} / K_k)} > \frac{P(K_k)}{P(X_{3\rho})} \rightarrow X_{ij} \in X_{3\rho}, \quad (3.33)$$

где отношения в левых частях условий (3.32) и (3.33) представляют собой отношения правдоподобия; обратный знак неравенств означает, соответственно, что $X_{ij} \in K_{k'}$ и $X_{ij} \in K_k$.

Если значения СМС_{ij} попали в области распределений плотностей вероятности СМС всех p выбранных K -диагнозов, то наиболее вероятную локализацию K^* можно установить по максимальному значению дискриминантной функции

$$\max [f(\text{СМС}_{ij} / K_{k^*}) \cdot P(K_{k^*})], \quad k \in p \quad (3.34)$$

Из формул (3.32 ÷ 3.34) видно, что метод МЧОР в свою очередь приводит к вероятностной дискриминантной функции.

Вообще, как было отмечено в начале этого раздела, выбор диагноза D^* и четырех его ближайших соседей можно осуществить в форме (3.34) по

$$\max_{D_\pi} \Phi = \max_{D_\pi} [f(\text{СМС}_{ij} / D_\pi) P(D_\pi)]$$

и значениям $\Phi_{\max-\gamma}$, где $\gamma = \overline{1, 4}$, т.е. по цепочке неравенств

$$\max_{D^*} \Phi > \Phi_{D_{c_1}^{\max-1}} > \Phi_{D_{c_2}^{\max-2}} > \Phi_{D_{c_3}^{\max-3}} > \Phi_{D_{c_4}^{\max-4}}. \quad (3.35)$$

В идеальном случае, диагнозы в рядах (3.24б), (3.30) и (3.35) должны совпадать. В противном случае следует применить ВМП с использованием цепочки неравенств (5.19б), см. п. V.6.

¹ Менее значимый случай выбора из двух X_3 -диагнозов опускаем.

8. Приведем оценки вероятностей правильной постановки диагноза и риска ошибочного решения во втором случае (диагнозы K и X_3).

Если распределение СМС для диагноза $X_{3\rho}$ расположено слева, то вероятность ложной тревоги

$$\alpha = P_{\text{пр}}(X_{3\rho}) \int_{\text{СМС}_0}^{\infty} f(\text{СМС} / X_{3\rho}) d\text{СМС}, \quad (3.36)$$

а вероятность пропуска K (аналогично (3.9))

$$\beta = P_{\text{пр}}(K_k) \int_{-\infty}^{\text{СМС}_0} f(\text{СМС} / K_k) d\text{СМС}, \quad (3.37)$$

$$P_{\text{пр}}(X_{3\rho}) = \frac{P(X_{3\rho})}{P(X_{3\rho}) + P(K_k)}, \quad P_{\text{пр}}(K_k) = \frac{P(K_k)}{P(K_k) + P(X_{3\rho})} \quad \text{и} \quad P_{\text{пр}}(X_{3\rho}) + P_{\text{пр}}(K_k) = 1;$$

СМС_0 – граничное значение, оптимальным образом разделяющее диагнозы, определяют из условия равенства¹ отношений (3.32) или (3.33).

Если СМС для обоих диагнозов имеет распределения, близкие к нормальному, с примерно одинаковыми дисперсиями, то имеем

$$\text{СМС}_0 = \frac{\overline{\text{СМС}}_{K_k} + \overline{\text{СМС}}_{X_{3\rho}}}{2} - \frac{\sigma_{\text{СМС}}^2}{\overline{\text{СМС}}_{K_k} - \overline{\text{СМС}}_{X_{3\rho}}} \ln \frac{P(K_k)}{P(X_{3\rho})}$$

Подставляя вычисленное СМС_0 в (3.36) и (3.37), находим α и β .

Если $\alpha > 0,05$, что указывает на неудовлетворительно большое число ложно-положительных K -диагнозов, то следует применить подход Неймана-Пирсона – минимизацию β при заданной, допустимой α_d , например, при $\alpha_d = 0,02$. Тогда $\min \beta$ будет соответствовать скорректированному СМС_0^* , найденному из решения уравнения (3.36) при $\alpha = \alpha_d$, а сам $\min \beta$ – из решения уравнения (3.37) при $\text{СМС}_0 = \text{СМС}_0^*$. В этом случае РП (3.38)

$$\begin{aligned} \text{СМС}_{ij} < \text{СМС}_0^* &\rightarrow X_{ij} \in X_{3\rho} \\ \text{СМС}_{ij} > \text{СМС}_0^* &\rightarrow X_{ij} \in K_k \end{aligned} \quad (3.38)$$

Вообще должно соблюдаться условие

$$(\alpha + \beta)|_{\text{СМС}} < \min(\alpha + \beta)|_{\text{ФС}_q}$$

¹ Условие Зигерта-Котельникова. Это условие, записанное в виде разности вероятностных дискриминантных функций, представляет собой вероятностную разделяющую функцию.

в противном случае, при решении вопроса о принадлежности состояния проверяемого к тому или иному диагнозу, следует использовать в РП распределения ΦC_q вместо СМС.

Вероятность того, что принято правильное решение в пользу K_k , равна $1 - \beta$, при этом вероятность принадлежности к диагнозу XZ_p равна α ; и, наоборот, если принято решение в пользу XZ_p , то вероятность того, что оно будет верным, равна $1 - \alpha$, при этом вероятность принадлежности проверяемого к $K_k - \beta$.

Инструментальным диагностированием устанавливают истинный диагноз из пяти наиболее вероятных, выданных компьютером.

III.6. Обобщенное диагностирующее отношение и коэффициент надежности распознавания в медицинской диагностике

Если нет однозначности в выборе одного и того же набора 2-5 наиболее вероятных диагнозов по $\min \rho_q$ (3.13) и по $\max J_q$ (3.25), т.е., если нет их совпадения¹, то следует предложить ОДО, экстремум которого указывает на предполагаемый диагноз, при котором этот экстремум достигается. ОДО предварительного диагноза можно записать и в форме критерия \min ОДО. Можно предложить четыре и более вариантов ОДО.

В форме минимума ОДО запишется, если в числителе будет мера близости по расстоянию (метрическая мера близости), а в знаменателе – ВДФ. В этом случае \min ОДО = ММБ / ВДФ достигается быстрее, чем экстремум каждой из этих функций в отдельности. Возможны, например, следующие варианты ОДО:

$$\text{ОДО}_1 = \frac{\text{СМР}}{\text{ОВДФ}}; \quad \text{ОДО}_2 = \frac{(\text{СМР})_1}{\text{ВДФМС}}; \quad \text{ОДО}_3 = \frac{(\text{СМР})_2}{\text{ВДФМС}}; \quad \text{ОДО}_4 = \frac{\text{СМР}}{\text{СПД}}, \quad (3.39)$$

где ОВДФ – обобщенная вероятностная дискриминантная функция; ВДФМС – вероятностная дискриминантная функция мультипликативного состояния; СПД – степень предпочтения диагноза.

¹ Совпадение $\min \rho_q$ и $\max J_q$ возможно лишь при квадратичной мере расстояния, независимых ΦC и нормальности их распределения, а также при нормировании расстояния через σ (см. так же п. I.2).

$$(CMP)_1 = CMC_{ij} - CMC_{jD_\pi}; \quad (CMP)_2 = \frac{1}{v} \left[\sum_{q=1}^v \lg(\Phi C_{qij} - \Phi C_{qjD_\pi}) \right];$$

напоминаем, что СМР имеют относительные (безразмерные) значения;

$$ОВД\Phi = \lg P(D_\pi) + \sum_{q=1}^v \lg f(\Phi C_{qij} / D_\pi);$$

$$ВД\Phi MC = f(CMC_{ij} / D_\pi) \cdot P(D_\pi);$$

$$СПД = \sum_{q=1}^v P(D_\pi / \Phi C_q) \cdot n_{Dq},$$

где n_{Dq} оценивается по (3.27) через J_q , определяемому по формуле (3.25).

Пять наиболее вероятных диагнозов отыскивают по $\min(ОДО_1 \wedge ОДО_2 \dots \wedge ОДО_4)$ по цепочке неравенств:

$$\min(\cdot)_{1-4} < (\cdot)_{1-4} \min + 1 < (\cdot)_{1-4} \min + 2 < (\cdot)_{1-4} \min + 3 < (\cdot)_{1-4} \min + 4, \quad (3.40)$$

где $(\cdot)_{1-4}$ – одно из 4-х ОДО, определенных по (3.39).

В форме \min ОДО, т.е. с применением ВМП, РП (3.33), например, запишется в виде

$$\frac{f(CMC_i/K) |CMC_i - \overline{CMC}_{X3}|}{f(CMC_i/X3) |CMC_i - \overline{CMC}_K|} < \frac{P(X3)}{P(K)} \rightarrow X_i \in X3.$$

Для отдельных методов возможна своя трактовка ОДО. Например, в методе координат (1), в числителе ОДО, в качестве меры близости или сходства состояний может быть предложена сумма квадратов расстояний вида

$$\rho_{\Sigma_1}^2 = (\Phi C_{1i} - \Phi C_{1\pi})^2 + (\Phi C_{2i} - \Phi C_{2\pi})^2 + \rho_N^2, \quad (3.41)$$

где ΦC_{1i} и ΦC_{2i} – координаты состояния i -го проверяемого, являющиеся центром круга радиуса r ; $\Phi C_{1\pi}$ и $\Phi C_{2\pi}$ – координаты статистического центра π -го диагноза, $\pi = \overline{1, L}$.

$$\rho_N^2 = \sum_{\varepsilon=1}^m (N_{\varepsilon i} - N_{\varepsilon D\pi})^2,$$

где $\varepsilon = 1, 2, \dots, m$; $m = m_l + m_s$; $N_{\varepsilon i}$ и $N_{\varepsilon D\pi}$ – номера параметра ε в ранжированных последовательностях, соответственно, состояния i -го

проверяемого и кластера π -го диагноза. ΦC_1 в (3.41) в общем случае отлична от ΦC_1 в (1.46).

Поэтому ρ_N^2 (см. формулу (3.13)) следует включить в числитель ОДО, в результате чего ρ_Σ^2 будет иметь бóльшую разрешающую способность распознавания.

В знаменателе ОДО может быть вероятностная дискриминантная функция двух видов: а)

$$P(D_\pi)M_{jD\pi} / \sum_{\pi=1}^5 M_{jD\pi}, \quad (3.42)$$

где M – число точек (пациентов с диагнозом D_π) диагноза D_π внутри окружности радиуса r ; 5 – число диагнозов, точки которых находятся внутри окружности

$$\text{б) } P(D_\pi)f(\Phi C_{1i}/D_\pi) \cdot f(\Phi C_{2i}/D_\pi).$$

В методе координат (2), при реализации второго принципа (см. п. III.1), числитель ОДО, подобно (3.41), также следует представить в виде суммы

$$\rho_{\Sigma 2}^2 = \sum_{\mu=1}^3 (R_{\mu i} - R_{\mu D\pi})^2 + \rho_N^2,$$

где $\mu = \overline{1,3}$ – номер группы параметров крови: б/х, «п» и «и» (см. п. III.1) и одновременно одна из трех орт.

$$\text{ОКО} = R = R_{\text{б/х}} \cdot R_{\text{п}} \cdot R_{\text{и}} \quad \text{и} \quad m_{\text{б/х}} + m_{\text{п}} + m_{\text{и}} = m.$$

В знаменателе ОДО – вероятностная дискриминантная функция также двух видов: а) в виде формулы (3.42), где M – число точек (пациентов с диагнозом D_π) внутри сферы радиуса r , или в виде

$$\text{в) } \lg P(D_\pi) + \sum_{\mu=1}^3 \lg f(R_{\mu i} / D_\pi)$$

Введение ОДО выделяет первый диагноз с \min ОДО и вообще отдаляет эти 2-5 наиболее вероятных диагноза, среди которых – истинный, друг от друга по этому показателю. Это свойство ОДО очень важно при большом числе диагнозов K и \overline{K} .

Ряд значений ОДО в цепочке неравенств (3.40) в зависимости от номеров диагнозов с характеристиками от \min ОДО до $\text{ОДО}_{\min+4}$ можно аппроксимировать степенной функцией вида

$$\text{ОДО}(N) = a N^{b+c}, \quad \text{где } N = \overline{1,5}; \quad \min \text{ОДО} = a + c. \quad (3.43a)$$

Если $b \cong 1$, то диагнозы равноудалены друг от друга по значениям ОДО.

Если $b > 2$, то кривая $\text{ОДО}(N)$ вогнута и первые два диагноза, с \min ОДО и $\text{ОДО}_{\min+1}$, выделяются по наименьшим значениям по сравнению с остальными и при постановке прелиминарного диагноза достаточно проверить первые два диагноза; если $0 < b < 1$, то кривая выпукла вверх и возможно выделение первого диагноза с \min ОДО, но для проверки и постановке прелиминарного диагноза следует включить и ближайший диагноз-сосед с $\text{ОДО}_{\min+1}$.

Если расчетные значения ОДО в (3.40) таковы, что имеет место резкое выделение первого диагноза с \min ОДО, то эти значения могут быть аппроксимированы функцией вида

$$\text{ОДО}(N) = c [N/(N+1)]^{b+d}, \quad (3.43б)$$

где $b > 2$; c и $d > 0$.

Резкое выделение первого и возможно истинного диагноза может произойти благодаря тому, что при приближении состояния проверяемого к своему истинному диагнозу, к которому оно должно принадлежать, числитель ОДО уменьшается, а знаменатель увеличивается, в результате чего ОДО резко уменьшается, что теоретически не может случиться при сравнении с остальными диагнозами. Благодаря этому свойству, ОДО имеет большую распознающую реакцию даже на небольшие отличия диагнозов, связанные с принципами 1 и 2 следствий выдвинутых гипотез.

Надежность выбора одного, двух или нескольких наиболее вероятных диагнозов из числа выбранных, возможных диагнозов – L , можно охарактеризовать коэффициентом (см. главу I)

$$E_{\pi_{\Sigma}} = \sum_{\pi=1}^N \text{ОДО}_{\pi}^{-1} / \sum_{\pi=1}^L \text{ОДО}_{\pi}^{-1}, \quad (3.44)$$

где $N = \overline{1,5}$, 5 – первые 5 диагнозов в цепочке (3.40); $\pi = \overline{1,L}$; $\sum_{\pi=1}^L E_{\pi} = 1$.

Выбор наиболее вероятных диагнозов считаем надежным, если

$$E_{\pi_{\Sigma}} \geq E_0, \quad (3.45)$$

где E_0 – устанавливаемое пороговое значение при выборе (допустим, что $E_0 = 0,96$), как и в главе I. Например, если при $N = 2$ по формуле (3.44)

$$E_{\pi_{\Sigma}} = \frac{(\min ODO)^{-1} + ODO_{\min+1}^{-1}}{\sum_{\pi=1}^L ODO_{\pi}^{-1}} \geq E_0,$$

то достаточно проверить первые два диагноза, но только в том случае, если среди них находится раковый; если же первые два диагноза нераковые, то потребность в инструментальной проверке отпадет.

Если $E_{\pi_{\Sigma}} \Big|_{N=2} < E_0$, то добавляют третий диагноз из (3.40) и проверяют соблюдение условия (3.45) при $N = 3$. Если и при этом $E_{\pi_{\Sigma}} \Big|_{N=3} < 0,96$, то добавляют 4-й диагноз, при котором, допустим, $E_{\pi_{\Sigma}} \Big|_{N=4} > 0,96$. Эти четыре диагноза подлежат проверке, если среди первых двух имеется раковый диагноз. Если раковые диагнозы находятся на 3-м и 4-м местах в (3.40), то инструментальную проверку не проводят. Но если при следующей (второй) проверке один и тот же раковый диагноз с 4-го места в цепочке (3.40) окажется на 3-м, то инструментальную проверку все же следует провести.

При линейной аппроксимирующей функции с малым a ($a > 0$) и при большом числе L ($L \geq 30$) диагнозы из пяти наиболее вероятных будут мало отличаться друг от друга по значениям ОДО и тогда возможна проверка и 6-го (ракового) диагноза, но опять лишь в том случае, если среди первых двух диагнозов окажется раковый. Если у этого 6-го диагноза

$$E_{\pi} = ODO^{-1} \Big|_{\pi=5} / \sum_{\pi=1}^L ODO_{\pi}^{-1} < 0,04$$

то его проверку не проводят.

Вариант выбора пяти наиболее вероятных диагнозов, среди которых с наибольшей вероятностью, близкой к 1, окажется истинный, будет наилучшим, но какой из этих вариантов (3.40), включая (3.30) и (3.35), будет наилучшим в каждом конкретном случае, покажет практика.

Из возможных вариантов ОДО следует выбрать такой, который обеспечивает (см. (3.40))

$$\max \lambda = \max_{\tau \in V} \left(\text{ODO}_{\tau} \min + 4 / \min_{\pi} \text{ODO}_{\tau} \right), \quad (3.46)$$

$$\text{или } \max \lambda = \max_{\tau \in V} \left(\max \text{ODO}_{\tau} / \text{ODO}_{\tau} \max - 4 \right)$$

где V – число возможных вариантов ОДО; $\tau = \overline{1, V}$.

Чем больше будет λ , тем лучше выделение первого или первых двух диагнозов и тем выше значение показателя надежности распознавания – E . Таким образом, предпочтение отдается тому варианту ОДО, который имеет наибольшее значение коэффициента λ . Это условие является необходимым при выделении прелиминарного диагноза.

Выводы к главе III

1. ВМП, основа которого изложена в I-й главе, обогащен в III-й новыми методами, пригодными и для медицинской диагностики. Здесь параметрами на входе служат ПК и М. Введение ОКО и построенных на его основе ФС: интегральных и дифференциальных, в виде tgφ и СКПА и др. – значительно увеличивает разрешающую способность распознавания и повышает достоверность постановки истинного диагноза.

2. РП (3.13), (3.17), (3.29), (3.32 ÷ 38), приведенные в этой главе, построенные отдельно для метрической и вероятностной мер близости, являются промежуточными и служат для выбора из L_I диагнозов $L_{II} \subset L_I$ н.в.д., сразу после выявления \bar{G} состояния при n_G -й проверке, т.е. служат для быстрого отсеивания очевидных ложных диагнозов ($L_1 - L_{II}$).

3. Предложенные методы распознавания состояний (МРС) позволят диагностировать как все выбранные локализации K , так и все выбранные ХЗ и ДО.

4. МРС в случае 3-5ти наиболее вероятных одноименных диагнозов позволят с вероятностью, близкой к 1, утверждать о принадлежности состояния проверяемого к K -диагнозу (случай 3-5 K -диагнозов) или к ХЗ-диагнозу (в случае 3-5 ХЗ-диагнозов).

При применении МРС оказывается даже не важным, какова будет вероятность постановки правильного диагноза: 0,75 или 0,95, потому что инструментальным диагностированием при проверке установят один истинный диагноз из этих двух-пяти. Высокая вероятность (0,95 и выше) постановки истинного диагноза должна быть только при сопоставлении G или \bar{G} , состояний¹ с \bar{G} диагнозами.

При постановке прелиминарного диагноза имеет смысл применить одновременно оба, независимых друг от друга, метода: МРС и физический [8], поскольку, если даже вероятность – P при каждом из методов составит всего 0,75, то при условии, что оба метода укажут на один и тот же диагноз, – вероятность его правильного установления $P = 1 - (1 - 0,75)^2 \approx 0,94$, что является весьма приемлемым результатом.

5. Аугментированное ОКО позволит с $P \cong 1$ отличить здоровое состояние проверяемого человека от нездорового. В последнем случае после выбора L_{Π} н.в.д. (см. п. 2) эти диагнозы должны быть проверены РП, построенными на основе ВМП: (1.25) ÷ (1.30), которые выделяют $\Omega \leq 5$ н.в.д., после чего медики проводят инструментальную проверку всех Ω н.в.д. с установлением истинного диагноза – $D_{и}$. Однако по согласованному решению можно, не проверяя все Ω н.в.д., провести одну ε -проверку и по РП (1.40) установить $D_{и}$, подтвердив только этот диагноз инструментальным

¹ Состояния G и \bar{G}_0 у проверяемых были «отсечены» от \bar{G} на первом этапе (см. п. III.3). Эта операция возможна и на 2-м (см. (3.12) ÷ (3.17)), проводя сравнение и с состоянием G .

диагностированием, которое в любом случае будет оправданным, ибо обнаружит либо K , либо $X3$, либо ДО.

По мере накопления статистической базы данных число включенных в рассмотрение диагнозов, связанных с обучающими массивами, будет расти, а число наиболее вероятных из них по МРС останется прежним ($2 \div 5$). Это может быть достигнуто введением ОДО, включающего ВММБ, что сделает более надежным выбор и разделение $2 \div 5$ н.в.д., среди которых находится истинный.

6. В ОДО обобщенная метрическая мера близости и вероятностная дискриминантная функция (вероятностная мера близости) «работают» совместно, а не раздельно.

ОДО имеет бóльшую распознающую способность даже при малом отличии диагнозов по значениям того или иного ФС или сочетаний различных ФС.

7. Число m выбираемых ПК и M увеличивают до тех пор, пока значение коэффициента надежности распознавания – E_{Σ} при пяти н.в.д. не станет равным требуемому (0,96). С целью экономии затрат на вычисление делают ограничение сверху: $m \leq 50$; снизу $m \geq 30$.

8. МРС ориентированы на измеряемые значения ПК и M , находящиеся внутри установленных нормативных границ. Если у проверяемого человека некоторые ПК и M вышли за границы норм, то для медиков – это существенная дополнительная информация о его состоянии и возможность достоверной постановки диагноза на основе решающих правил МРС.

9. Отрадным является то, что с середины 90-х годов проблемой диагностики K по ПК и M начали заниматься российские ученые [6, 7, 23]. В работе [23] указано на возможность диагностики K по ПК и M . Создан программный комплекс ОМИС, анализы крови и мочи вносят в компьютерную базу данных.

Однако обучающий массив, достаточный для формирования кластеров с признаками, имеющими для людей, входящих в каждый из них, одинаковые

разряды (достижение однородности), – еще не накоплен, а компьютерная база данных по ПК и М очень мала, что не позволяет получить достоверную информацию по динамике ПК и М. Поэтому подтвердить на практике выдвинутые гипотезы и их следствия пока не представляется возможным. Необходимо проведение в этом направлении полномасштабных клинических, поликлинических исследований на кластерах диагнозов К, ХЗ и ДО, а также на кластерах относительно здоровых людей.

ПРИЛОЖЕНИЯ ГЛАВЫ III

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Аналитическая схема скрининга

В разделе III.3 были приведены методы выявления \bar{G} при первой (начальной) проверке, при которой нужно было установить, болен человек или относительно здоров. В последнем случае проверяемому, независимо от того, относится ли он к группам риска или нет, предоставляется возможность в связи с возобновлением скрининга регулярно, через каждые 5-6 мес., сдавать анализы крови и мочи и следить за состоянием своего здоровья. Периодический мониторинг состояния здоровья населения по ПК и М можно проводить как в специализированных лабораториях, так и в поликлиниках, снабженных современными однотипными анализаторами крови и стандартными методиками лабораторных исследований крови.

Целевая задача скрининга в нашем случае заключается в том, чтобы продолжительность доклинической стадии рака до установления диагноза была минимальной с минимальным числом скрининговых проверок.

Если при первой (начальной) проверке появилось сомнение в диагнозе, предполагаемый диагноз можно определить при второй или третьей проверке (см. условие 3.19). При скрининге, не обнаружив рак у потенциально больного человека (еще относительно здорового) при ряде начальных проверок, врач-диагност выявит его среди 3-5-и н.в.д. через некоторое число проверок после начала онкопатологии, изложенными в разделах III.3 ÷ III.6 методами первой (одной) проверки и по РП п. I.5 при ε -проверке. Если нет четкого выделения одного или двух диагнозов (все пять почти равновероятны, что маловероятно), то при Ψ -й проверке компьютер выдаст диагноз D_* , который будет доминирующим и возможно окажется истинным; при этом пятерка диагнозов может быть другой, т.е.

$$(D_1, D_2, \dots, D_5)_1 \rightarrow \dots \rightarrow (D_*, D_{2'}, \dots, D_{5'})_{\Psi}, \quad (\text{П.1.0})$$
$$\Psi \geq 2; D_1 \neq D_*, D_2 \neq D_{2'}, \dots, D_5 \neq D_{5'}.$$

Приведем базовую математическую модель проведения скрининга, показывающую процесс изменения ОКО с ростом числа проверок, вычисленного по измеряемым значениям ПК и М, и показывающую момент перехода G в \bar{G} для потенциально больного человека и момент обнаружения \bar{G} .

На интервале t_1 , здорового или относительно здорового состояния конкретного (i-го) человека, случайная функция ОКО стационарна. При \bar{G} состоянии, на интервале t_2 , к случайной составляющей Z_ψ добавляется в неявном виде (нельзя измерить) детерминированная – $\eta(t)$, отражающая непрерывный рост ОКО с развитием \bar{G} , в результате чего на интервале t_2 будет уже центрированный нестационарный случайный процесс. Его модель можно записать в аддитивном виде

$$R_{ij}(t) = \begin{cases} R_{ij_0} \pm Z_\psi & \text{при } 0 < t_1 \leq t_{II}(n_G - 1) \\ R_{ij_0} \pm Z_\psi + \eta(t) & \text{при } t_{II}(n_G - 1) < t_2 \leq t_{II}(n_K - 1), \end{cases} \quad (\text{П.1.1})$$

где R_{ij_0} – среднее нормированное значение ФС (ОКО, ОКО_a) i-го здорового человека; Z_ψ – флуктуации гомеостаза при ψ -й проверке, случайное отклонение ФС от его среднего значения, центрированная случайная величина, $\hat{Z} = |Z|$; $\eta(t)$ – монотонно возрастающая неслучайная функция времени, $R_{ij_0} + \eta(t) \leq R_{II}$, где R_{II} – предельное значение, разделяющее G и \bar{G} состояния; t_{II} – периодичность проверок; n_G – условный номер проверки, при которой заканчивается t_1 и начинается t_2 ; n_K или $n_{\bar{G}}$ – последняя проверка, при которой был поставлен диагноз \bar{G} .

На интервале t_2 имеет место латентное \bar{G} , которое до его установления в момент n_K -й проверки, следует считать мнимым G. Продолжительность

$$t_2 = \tau_i = t_{II}(n_{Ki} - n_{Gi}) \quad (\text{П.1.2})$$

определяет задержку в распознавании \bar{G} .

Случайную реализацию $\pm Z + \eta(t)$ в виде ломаной линии предлагается аппроксимировать, в случае нелинейного тренда, степенной функцией вида $v_c t^\alpha$ [24]. Коэффициенты этой функции имеют четкий физический смысл: $v_c > 0$ –

показатель скорости изменения ФС, а $\alpha > 1$ – определяет характер изменения ФС. Коэффициенты α и v_c вычисляют МНК по данным 4-х-5-ти значений ФС, полученных после проведенных 4-х-5-ти проверок.

Выбор функции $v_c t^\alpha$ примечателен тем, что значения показателя степени α могут оказаться специфичными для каждого из диагнозов, поскольку α определяет характер изменения ФС.

Здоровое состояние – G характеризуется (см. П.1.1) чередованием увеличения и уменьшения R_{ij_0} при периодических проверках, что дает

$$R_{ij_0^{n_G-1}} \cong R_{ij_0^{n_G}}, \quad \text{если } n_G > 10, \quad (\text{П.1.3а})$$

если

$$R_{ij_0^{n_G}} < R_{ij_0^{n_G+\psi}}, \quad (\text{П.1.3б})$$

то это – предзнаменование \bar{G} состояния, где $\psi=1,2,\dots,6$.

Периодические проверки призваны на ранних стадиях \bar{G} контролировать рост ОКО_a до предельного значения – R_{Π} .

Для каждого диагноза из множества \bar{G} будет свое минимальное значение $R_{j\bar{G}_{\min}}$. В случае К-диагнозов, при их полном разделении с G-состоянием, имеет место неравенство

$$\min_{k \in P} R_{jK_{\min}} \geq R_{jG_{\max}},$$

где $R_{j\bar{G}_{\max}}$ определено по формуле (3.7). Тогда

$$R_{\Pi} = \min_{k \in P} R_{jK_{\min}} \quad (\text{П.1.4})$$

РП установления состояний при ψ -й проверке в соответствии с (П.1.4)

$$\begin{aligned} R_{ij_\psi} \leq R_{\Pi} &\rightarrow X_{ij} \in G, \\ R_{ij_\psi} > R_{\Pi} &\rightarrow X_{ij} \in \bar{G}. \end{aligned} \quad (\text{П.1.5})$$

Если нижняя граница \bar{G} состояний для К-диагнозов такова, что

$$\min_{\bar{K}} R_{j\bar{K}_{\min}} < \min_{k \in P} R_{jK_{\min}},$$

то эти \bar{K} -диагнозы не подлежат рассмотрению на их ранних стадиях, т.к. R_{ij} окажутся в области G состояния.

Рассмотрим процесс, характеризуемый вторым условием (П.1.1) или неравенством (П.1.3б). Величину

$$\Delta_{ij} = R_{\Pi} - R_{ij_0} \quad (\text{П.1.6})$$

назовем запасом или резервом мнимого G проверяемого человека по выбранному ФС, где R_{ij_0} – среднее значение R_{ij} , вычисленное после нескольких проверок аппроксимацией МНК, в момент возникновения заболевания при $\psi = n_G$. С момента n_G -й проверки начинается постепенное расходование Δ_i , продолжающееся с ростом R_{ij} .

Каждый человек определенного кластера будет иметь при развитии заболевания свой Δ , зависящий от индивидуальных свойств организма, его иммунной системы, а время исчерпания Δ , кроме того, зависит от возникшего заболевания и скорости его развития. Поэтому исчерпание Δ_i у одного человека может произойти при следующей же проверке, а у другого – через несколько проверок и более.

Случайные отклонения Z в модели (П.1.1) равновероятно (с вероятностью 0,5) как совпадают с тенденцией ФС к росту при развитии K или $XЗ$, так и не совпадают, т.е. имеют знаки $+$ или $-$, но если, например, 6 раз подряд случайные отклонения от некоего начального значения имеют одни плюсы при шести проверках, следующих за начальной или n_G -й проверкой, то в этом случае вероятность ложной тревоги $P_{\alpha}^1 = (0,5)^6 = 0,0156$. Это значение достаточно мало и вполне приемлемо при решении вопроса о принадлежности X_{ij} к \bar{G} состоянию. Т.о., в случае медленно протекающих заболеваний, что отражается на медленно изменяющихся ФС, если 6 последующих проверок показали устойчивый рост R_{ij} при $R_{ij} < R_{\Pi}$, то с $P_{\alpha} = 0,0156$ можно утверждать о переходе состояния G в состояние \bar{G} , несмотря на то, что исчерпания Δ_i не произошло и $v_c(6t_{\Pi})^{\alpha} < \Delta_i$. Здесь следует говорить об исчерпании фактического резерва

¹ Вероятности ложной тревоги P_{α} и α (см. формулу (3.36)) отличаются по смыслу тем, что P_{α} относится к G и \bar{G} состояниям, а α – к конкретным диагнозам K и $XЗ$, т.е. к диагнозам \bar{G} состояния.

мнимого G

$\Delta_{\phi i} = v_c[(n_{\phi}-1)t_{\Pi}]^{\alpha}$, где $n_{\phi} = 7$. (α в формуле – показатель степени).

Итак, если при скрининге: 1) $R_{ij} > R_{\Pi}$ за $n < 7$ -ми проверок и 2) если $v_c(6t_{\Pi})^{\alpha} < \Delta_i$ и имеет место (П.1.3б) при $\psi = 6$, то $X_{ij} \in \bar{G}$ состоянию и методами раздела III.4 и РП (1.40) выясняют причину \bar{G} . При этом границами перехода G в \bar{G} будут линии: $y = R_{\Pi}$, $x = 6t_{\Pi}$, если формально $t_0^1 = 0$ перенести в т. $\psi = n_G$.

Если при скрининге соблюдается совместно условие (П.1.3а) и первое условие (П.1.5), то нет необходимости применять метод одной проверки.

Область существования мнимого G i-го проверяемого человека, у которого возникло то или иное заболевание, ограничена: слева – прямой $x = t_0 = 0$, сверху – $y = R_{\Pi}$, справа – $x = 6t_{\Pi}$ и снизу – прямой R_{ij_0} . Т.о., область мнимого G теоретически будет заключена с учетом (П.1.6) в прямоугольнике с площадью

$$S_i = 6t_{\Pi} \Delta_i. \quad (\text{П.1.7})$$

Область (П.1.7) существования мнимого G формально разделяется на две подобласти: G_{1i} и G_{2i} функцией $v_c t^{\alpha}$ (см. рис. П.1). Скорость протекания процесса (изменения ОКО)

$$v_{ci} = \Delta_i / (6t_{\Pi})^{\alpha}. \quad (\text{П.1.8})$$

Подобласть G_{1i} , ограниченная сверху функцией $v_c t^{\alpha}$, справа – сечением $x = 6t_{\Pi}$ и снизу $y = R_{ij_0}$ – отражает изменение ФС, имеющее ограничение по числу проверок $n = 7$. В этом случае имеет место недоиспользование Δ_i . Подобласть G_{1i} формально равна площади фигуры АСД.

$$S_{1i} = v_c \int_0^{6t_{\Pi}} t^{\alpha} dt = \frac{v_c}{\alpha + 1} (6t_{\Pi})^{\alpha+1}.$$

Учитывая (П.1.8), после подстановки, получим

$$S_{1i} = \frac{6t_{\Pi}}{\alpha + 1} \Delta_i$$

¹ t_0 начала заболевания неизвестен, поэтому точка t_0 не закреплена на оси x и перемещается вправо со временем от нуля до момента возникновения заболевания; t_0 определяется апостериори.

Подобласть G_{2i} отражает изменение ФС с полным исчерпанием Δ_i за $n = 2-7$ проверок и ее площадь равна площади фигуры ABC на рис. П.1.

$$S_{2_i} = \frac{\alpha}{\alpha + 1} 6t_{II} \cdot \Delta_i$$

Скорость v_{cu} изменения ФС (ОКО) при развитии того или иного заболевания или, например, процессов изнашивания, старения, идущих с полным исчерпанием запаса мнимого G естественно больше скоростей $v_{cни}$ изменения ОКО указанных процессов, протекающих с частичным (неполным) исчерпанием Δ_i , т.е. $v_{cu} > v_{cгр} > v_{cни}$, где $v_{cгр}$ – граничная скорость изменения (см. рис. П.1)

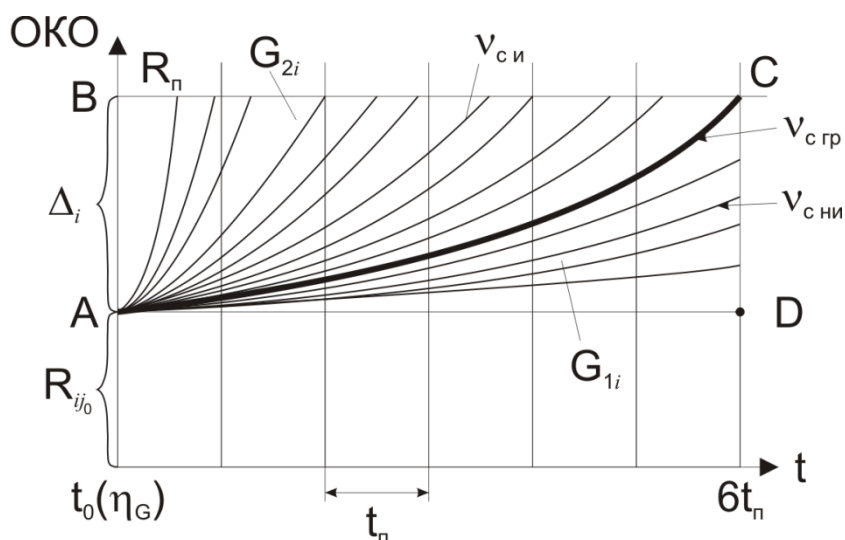


Рис. П.1. Подобласти G_{1i} и G_{2i} с неполным (частичным) и полным исчерпанием запаса (резерва) мнимого здорового состояния до выявления нездорового состояния

Кривая AC на рис. П.1 – аппроксимация фактического изменения граничной кривой ОКО.

Максимальная и минимальная продолжительности $t_2 = \tau$ (см. (П.1.2)):

$$\max t_2 = 6t_{II}; \quad \min t_2 = t_{II},$$

что составляет от 2,5 до 3-х лет и от 5 до 6-ти мес.

Итак, даже при здоровом состоянии рекомендуется проводить периодические проверки, при которых подтверждается G или обнаруживается при какой-то проверке \bar{G} состояние.

Методы распознавания \bar{G} при периодических проверках

Целевая задача скрининга, заключающаяся в минимизации времени запаздывания τ (см. Приложение 1), согласуется с задачей о «разладке» [26], где впервые дано математическое решение задачи раннего обнаружения неисправности («разладки») в основном технологических процессов. В дальнейшем теория «разладки» была развита в работе [27]. Но проблема раннего выявления рака потребовала иных подходов ввиду индивидуальности каждого проверяемого человека, большой нестабильности значений ПК и М при повторных измерениях и других условий, связанных с диагностикой человека (человеческим фактором). Дело в том, что реализация алгоритмов обнаружения моментов «разладки» требует большого числа измерений (проверок), что в условиях диагностирования людей получить невозможно. Кроме того, в ряде случаев необходимо знать апостериорные вероятности момента «разладки» и значение порога (границы состояний). При развитии онкопроцесса никаких данных об этих вероятностях на доклинической стадии рака нет.

Из изложенного выше материала, еще раз отметим, что рост $ОКО$ и $ОКО_a$ в ходе скрининга сигнализирует о появлении $\eta(t)$, см. (П.1.1), т.е. о начале «разладки» организма, о переходе G в \bar{G} . Указано, что момент t_0^1 возникновения \bar{G} смещается вправо с течением времени, пока у проверяемого G состояние. Как только возникло \bar{G} , начинается отсчет времени мнимого G или еще неподтвержденного \bar{G} с момента t_0 при n_G -й проверке и чем раньше удастся обнаружить \bar{G} и поставить диагноз, тем раньше будет начато лечение.

¹ Момент t_0 возникновения заболевания у конкретного человека один и тот же при любых методах распознавания \bar{G} .

$t_0 = t_{k_\mu} - \tau_\mu$, где t_{k_μ} и τ_μ - соответственно, момент и время запаздывания обнаружения \bar{G} при μ -м методе.

Изложенные ниже методы периодических проверок еще здоровых, но в будущем заболевших людей, позволяют в дополнение к методам раздела III.3 установить τ и апостериори момент t_0 .

Эти методы не требуют знания априорной вероятности состояний G и \bar{G} и распределений плотностей вероятности ОКО или ОКО_a, поскольку вся диагностика ведется в рамках или «сфере» конкретного проверяемого человека.

Начнем с самого простого, но менее чувствительного к появлению \bar{G} метода (хотя он и гасит, благодаря осреднению, случайные отклонения). Этот метод может оказаться эффективным, если на проверку придет уже заболевший К или ХЗ человек.

1. Метод разности средних

Известно, что с ростом числа проверок разность средних значений $\bar{R}_{ij_{\psi+1}} - \bar{R}_{ij_{\psi}} \rightarrow 0$ или строго $\lim_{\psi \rightarrow \infty} |\bar{R}_{ij_{\psi+1}} - \bar{R}_{ij_{\psi}}| = 0$ и, следовательно, состояние G можно охарактеризовать следующей цепочкой неравенств:

$$|\bar{R}_2 - R_1| > |\bar{R}_3 - \bar{R}_2| > |\bar{R}_4 - \bar{R}_3| > \dots > |\bar{R}_{\psi+1} - \bar{R}_{\psi}| \rightarrow 0.$$

Но если возникло \bar{G} состояние, то с некоторого числа проверок n_k разность $|\bar{R}_{n_k} - \bar{R}_{n_k-1}|$ в связи с ростом $\eta(t)$ окажется больше $|\bar{R}_{n_k-1} - \bar{R}_{n_k-2}|$. Таким образом, \bar{G} состояние будет характеризоваться такой цепочкой неравенств:

$$|\bar{R}_2 - R_1| > |\bar{R}_3 - \bar{R}_2| > \dots > |\bar{R}_{n_k-1} - \bar{R}_{n_k-2}| < \dots < |\bar{R}_{n_k} - \bar{R}_{n_k-1}| \quad (\text{П.2.1})$$

Многоточие после знака "<" в условии (П.2.1) означает значительную зону неопределенности или нечувствительности. Кроме того, чувствительность этого метода уменьшается обратно пропорционально числу проверок, в связи с чем влияние $\eta(t)$ оказывается незначительным. Напомним, что под чувствительностью понимается способность метода как можно раньше обнаружить $\eta(t)$.

Момент $t_{\bar{G}} = t_{II}(n_{\kappa_1} - 1)$ - момент обнаружения \bar{G} . Момент t_0 фактического перехода G в \bar{G} наступает в зоне неопределенности, из-за которой определить τ_1 не представляется возможным. Индекс «1» означает номер метода.

2. Метод (+), (-) разностей

Метод использует ПККиМ¹ без вычислений ОКО, т.е. значения параметров ξ_ℓ и ξ_s .

При первых двух проверках метод основан на критерии знаков, а при последующих – на логико-математических моделях диагнозов. Этот метод позволяет обнаружить \bar{G} уже при второй проверке.

Принимая решение о состоянии G или \bar{G} , исходят из того, что вероятность «ложной тревоги» P_L должна быть достаточно малой.

Если число m выбранных ПККиМ оказалось больше шести, то для обеспечения (заданной) вероятности ложной тревоги $(0,5)^6$ при установлении \bar{G} состояния наряду с совпадающими ((+)-ми) отклонениями будут иметь место и несовпадающие ((-)-ые). Это приводит к симметричному биномиальному распределению чисел (+) и (-) отклонений ввиду того, что их появление при G равновероятно, т.е. $p(+)=p(-)=0,5$.

Под (+) и (-) отклонениями в этом способе считают разности значений ПККиМ, полученных при двух проверках.

В общем случае при $m > 6$ решают две задачи: а) при двух начальных проверках при заданной P_L оценить состояние проверяемого (G или \bar{G}) и б) как при скрининге, если окажется, что после первых 2-х проверок – состояние G , выявить начало \bar{G} , если оно возникло.

Определяют ряды отклонений (разностей) ПККиМ " ℓ " и " s " видов после первых 2-х проверок, вычитая из измеренных значений параметров при 2-й проверке значения 1-й

$$\Delta_\ell = \xi_{\ell_2} - \xi_{\ell_1} \quad (\text{П.2.2a})$$

$$\Delta_s = \xi_{s_2} - \xi_{s_1}, \quad (\text{П.2.2б})$$

где $\ell = 1, 2, \dots, m_\ell$; $s = 1, 2, \dots, m_s$; $m = m_\ell + m_s$.

¹ Выбранные ПККиМ должны быть независимыми, т.е. некоррелированными, хотя при большом (в нашем случае больше 30-ти) числе параметров можно допустить условие независимости даже при наличии корреляции.

В связи с тем, что значения ξ – случайные, часть разностей в ряду (П.2.2а) окажется со знаком (+), когда $\Delta_\ell > 0$, а другая – со знаком (-), когда $\Delta_\ell < 0$. Пусть число (+) отклонений, совпадающих с тенденцией к росту, будет m_ℓ^+ , а число (-) несовпадающих отклонений – m_ℓ^- .

Что касается ряда (П.2.2б), то здесь при (+) разностях (их число m_s^+) измеренные при второй проверке значения ПКИМ не совпадают с тенденцией к убыли этих параметров, а при отрицательных разностях совпадают с тенденцией к убыли параметров из числа m_s^- .

Итак, m параметров разделяют как бы на четыре части, четыре набора: m_ℓ^+ , m_ℓ^- , m_s^+ и m_s^- . Параметры из наборов m_ℓ^+ и m_s^- имеют направление изменения, совпадающее или соответствующее тенденции к росту и убыли, а изменения параметров m_ℓ^- и m_s^+ имеют направленность, несовпадающую с тенденциями к росту и убыли, соответственно, ξ_ℓ и ξ_s .

Обозначим совпадающий набор ПКИМ, изменения которых говорят в пользу диагноза \overline{G} , обобщающим (+)-ом, а несовпадающий – обобщающим (-)-ом. Тогда

$$m^+ = m_\ell^+ + m_s^- \text{ и } m^- = m_\ell^- + m_s^+, \quad m = m^+ + m^-.$$

Обозначив

$$\Delta_\ell^+ = \xi_{\ell_2} - \xi_{\ell_1} > 0, \quad \Delta_s^- = \xi_{s_2} - \xi_{s_1} < 0$$

$$\Delta_\ell^- = \xi_{\ell_2'} - \xi_{\ell_1'} < 0 \quad \Delta_s^+ = \xi_{s_2''} - \xi_{s_1''} > 0,$$

записывают правило счета чисел (+) и (-) разностей в виде

$$\Delta r = \begin{cases} 1, & \text{при } \Delta_\ell^+ \text{ и } \Delta_s^-, \\ 0, & \text{при } \Delta_\ell = 0 \text{ и } \Delta_s = 0, \\ -1, & \text{при } \Delta_\ell^- \text{ и } \Delta_s^+, \end{cases} \quad (\text{П.2.3})$$

где

$$\begin{aligned} \ell' = 1, 2, \dots, m_\ell^+, & \quad s' = 1, 2, \dots, m_s^- \\ \ell'' = 1, 2, \dots, m_\ell^-, & \quad s'' = 1, 2, \dots, m_s^+ \\ (\ell' \neq \ell'') & \quad (s' \neq s''). \end{aligned}$$

По всем m параметрам суммарная разность ρ составит

$$\rho = \sum_{r=1}^m \Delta r = m^+ - m^- \quad (\text{П.2.4})$$

При \bar{G} состоянии число (+) отклонений превышает число (-)-ых, т.е. $m^+ > m^-$. Значение m^+ , соответствующее заданной P_L , которое называют критическим ($m_{кр}^+$), определяют из численного решения уравнения

$$Q(m^+ \geq m_{кр}^+) = \sum_{k=m_{кр}^+}^m C_m^k \left(\frac{1}{2}\right)^m = P_L$$

$k = 0, 1, \dots, m$; (C_m^k – число сочетаний из m по k).

Правило принятия решения о состояниях после первых двух проверок: если число m^+ , полученное при счете по первому условию правила (П.2.3) будет больше или равно $m_{кр}^+$, то констатируют \bar{G} состояние, если меньше – то G , т.е.

$$\begin{aligned} m^+ \geq m_{кр}^+ &\rightarrow X_i \in \bar{G}, \\ m^+ < m_{кр}^+ &\rightarrow X_i \in G. \end{aligned} \tag{П.2.5}$$

Если после первых двух проверок будет выполнено второе условие (П.2.5), то с последующими проверками сравнивают: значения ПК и М при третьей проверке и «опорной» первой (или второй), далее сравнивают значения при четвертой и первой (или второй) и т.д. до тех пор пока

$$m_{\psi-1(2)}^+ \geq m_{кр}^+.$$

Обозначение $\psi-1(2)$ означает, что берут значения ξ при ψ -й и первой или второй проверках.

Выполнение второго условия (П.2.5) еще не означает, что у проверяемого G состояние, тем более, если m^+ не на много меньше $m_{кр}^+$, поскольку не учитывается вероятность пропуска \bar{G} состояния. В этом случае решают задачу б).

Здесь встает вопрос: «Измеренные при последующих проверках значения ξ_{ℓ_ψ} и ξ_{s_ψ} сравнивать со значениями ξ_ℓ и ξ_s , полученными при первой или второй проверке?». Т.е. встает вопрос выбора «опорной» начальной проверки. Понятно, что сравнение измеренных значений параметров при соседних проверках (последующей и предыдущей) не приведет к желаемому результату, поскольку \bar{G} состояние может уже быть как при $\psi+1$ -й, так и при ψ -й проверке.

Вопрос выбора «опорной» проверки решают следующим образом.

Допустим, что $m_{2-1}^+ < m/2$; (2-1 обозначает сравнение второй и первой проверок). Это значит, что $\xi_{\ell_2} < \xi_{\ell_1}$, а $\xi_{s_2} > \xi_{s_1}$ большее число раз, и «опорными» значениями ξ_{ℓ} и ξ_s выбирают значения, полученные при второй проверке, так как значения ПК и М имели меньшие отклонения от своих средних нормативных значений. Если бы в качестве «опорной» выбрать первую проверку с бóльшими отклонениями параметров от средненормативных значений, то выполнение условия (П.2.7) (см. ниже) при возникновении \bar{G} потребовало бы проведения большего числа проверок, а это увеличило бы вероятность пропуска заболевания в доклинической стадии, т.е. отдалило бы время его выявления. Если бы $m_{2-1}^+ > m/2$, то больше число неравенств вида $\xi_{\ell_2} > \xi_{\ell_1}$ и $\xi_{s_2} < \xi_{s_1}$ и «опорными» значениями выбирают значения ПК и М при первой проверке.

При G состоянии (см. формулу (П.2.4)) числа $m^+ \approx m^- = m/2$. Следовательно, характеристика диагноза «G» будет

$$\rho_{\psi-1(2)} > \nu < 0 \rightarrow X_i \in G \quad (\text{П.2.6})$$

$$\text{или } m_{\psi-1(2)}^+ > \nu < m/2 \rightarrow X_i \in G,$$

где $\psi = 3, 4, \dots, n$ – номера проверок.

При возникновении \bar{G} $m^+ > m^-$ или $m^+ > m/2$. Стабилизация этих неравенств подтверждает подозрение в диагнозе \bar{G} . Т.е. при скрининге опять приходят к модели игры «орел – решка», где число m^+ , например, «орел», а m^- – «решка», и если с какой-то ψ -й проверки m^+ начало стабильно превышать m^- , то следует опять задать тот же уровень значимости или вероятности ложной тревоги $P_L = (0,5)^6$ и после шестикратно повторившейся подряд разности $m^+ - m/2 > 0$ ставить диагноз « \bar{G} » с заданной $P_L = (0,5)^6$. Характеристика \bar{G}

$$\rho_{\psi-1(2)} \wedge \rho_{\psi+1-1(2)} \wedge \dots \wedge \rho_{\psi+5-1(2)} > 0 \rightarrow X_i \in \bar{G} \quad (\text{П.2.7})$$

$$\text{или } m_{\psi-1(2)}^+ \wedge m_{\psi+1-1(2)}^+ \wedge \dots \wedge m_{\psi+5-1(2)}^+ > m/2 \rightarrow X_i \in \bar{G}.$$

Однако есть более сильное условие, которое при его выполнении позволит считать, что у проверяемого \bar{G} состояние уже после трех текущих проверок:

$$m/2 < m_{\psi-1(2)}^+ < m_{\psi+1-1(2)}^+ < m_{\psi+2-1(2)}^+ \rightarrow X_i \in \bar{G}. \quad (\text{П.2.8})$$

При этом $m_{\psi+2-1(2)}^+ < m_{кр.}^+$

Из второго условия (П.2.7) и первого условия (П.2.5) видно, что число m^+ отклонений при возникновении и развитии \bar{G} изменяется, начиная от $m/2$, соответствующего G , до $m_{кр.}^+$ – границы состояний.

Таким образом, зная показатели скорости $V_{c_{m^+}}$ и степени α_{m^+} изменения m^+ при аппроксимации этого изменения степенной функцией $\eta(t) = V_c t^\alpha$, можно определить (спрогнозировать) продолжительность доклинической стадии $T_{д.с.ij}$ i -го потенциально больного человека j -го кластера ($V_{c_{m^+}}$ и α_{m^+} вычисляются методом наименьших квадратов по известным формулам, имея фактические значения m^+ при четырех последних проверках).

$$T_{д.с.ij} = \left[\left(m_{кр.}^+ - \frac{m}{2} \right) / V_{c_{m^+}} \right]^{1/\alpha_{m^+}} = \left(\frac{\Delta_i}{V_{c_i}} \right)^{1/\alpha_i} \quad (\text{П.2.9})$$

Число проверок в $T_{д.с.ij}$

$$n_{д.с.ij} = [T_{д.с.ij} / t_{\Pi}] + 1,$$

где квадратные скобки означают, что следует брать целую часть числа, ближайшую к вычисленному. В этом случае РП постановки \bar{G} диагноза

$$V_{c_i} T_{д.с.ij}^{\alpha_i} \geq m_{кр.}^+ - \frac{m}{2} \rightarrow X_{ij} \in \bar{G}. \quad (\text{П.2.10})$$

Поскольку область существования контролируемого показателя (будь-то R_{ij} или m_{ij}^+) ограничена прямоугольником, площадью $6t_{\Pi}\Delta_i$, (П.1.7), с верхней границей $y=m_{кр.}^+$ и правой – сечением $x=t_{\Pi} (n_G+6)$, где в нашем случае $\Delta_i = m_{кр.}^+ - m/2$, то имеем $n_{д.с.ij} < 7$. Действительно, К и ХЗ с прогрессирующим патологическим процессом могут вызвать у i -го заболевшего быстрый рост m^+ и достижение $m_{кр.}^+$ за $n_{д.с.ij} < 7$. $m_{кр.}^+$ представляет собой в этом случае предельное

значение параметра m^+ , аналогичное R_{Π} в первой части Приложения. При превышении этого предельного значения происходит переход мнимого G (см. Приложение I), считающегося здоровым состоянием организма, в нездоровое состояние.

Время τ_2 для прогрессирующего патологического процесса определяется по формуле (П.2.9) и может быть от t_{Π} до $5t_{\Pi}$ при умеренной V_c ; для относительно медленно протекающих процессов (см. П.2.7)), $\tau_2 = 6t_{\Pi}$.

Условия (П.2.5)-(П.2.10) являются РП при постановке диагнозов « G » и « \bar{G} » в задаче б).

Проверки проводят до тех пор, пока не будет выполнено одно из условий (П.2.7) – (П.2.10), после чего методами первой проверки выясняют причину \bar{G} .

3. Метод шести параметров

Этот метод является частным случаем (вариантом) предыдущего, когда число параметров $m = 6$, и обоснование метода сводится опять к игре «орел – решка». Если задаться $P_{\alpha} = (0,5)^6 = 0,0156$, то число «6» будет означать число параметров крови, которых необходимо выбрать для обеспечения заданной P_{α} при одной контрольной проверке. Действительно, чтобы с вероятностью $P = 1 - P_{\alpha}$ (считаем $P_{\alpha} = P_{\beta}$) поставить диагноз \bar{G} при одной контрольной проверке (всего нужно провести две проверки), необходимо иметь шесть параметров. Это следует из выражения

$$\chi = \lg P_{\alpha} / m \lg 0,5, \quad (\text{П.2.11})$$

где χ – число проверок.

Подставляя $P_{\alpha} = (0,5)^6$ и $\chi = 1$, получим $m = 6$.

Выбирают параметры по их динамике за доклиническую стадию: первые шесть параметров, имеющих наибольшие изменения.

Метод эффективен при проверке уже заболевшего человека.

Преимущество: малое число (6-ть) задействованных параметров крови сокращает время и расходы, связанные с проверкой.

Недостаток: менее чувствителен из-за большей дискретности к выявлению \bar{G} на доклинической стадии.

Решающее правило постановки диагноза \bar{G}

$$\Delta\xi_1^+ \wedge \Delta\xi_2^+ \wedge \dots \wedge \Delta\xi_6^+ \rightarrow X_{ij} \in \bar{G}_j,$$

где знак «+» означает отклонение $l(S)$ -го параметра при второй проверке, совпадающее с тенденцией его изменения при развитии \bar{G} .

4. Метод тестовых условий коэффициентов степенной аппроксимирующей функции

Метод начинает «работать», т.е. позволяет выявить \bar{G} при проведении 4-х, 5-ти проверок. Время предварительной скрининговой подготовки займет 12–16 мес., если в начальном скрининговом периоде принять $t_{\Pi} = 4$ мес. Кажущаяся длительной скрининговая подготовка не должна смущать, поскольку скрининг представляет собой долговременный процесс проверок людей.

Этот метод основан на различии в описании состояний G и \bar{G} оценками показателей аппроксимирующей функции $\eta(t) = V_c t^\alpha$ изменения ОКО или ОКОа. Диагноз \bar{G} ставят, получив оценки показателей скорости V_c и степени α функции $\eta(t)$.

При G состоянии среднее текущее значение R при увеличении числа проверок стабилизируется. Это значит, что на временном интервале t_1 (см. (П.1.1)) $\eta(t)$ отсутствует, т.е. $V_c t^\alpha = 0$. Теоретически $V_c = 0$.

На интервале t_2 среднее значение R возрастает, следовательно, $V_c > 0$. При этом характер изменения отражает значение α , которое будет больше единицы или в частном случае линейной реализации – равно единице.

Итак, при периодических проверках состояние G характеризуется оценками значений V_c , которые стабильно близки к нулю. Состояние \bar{G} характеризуется стабильностью значений как V_c , так и α . Разница в том, что значения V_c стабильно больше нуля, а значения α стабильно больше единицы. Таким образом, характеристики диагнозов записывают в следующем виде

$$\left. \begin{aligned} V_{c\psi'} \wedge V_{c\psi'+1} \wedge \dots \wedge V_{c\psi'+\varepsilon} > \nu < 0 \\ \alpha_{\psi'} \wedge \alpha_{\psi'+1} \wedge \dots \wedge \alpha_{\psi'+\varepsilon} > \nu < 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow X_i \in G$$

$$\left. \begin{aligned} V_{c\psi'} \wedge V_{c\psi'+1} \wedge V_{c\psi'+2} > 0 \\ \alpha_{\psi'} \wedge \alpha_{\psi'+1} \wedge \alpha_{\psi'+2} \geq 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow X_i \in \bar{G} \quad (\text{П.2.12})$$

где $\psi' = 7, 8, \dots, n$ – номер текущей проверки проверяемого человека, не включая $n_0 = 4-6$ – число накопленных (начальных) проверок при скрининговой подготовке; ε – некоторое дополнительное число проверок (3 или 4).

В случае быстрого, прогрессирующего характера заболевания применяют условие

$$V_{c\psi'+2} > V_{c\psi'+1} > V_{c\psi'} > 0 \rightarrow X_i \in \bar{G}. \quad (\text{П.2.13})$$

Выполнение условий (П.2.12) достаточно проверить при трех проверках. Число три определяют по формуле, аналогично (П.2.11)

$$q = \lg P_L / r \cdot \lg 0,5, \quad (\text{П.2.14})$$

где при заданной $P_L = (0,5)^6$ и двух независимых показателях V_c и α ($r = 2$) $q = 3$.

Таким образом, если при трех последовательных проверках три раза подряд $V_c > 0$ и $\alpha > 1$, то ставят диагноз \bar{G} .

При РП (П.2.12) или (П.2.13) методами первой проверки выясняют причину \bar{G} : К, ХЗ или ДО.

Значения показателей V_c и α определяют МНК, исходя из аппроксимирующей функции вида

$$R(t) = R_{n_G} + V_{c_R} t_{\psi}^{\alpha_R},$$

где R_{n_G} – среднее значение R проверяемого человека за n_G проверок; $\psi = n_G \div n_{\bar{G}}$.

Следует обратить внимание на то, что при G состоянии значения временных сумм при вычислениях МНК должны быть постоянными, независимыми от номера проверки ψ , поскольку на протяжении периода t_1 среднее значение R стабилизируется и не зависит от времени. Поэтому при увеличении числа проверок суммирование проводят с одними и теми же

пределами от $\psi_0 = 1$ до $\psi_0 = n_0 = 6$. Таким образом, оценка V_{cR} при возможном появлении $\eta(t)$ каждый раз будет сопровождаться как бы пошаговым переносом аппроксимирующей кривой от момента t_0 ее появления (конец интервала t_1 , начало t_2) сначала влево, к первой проверке ($\psi_0 = 1$), а потом от $\psi_0 = 1$ вправо. С очередной проверкой будет осуществляться как бы пошаговый сдвиг кривой с переносом начала координат вправо на величину межпроверочного интервала $t_{п}$. Этот сдвиг значений R_{ψ} вправо на одну проверку для всех этапов представляется матрицей значений R_{ψ} , имеющей вид параллелограмма, в каждой строке которой, на каждом этапе, будет по 6 значений (проверок). В результате через n -ое число шагов получают в случае возникновения \bar{G} кривую, составленную из двух интервалов: t_1 (на этом интервале $V_c t^{\alpha} = 0$) и t_2 .

Если при этом методе условие (П.2.12) или (П.2.13) выполнено за $q = 3$ (см. (П.2.14)) проверки, следующих за n_G -й проверкой, то $\tau_4 = 3t_{п}$.

5. Метод поэтапного увеличения объема выборок (Метод ускорения сходимости разностей)

Метод можно применять после скрининговой подготовки при накоплении 6-ти – 8-ми проверок (6-ти – 8-ми начальных значений $OKO_i = R_i$).

Сущность метода заключается в поэтапном сравнении сумм случайных значений R_i в двух выборках одинакового объема n при увеличении последнего с ростом проверок на единицу в каждой выборке через этап. Речь идет о двух выборках, о двух рядах проверок, следующих один за другим, и, следовательно, с общим числом проверок (или значений R_i) в двух выборках - $2n$. Эти выборки обозначим под номерами 1 и 2.

Пусть сумма значений R_{ψ_1} первой выборки равна $\sum_{\psi_1=1}^{n_{\ell}} R_{\psi_1}$, а второй $\sum_{\psi_2=n_{\ell}+1}^{2n_{\ell}} R_{\psi_2}$.

Сравнение заключается в нахождении разности Δ_{ℓ} этих сумм на каждом ℓ -м этапе

$$\Delta_{\ell} = \sum_{\psi_2=n_{\ell}+1}^{2n_{\ell}} R_{\psi_2} - \sum_{\psi_1=1}^{n_{\ell}} R_{\psi_1}, \quad (\text{П.2.15})$$

где n_ℓ – число проверок в каждой выборке на ℓ -м этапе; $\ell = 1, 2, \dots, \ell_G$;

ℓ_G – номер последнего этапа, на котором при n_G -й проверке еще не возникло заболевание;

$\ell_G + \omega = \ell_{\bar{G}}$ – последний этап, заканчивающийся постановкой диагноза « \bar{G} »;

ω^1 – число проверок от момента t_0 до $t_{\bar{G}}$ – момента постановки диагноза \bar{G} при $n_{\bar{G}}$ -й проверке ($n_k \equiv n_{\bar{G}}$).

При G состоянии Δ_l (П.2.15) будет представлять разность сумм, состоящих исключительно из случайных значений R_z

$$\left| \Delta_{z_{\ell_n}} \right| = \sum_{\psi_2=n_{\ell_n}+1}^{2n_{\ell_n}} R_{z_2} - \sum_{\psi_1=1}^{n_{\ell_n}} R_{z_1} \quad (\text{П.2.16.1})$$

$$\left| \Delta_{z_{\ell_q}} \right| = \sum_{\psi_2=n_{\ell_q}+2}^{2n_{\ell_q}+1} R_{z_2} - \sum_{\psi_1=2}^{n_{\ell_q}+1} R_{z_1}, \quad (\text{П.2.16.2})$$

где Δ_z – разность сумм случайных значений R_z ;

$\ell_n = 1, 3, 5, \dots, \ell_{Gn}$ – нечетные номера этапов²;

$\ell_q = 2, 4, 6, \dots, \ell_{Gq}$ – четные номера этапов.

Если на (ℓ_G+1) -м этапе возникло \bar{G} (во второй выборке появилась $\eta(t)$), то к случайной составляющей в разности (П.2.15) добавится неслучайная (детерминированная).

Поскольку математическое ожидание центрированной случайной величины равно нулю, можно показать, что при увеличении числа слагаемых n_ℓ сравниваемых сумм (П.2.15), влияние случайного фактора, случайного характера отклонений R , определяемых величиной $\Delta_{z\ell}$, будет ослабевать и на

¹ ω ограничено шестью проверками в зависимости от заданного уровня значимости; $\omega = 7$, если учитывать n_G -ю проверку.

² О нечетности и четности номеров этапов будет пояснено ниже.

основании закона больших чисел разность $\Delta_{z\ell}^3$ будет стремиться к нулю при числе проверок $n \rightarrow \infty$, ибо при $n \rightarrow \infty$ в двух выборках одной генеральной совокупности всегда можно найти множество пар R_{Ψ_1} и R_{Ψ_2} с одинаковыми значениями, которые при вычитании дадут 0.

То, что разность $\Delta_{z\ell}$ убывает, приближаясь к нулю при больших n_ℓ , является положительным свойством данного способа, дающим ключ к построению алгоритма раннего выявления \bar{G} . Дело в том, что с момента возникновения \bar{G} при увеличении числа проверок, в то время как $\Delta_{z\ell}$ уменьшается, влияние детерминированного процесса развития болезни, наоборот, усиливается, т.е. будет расти $\eta(t)$. В результате этого разделение и распознавание состояний G и \bar{G} становится очевидным и выявление \bar{G} на ранней стадии не вызывает затруднений.

Для получения зависимости убывания $\Delta_{z\ell}$ от увеличения n_ℓ , т.е. $\Delta_{z\ell} = \varphi(n_\ell)$ проводят неклинический эксперимент с кластерами относительно здоровых людей. Очевидно, что $\Delta_{z\ell}$ будет при каждой проверке находиться в пределах

$$-\Delta_{z_c \max}(n) \leq \Delta_{z_\ell}(n) \leq \Delta_{z_c \max}(n),$$

$\Delta_{z\max}$ и $\Delta_{z\min}$ ($\Delta_{z\min} = -\Delta_{z\max}$) – верхняя и нижняя границы доверительного интервала Δ_z с доверительной вероятностью $P_d=0,99$ или $P_d=0,997$, обеспечивающей нахождение Δ_z внутри интервала $\pm 3\sigma$.

Кривые $\Delta_{z\min}(n)$ и $\Delta_{z\max}(n)$ асимптотически приближаются к оси абсцисс при больших n . На рис. П.2.1. эти кривые показаны. Например, при $n_\ell=20$, что соответствует $\sim 18,0$ годам скрининга, $\Delta_z(n=20)$ будет достаточно малой величиной и в случае возникновения болезни $\eta(t)$ оказывается почти «оголённой», без случайных помех, что свидетельствует о наличии «разладки», появлении нестационарного процесса ухудшения состояния проверяемого с подозрением на рак или какое-либо ХЗ (это подозрение затем конкретизируется, см. методы первой проверки, п. III.4 и РП (1.40)).

³ Разность (П.2.15) при большом числе проверок и отсутствии $\eta(t)$ можно формально сравнить с отсутствием переноса энергии стоячими волнами, возникающими при интерференции (энергии двух встречных волн взаимно нейтрализуют друг друга, а суммирование их «+», «-» амплитуд дает нуль).

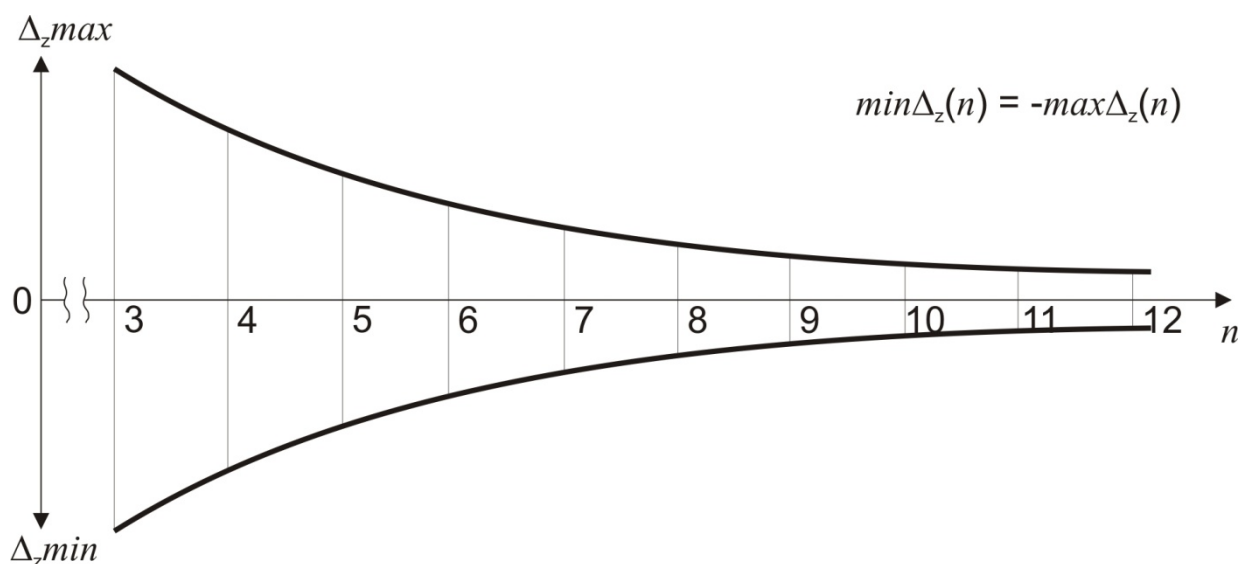


Рис. П.2.1. Кривые экстремальных значений $\Delta_z \max$ и $\Delta_z \min$ в зависимости от числа проверок – n в выборке

Таким образом, чем больше у проверяемого человека будет накопленных скрининг-проверок, тем быстрее можно распознать \bar{G} состояние. Это утверждение поясняет рис. П.2.2а) и б)

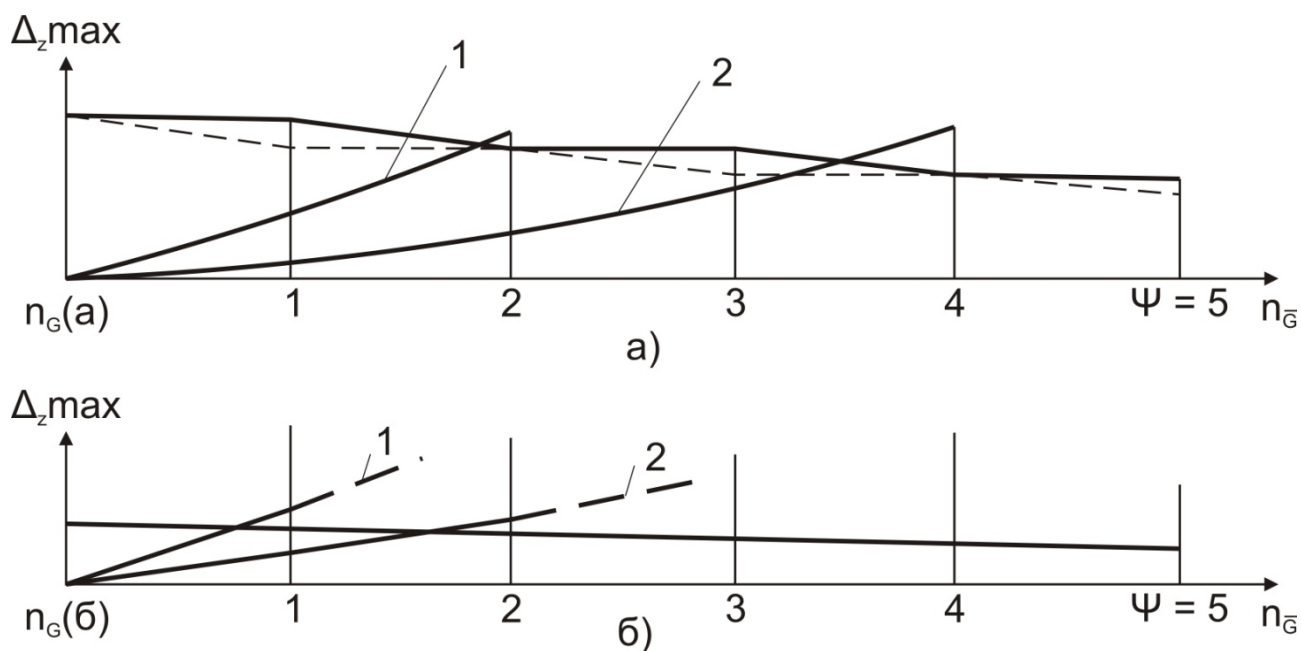


Рис. П.2.2.а) и б) Изменения величин $\Delta_z \max$ и $\eta(t)$ от увеличения числа проверок n_G и Ψ или этапов скрининга до момента постановки диагноза – \bar{G} .

а) Постановка диагноза \bar{G} при различных скоростях изменения $\eta(t)$ (кривые 1 и 2) и числе проверок $n_G(a)$; пунктирные линии – значения $\Delta_z \max$ при l_G четном (или $n_G(a)$ нечетном).
 б) то же самое, но при $n_G(b) > n_G(a)$. Диагноз \bar{G} с вероятностью $P \cong 1$ ставят при $\Psi = 1$, если $\eta(t)$ – кривая 1 и при $\Psi = 2$, если $\eta(t)$ – кривая 2.

В неклиническом эксперименте, при возрастании n (числа проверок в выборках), $\delta[\Delta_z(n)]$ – функция плотности вероятности распределения $\Delta_z(n)$, вытягивается в узкую полоску, напоминающую импульс.

При $n \rightarrow \infty \lim [\Delta_z(n)] = 0$, а $\delta[\Delta_z(n)] = \infty$, т.е. $\delta[\Delta_z(n)]$ «вырождается» в дельта-функцию Дирака. Действительно,

$$\delta[\Delta_z(n)] = \begin{cases} 0, & \text{при } \Delta_z(n) \neq 0 \\ \infty, & \text{при } \Delta_z(n) = 0 \end{cases}$$

$$\text{и} \quad P[\Delta_z(n)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta[\Delta_z(n)] d[\Delta_z(n)] = 1.$$

Если возникло \bar{G} , то с учетом (П.2.16.1(2)), используя свойство аддитивности величины $R(z+\eta)$,

$$\Delta(Z+\eta)_{\ell_{G+\Psi_{\bar{G}}}} = \Delta_{\bar{G}}(n) = \pm \Delta_{z_{\ell_{G+\Psi_{\bar{G}}}}}(n) + \eta_{\ell_{G+\Psi_{\bar{G}}}}(t) \quad (\text{П.2.17})$$

$$\text{и ограничение} \quad -\Delta_z \max_{\ell_{G+\Psi_{\bar{G}}}}(n) + \eta_{\ell_{G+\Psi_{\bar{G}}}}(t) \leq \Delta_{\bar{G}}(n) \leq \Delta_z \max_{\ell_G}(n) + \eta_{\ell_{G+\Psi_{\bar{G}}}}(t).$$

где $\psi_{\bar{G}} = 1, 2, \dots, \omega$

В действительности фактические случайные значения разности сумм $\Delta_{z\ell}$ у проверяемых людей меньше $\Delta_{z\ell} \max$. Поэтому при возникновении \bar{G} у проверяемого получаемые при проверках разности $\Delta(Z+\eta)$ будут находиться в уменьшенных интервалах:

$$-\Delta_{z_{\ell}} + \eta(t) \leq \Delta_{\ell}(z+\eta) \leq \Delta_{z_{\ell}} + \eta(t) \quad (\text{П.2.18})$$

Тогда неравенство

$$\Delta_{\ell}(z+\eta) = \eta(t) - \Delta_{z_{\ell}} > 0$$

наступит при меньшем числе проверок и, следовательно, \bar{G} будет обнаружено раньше.

Описание диагнозов

Согласно выражениям (П.2.16.1(2)) G определяется чередованием знаков $\Delta_{z\ell}$ и поэтому его характеризуют следующей цепочкой неравенств

$$\Delta_{z_1} > \vee < 0, \Delta_{z_2} > \vee < 0, \dots, \Delta_{z_{\ell_G}} > \vee < 0 \rightarrow X_i \in G. \quad (\text{П.2.19})$$

Диагноз « \bar{G} » согласно (П.2.17) и (П.2.18) характеризуется, начиная с l_{G+1} -го этапа, в предельном случае шестикратными положительными значениями $\Delta_{\bar{G}} = \Delta(Z + \eta)$, следующими подряд до $l_{\bar{G}} = l_G + \psi_{\bar{G}}$ -го этапа ($\Psi_{\bar{G}} = 6$)

$$\Delta_{\bar{G}_1} \wedge \Delta_{\bar{G}_2} \wedge \dots \wedge \Delta_{\bar{G}_6} > 0 \rightarrow X_i \in \bar{G}. \quad (\text{П.2.20})$$

В зависимости от соотношения детерминированной и случайной составляющих в разности $\Delta(Z+\eta)$, когда уже $\eta(t)$ доминирует, что возможно при больших числах проверок и при высокой скорости изменения $\eta(t)$, появление \bar{G} может быть обнаружено при любой из $\omega = 6$ -ти проверок, даже при $\psi_{\bar{G}} = 1$, и если $\Delta(z + \eta)_{l_G + \psi_{\bar{G}}} = \Delta_{z_{\psi}} + \eta(t) > \Delta_{z_{\psi}} \max$, – подтверждения диагноза « \bar{G} » не требуется. Действительно, если $\Delta_{z_{\psi}} + \eta(t)_{\psi} > \Delta_{z_{\psi}} \max$, то это значит, что в $\Delta_{\bar{G}} \equiv \Delta_K = \Delta(z + \eta)_{\psi_{\bar{G}}}$ будет присутствовать и $\eta(t)$, поскольку $\Delta_{z_{\psi}} < \Delta_{z_{\psi}} \max$.

Тогда вторым условием постановки диагноза « \bar{G} » будет неравенство $\Delta(z + \eta)_{l_G + \psi_{\bar{G}}} = \Delta z_{l_G + \psi_{\bar{G}}} + \eta_{l_G + \psi_{\bar{G}}}(t) > \max \Delta z_{l_G + \psi_{\bar{G}}}(n) \rightarrow X_i \in \bar{G}. \quad (\text{П.2.21})$

Алгоритм раннего выявления \bar{G}

Этап I.

1.1. Накопленные начальные шесть проверок делят на две равные части, две выборки, по три значения R в каждой.

1.2. При $l = 1$ по формуле (П.2.15) определяют $\Delta_{l=1}$

$$\Delta_{l_1} = \sum_{\psi_2=4}^6 R_{\psi_2} - \sum_{\psi_1=1}^3 R_{\psi_1}$$

Из неклинического эксперимента известно максимальное значение $\Delta_{z\max}(3)$ или $\max \Delta_z(3)$.

1.3. Проверяют выполнение условия (П.2.21), и если оно не выполняется, отмечают знак Δ . Допустим, что (П.2.21) не выполняется, а $\Delta_{l_1} > 0$.

Этап II.

2.1. Проводят первую проверку после уже имевшихся ранее шести, т.е. седьмую после начала скрининга. Самую первую из начальных шести проверок

(первое значение R_1) исключают из рассмотрения, а в качестве слагаемых сумм обеих выборок вносят значения R при проверках, соответственно, $\Psi_1 = 2, 3$ и 4 и $\Psi_2 = 5, 6$ и 7 , т.е. две выборки, по три значения R_Ψ в каждой, смещают на одну проверку вправо.

2.2. При $\ell = 2$ по формуле (П.2.15) с учетом (П.2.16.2) определяют $\Delta_{\ell=2}$

$$\Delta_{\ell_2} = \sum_{\psi_2=5}^7 R_{\psi_2} - \sum_{\psi_1=2}^4 R_{\psi_1}$$

Поскольку на втором этапе число проверок в выборках (по 3) не изменилось, то сравнивают с тем же значением $\Delta_{\text{zmax}}(3)$, что и на первом этапе.

2.3. Проверяют выполнение условия (П.2.21), и если оно не выполняется, то отмечают знак Δ_{ℓ_2} . Допустим, что условие (П.2.21) не выполняется, а $\Delta_{\ell_2} > 0$.

Этап III.

3.1. Проводят вторую проверку, а всего проверок станет 8-мь, четное число, т.е. на нечетном этапе общее число проверок четное. Делят эти 8-мь проверок на две части, получая две выборки, но уже с увеличенным на единицу числом проверок или значений R в каждой выборке (по четыре).

3.2. При $\ell = 3$ по формуле (П.2.15) определяют $\Delta_{\ell=3}$

$$\Delta_{\ell_3} = \sum_{\psi_2=5}^8 R_{\psi_2} - \sum_{\psi_1=1}^4 R_{\psi_1}$$

Из неклинического эксперимента известно максимальное значение $\Delta_{\text{zmax}}(4)$ при числе проверок в каждой выборке $n_{3_1} = n_{3_2} = 4$.

3.3. Проверяют выполнение условия (П.2.21), и если оно не выполняется, то отмечают знак Δ_{ℓ_3} .

И т.д., нечетные и четные этапы повторяют друг друга. Через каждые два этапа на единицу увеличивается число проверок в каждой выборке.

Значения R на всех этапах записывают последовательно в строки, образуя трапециевидную матрицу.

Рассмотрим еще один, общий этап ℓ_G .

Этап ℓ_G . 1. Для ℓ_G -го этапа, например, – нечетного, общее число проведенных проверок n_G оказывается четным и равным $2n_{\ell_G}$, где n_{ℓ_G} – число

проверок (значений R_{ψ}) в каждой выборке на ℓ_G -м этапе. Нетрудно заметить, что разница между общим числом проверок и номером этапа составляет $n_0 - 1 = 6 - 1 = 5$.

Делят n_G на две выборки по n_{ℓ_G} проверок в каждой с увеличенным еще на единицу числом проверок или значений R_{ψ} .

2. По формуле (П.2.15) и (П.2.16.1) определяют Δ_{ℓ_G}

$$\Delta_{\ell_G} = \sum_{\psi_2 = n_{\ell_G} + 1}^{2n_{\ell_G}} R_{\psi_2} - \sum_{\psi_1 = 1}^{n_{\ell_G}} R_{\psi_1}.$$

Из неклинического эксперимента путем экстраполяции получают максимальное значение Δ_z при n_{ℓ_G} , т.е. $\Delta_{z_{\max}}(n_{\ell_G})$, которое будет стремиться к нулю при $n \rightarrow \infty$ (см. рис. П.2.1).

3. Проверяют выполнение условия (П.2.21), и если оно не выполняется, отмечают знак Δ_{ℓ_G} в условии (П.2.20).

Итерация продолжается до выполнения условий (П.2.20) или (П.2.21).

При $n_{\ell} \geq 20$ $\tau = t_{\Pi}$ при любой скорости v_c изменения $\eta(t)$; при $n_{\ell} = 6-8$ τ может варьироваться в зависимости от v_c в пределах $2 t_{\Pi} \div 6 t_{\Pi}$. Выше было указано ограничение по τ : $t_{\Pi} \leq \tau \leq 6t_{\Pi}$, а ниже приведем примерную оценку τ .

Главным преимуществом этого метода по сравнению с методом или критерием Стьюдента является возможность построения результирующей, суммирующей кривой, аппроксимация которой приведена на рис. П.2.3. Эта аппроксимирующая кривая позволяет оценить время τ запаздывания обнаружения \bar{G} через построение аппроксимирующей функции $\eta(t)$.

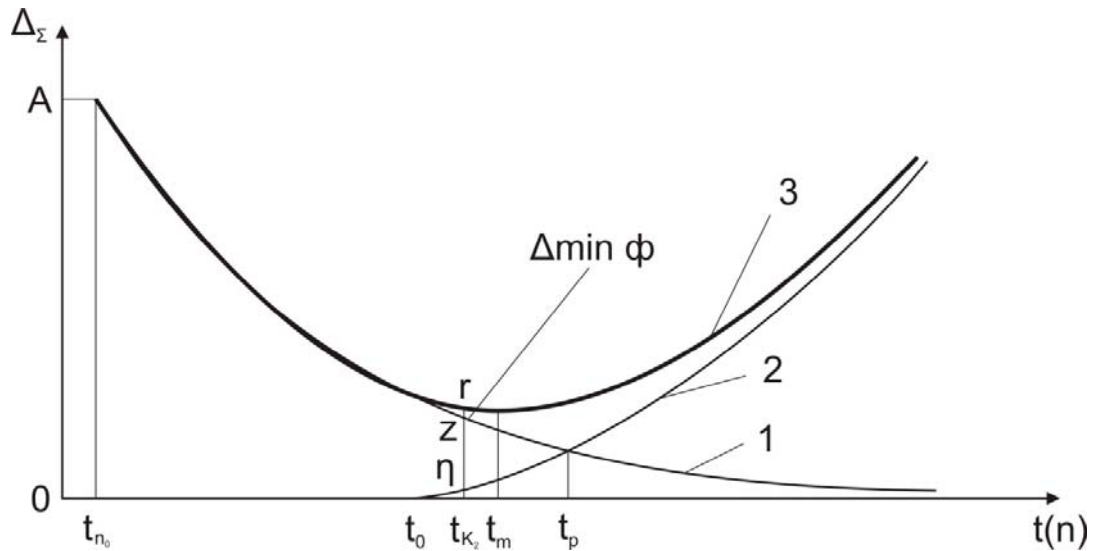


Рис. П.2.3. Убывание разности $\Delta_{z\max}$ (аппроксимирующая кривая 1) и увеличение детерминированного сигнала $\eta(t)$ при возникновении \bar{G} (кривая 2) с ростом числа проверок; 3 – результирующая аппроксимирующая кривая.

В методе №5 не вычисляют средние значения сумм, которые подавляют (уменьшают) детерминированный «полезный» сигнал. Решающее правило (П.2.21) обладает при распознавании большей разрешающей способностью, чем критерий Стьюдента, за счет ускоренной, быстрой сходимости разностей кумулятивных сумм ОКО при поэтапном увеличении объемов сравниваемых выборок и позволяет обнаружить \bar{G} («разладку» организма) раньше, за меньшее число проверок. В этом случае τ будет минимальной.

Приближенная оценка времени запаздывания обнаружения \bar{G}

Время запаздывания τ обнаружения \bar{G} определяется по формуле

$$\tau = t_{\bar{G}} - t_0, \quad (\text{П.2.22})$$

где $t_{\bar{G}}$ момент обнаружения \bar{G} .

Таким образом, в формуле (П.2.22) надо приближенно определить моменты времени $t_{\bar{G}}$ и t_0 . Для этого выполним следующие шаги.

1. Результирующая экспериментальная кривая имеет вид

$$\Delta_{\Sigma}(z + \eta) = \Delta_{z\max}(t) + \eta(t), \quad (\text{П.2.23})$$

а результирующую кривую 3 на рис. П.2.3 получим графически аппроксимацией экспериментальных точек кривой (П.2.23), которые являются разностями системы (П.2.24)

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_{l_1} = \sum R_{\psi_2 l_1} - \sum R_{\psi_1 l_1} \\ \Delta_{l_2} = \sum R_{\psi_2 l_2} - \sum R_{\psi_1 l_2} \\ \dots\dots\dots \\ \Delta_{l_{\bar{G}}} = \sum R_{\psi_2 l_{\bar{G}}} - \sum R_{\psi_1 l_{\bar{G}}} \\ \dots\dots\dots \\ \Delta_{l_{\bar{G}+\psi_{\bar{G}}}} = \sum R_{\psi_2 l_{\bar{G}+\psi_{\bar{G}}}} - \sum R_{\psi_1 l_{\bar{G}+\psi_{\bar{G}}}} \end{array} \right. \quad (\text{П.2.24})$$

2. Кривую 1 аппроксимируем функцией

$$\Delta Z_{max}(t) = A e^{-V_Z(t-t_{n_0})}, \quad (\text{П.2.25})$$

где t_{n_0} – момент времени по прошествии скрининговой подготовки, $n_0 = 6 \div 8$ проверок.

3. Возрастающая часть кривой 3 образуется суммированием убывающей функции (П.2.25) и возрастающей $\eta(t)$, откуда последняя строится вычитанием, исходя из разности

$$\eta(t) = \Delta_{\Sigma}(Z + \eta) - \Delta Z_{max}(t).$$

4. Моментом t_0 будет являться точка пересечения аппроксимирующей функции

$$\eta(t) = B[e^{V_{\eta}(t-t_0)} - 1] \text{ или } \eta(t) = V_c(t - t_0)^{\alpha}, \alpha > 1$$

оси t (n); t_0 определяется графически.

5. Характерной точкой результирующей кривой 3 является ее минимум: $\min \Delta_{\Sigma}(z + \eta)$. Моментом времени – t_m достижения этого минимума будет проекция точки $\min \Delta_{\Sigma}(z + \eta)$ на ось t (n).

6. Фактический момент $t_{\bar{G}}$ будет зависеть от момента проведения очередного контроля (проверки) – t_{κ} на интервале (t_0, t_m) или на расширенном (t_0, t_p) , где t_p – момент пересечения кривых 1 и 2. Обнаружение \bar{G} должно быть в момент t_{κ} , т.е. моменты $t_{\bar{G}}$ и t_{κ} должны совпасть. Проверка (в момент t_{κ}) может быть проведена как до момента t_m , так и после него, т.е. $t_{\kappa} < t_m$ или $t_{\kappa} > t_m$. Действительно, момент $t_{\bar{G}}$ находится внутри интервала (t_0, t_p) , т.е. в этом интервале должен быть момент очередной проверки – t_{κ_1} , с которым может совпасть $t_{\bar{G}}$. В этом случае $t_{\bar{G}} \equiv t_{\kappa_1}$ и

$$\Delta_{\Sigma}(Z + \eta)|_{t_{\kappa_1}} - \Delta Z_{max}(t)|_{t_{\kappa_1}} = \eta(t)|_{t_{\kappa_1}},$$

$$\text{а} \quad \tau_1 = t_{\kappa_1} - t_0 \quad (\text{П.2.26})$$

7. Минимальное значение τ будет в том случае, если проверка будет проведена в момент $t_{k_2} < t_{k_1}$, при котором имеет место равенство

$$\Delta_{min \phi} = \Delta_{\Sigma}(Z + \eta)_{t_{k_2}} - \Delta_{Zmax}(t)|_{t_{k_2}} = \min \eta(t)|_{t_{k_2}} \geq \max d,$$

где $\max d > 0$ – максимальная относительная ошибка в вычислительном процессе, включая измерительный, и тогда $\Delta_{min \phi}$ равна отрезкам $rz = \eta t_{k_2}$ на рис. П.2.3, а

$$\tau_{min \phi} = t_{k_2} - t_0. \quad (\text{П.2.27})$$

В формуле (П.2.26) $t_{\bar{G}} \equiv t_{k_1}$, а в (П.2.27) $t_{\bar{G}} \equiv t_{k_2}$.

Если $\min \eta(t)|_{t_{k_2}} < \max d$, то проводят вторую проверку в момент t_{k_3} . При этом $t_{k_3} - t_{k_1} = t_{\Pi}$ – межпроверочный период.

Методу №5 не случайно уделено много внимания. Дело в том, что при ряде природных явлений, катастроф, экономических кризисов и т.д., перед наступлением события, некоторые измеряемые параметры, характеризующие состояния, изменяют направление своей динамики на противоположное, и этот метод в условиях случайных факторов, неопределенности, экзо- и эндо-помех, позволит своевременно установить момент, близкий к изменению направления, ибо «реакция» метода высока.

Допустим, что сначала значения некоего параметра ξ уменьшаются, а затем через некоторое время начинают вдруг возрастать. При такой постановке разность Δ_n на этапе «падения» значений, в соответствии с изменением алгоритма метода, будет

$$\Delta_n = \sum_{\Psi=n+1}^{2n} \xi_{\Psi_2} - \sum_{\Psi=1}^n \xi_{\Psi_1} = A_n < 0 \quad (\text{П.2.28})$$

В записи (П.2.28) число проверок n в каждой выборке можно задать одинаковым, например, по 30 проверок (измерений) параметра ξ . Эти проверки так же, как и в методе №4 записывают в виде «параллелограммной» матрицы, т.е. со сдвигом на одну проверку вправо. Тенденция такова, что с каждой последующей проверкой

$$\Delta_{n+v} < \Delta_{n+v+1} < 0.$$

Проверка, при которой окажется, что

$$\Delta_{n+k} - \Delta_{n+k-1} \geq \delta_{кр} < 0, \quad (\text{П.2.29})$$

будет последней при объявлении скорого наступления того или иного события, где $\delta_{кр}$ – критическое значение, априори установленное из статистики уже свершившихся, зарегистрированных событий; $\delta_{кр}$ можно выразить и в безразмерном виде.

Ждать момента, при котором изменится направление и станет разность $\Delta_{n+\omega} - \Delta_{n+\omega-1} = 0$, рискованно из-за быстрого наступления события, т.е. принимать конкретные меры минимизации ущерба надо в момент установления неравенства (П.2.29).

Резюме по Приложениям главы III

Целевая задача скрининга заключается в том, чтобы время запаздывания или задержки в распознавании \bar{G} , в т.ч. рака, с заданной вероятностью ложной тревоги, было минимальным, с минимальным числом проверок.

Время запаздывания – τ в распознавании \bar{G} зависит от следующих факторов: индивидуальных особенностей проверяемого человека и величины запаса его мнимого G , возникшего заболевания и скорости его протекания, и, конечно, от выбранного метода.

В методах раздела III.3 не предусмотрены рекомендации по определению τ , тогда как применение методов периодических проверок позволяет оценить τ при распознавании \bar{G} , что и было показано в методах 2, 4 и 5 Приложения 2.

Из рассмотренных методов периодических проверок за определяющий выбирают тот метод, применение которого, в данном конкретном случае, позволит раньше других с заданной вероятностью «ложной тревоги» диагностировать нездоровое (неисправное) состояние.

Метод №5 позволяет апостериори оценивать моменты времени t_0 и $t_{\bar{G}}$ и тем самым время τ , которое будет минимальным.

ГЛАВА IV. ВЫБОР НАИБОЛЕЕ ВЕРОЯТНЫХ ДИАГНОЗОВ И ОБЩИЙ АЛГОРИТМ СКРИНИНГА

Глава IV ставит своей целью связать теорию с практикой, т.е. эта глава является неким мостом между предложенными новыми методами в математической диагностике объектов с неспецифичными параметрами и практическими методиками реализации этих методов, например, в онкологии при раннем выявлении рака.

Введение к главе IV.

Многие задачи распознавания состояний в своей завершающей стадии, на этапе составления решающих правил, тесно соприкасаются с вопросами выбора наилучшего варианта чего-либо, в т.ч. выбора наилучшего решающего правила. В этой главе мы коснемся этой связи. Есть и другая точка зрения. При неспецифичных параметрах (признаках) следует исходить из того, что все решающие правила, приведенные в работе, априори равноправны, и поэтому нецелесообразно заниматься поиском и выбором наилучшего решающего правила, ибо наилучшее можно установить только практикой. В случае неспецифичности параметров гораздо эффективней может оказаться совокупность этих РП и в процессе распознавания состояний (диагнозов) рассматривать их ассоциацию.

Концепция выбора, как правило, базируется на экстремумах неких целевых функций, в данном случае, в виде разделяющих (дискриминантных) функций, основу которых составляют функции или функционалы состояний – математические модели или, правильнее, – математико-диагностические модели диагнозов (см. главу I), построенные при условии неспецифичности параметров.

В первой части главы по существу развивается концепция обобщенного диагностического отношения (ОДО) и коэффициента надежности распознавания, т.е. развиваются основные идеи и положения нового подхода к распознаванию состояний.

Введение ОДО, содержащего одновременно вероятностные и метрические характеристики принадлежности проверяемого к тому или иному диагнозу, как уже было отмечено в первой главе, улучшает разрешающую способность распознавания, и все РП в ряде методов предлагается базировать на структуре ОДО, создаваемого комбинациями различных ФС с указанными выше характеристиками. Комплекс (набор) различных ОДО равен произведению числа вероятностных характеристик диагнозов на число метрических, выраженных в безразмерном виде.

В разделах 3 ÷ 5 главы III был представлен ряд РП и условия в виде цепочек неравенств с экстремальными и близкими к ним значениями различных приведенных ФС и соответствующие им пятерки наиболее вероятных диагнозов (н.в.д.), среди которых с $P \approx 1$ находится истинный диагноз проверяемого человека, устанавливаемый инструментальным диагностированием, проверкой пяти н.в.д.

Однако не были проведены: общий анализ представления пятерки н.в.д., выявления истинного диагноза, анализ изменения коэффициента надежности распознавания – E при периодических проверках, т.е. при скрининге, условия выбора наилучшего РП по всем ОДО, условия выбора пяти н.в.д. по всем РП (или ОДО) и обобщение некоторых методов.

Прежде чем перейти к этому анализу приведем «медицинский вариант» 3-го основополагающего принципа, также выводимого из второй гипотезы, и его производные – положения, касающиеся истинности устанавливаемого диагноза. На этом принципе строится алгоритм управления диагностическим процессом (скринингом).

IV.1. Третий принцип и его основные положения.

Принцип 3а

Ранжированная последовательность ПК и М проверяемого человека будет ближе к ранжированной последовательности ПК и М пациентов с тем

диагнозом, к которому принадлежит его состояние – диагноз, подлежащий установлению в ходе скрининга.

Принцип 3б

С развитием заболевания и ростом числа проверок, только при одном, истинном диагнозе проверяемого человека, его фактическое состояние всё более приближается к этому диагнозу.

Основные положения 3-го принципа

1. Истинным возможно будет тот диагноз, который встречается (повторяется) в каждой пятерке н.в.д., причем число пятерок равно числу различных приведенных РП или ОДО. Другими словами, истинный диагноз должен находиться среди пяти н.в.д. при каждом РП или ОДО. Если коэффициент $E \approx 1$, то вероятность нахождения истинного диагноза среди пятерки тоже ≈ 1 . Вероятность обнаружения истинного диагноза, согласно принципа, больше вероятности ошибочного установления каждого из остальных четырех диагнозов.

2. При каждой из возможно проведенных проверок, истинный диагноз, в отличие от остальных, будет находиться среди пяти н.в.д.

3.а Истинный диагноз в пятерке н.в.д., по причине значительной случайной составляющей, необязательно должен стоять на первом месте в ранговой цепочке диагнозов при первой проверке.

3.б Диагноз, входящий в пятерку н.в.д., вероятнее всего, окажется истинным, если его коэффициент $E_{N=1} \geq 1/2$.

4. Истинный диагноз проверяемого человека с каждой последующей проверкой будет занимать место в пятерке н.в.д. не ниже места, занимаемого при предыдущей, т.е. будет перемещаться на первые места, если он при первой проверке находился в середине. Достаточным условием истинного диагноза является его нахождение на первых местах при всех РП и при каждой возможной проверке.

5а. Истинный диагноз в отличие от остальных н.в.д. имеет с ростом числа проверок убывающие значения ОДО (в смысле его минимума) или возрастающие (в смысле максимума ОДО).

5б. Истинный диагноз – единственный, который при увеличении числа проверок будет иметь возрастающую вероятность его установления.

IV.2. Выбор наилучшего решающего правила (РП)

Наиболее эффективной конструкцией РП является ее построение на основе коэффициента надежности распознавания E_π и E_Σ (см. формулы (1.6) главы I и (3.44) главы III). Поскольку коэффициент E сходен с вероятностью диагноза D_π при $N = 1$, так как $\sum_{\pi=1}^L E_{D_\pi} = 1$, и ОДО уже учитывает вероятностные и метрические характеристики состояния или диагноза, то E – более общий показатель, чем отдельные ФС, приведенные в главе III.

Если РП составлять на основе ОДО, а не через ФС, то число образованных РП будет $v_{\text{ОДО}} = v_r \times v_3 > v_{\text{ФС}}$, где v_r и v_3 – числа ФС, каждое из которых при образовании ОДО стоит, соответственно, в его числителе и знаменателе (одно – в числителе, другое – в знаменателе, см. (3.39) главы III).

Наилучшее РП, гарантирующее или обеспечивающее с наибольшей вероятностью нахождение истинного диагноза среди 5-ти н.в.д., можно выбрать по максимальному значению суммарного коэффициента E (при $N = 5$) среди всех $v_{\text{ОДО}}$ выведенных РП. Суммарный E аналогичен вероятности образования 5-ти н.в.д, в виде ранговой цепочки пяти несовместных диагнозов (событий). Составляя $v_{\text{ОДО}}$ значений E в виде максимума ОДО, где в числителе будут вероятностные дискриминантные функции, а в знаменателе – меры близости по расстоянию, получим

$$E_{\Sigma q} = \sum_{\pi=1}^5 \text{ОДО}_{q\pi} / \sum_{\pi=1}^{L_1} \text{ОДО}_{q\pi}, \quad q = 1, 2, \dots, v_{\text{ОДО}} \quad (4.1)$$

По максимальному значению E выражения (4.1) выбирают наилучшее РП с медицинским требованием

$$\max_{q \in v} E_{\Sigma q} = P_{q^*} \geq 0,96 \quad (4.16)$$

Для этого q^* -го РП н.в.д. ранжируют в соответствии с правилом

$$\max_{\pi \in S} E_{q^*} \left| D_1 > E_{q^*} \max_{-1} \left| D_2 > \dots > E_{q^*} \max_{-4} \left| D_5 \right. \right. \right.$$

Дополнительным условием выбора наилучшего РП является условие $\max \lambda$ (см. формулу ((3.46) главы III), которое запишем через коэффициент E

$$\max \lambda = \max_{q \in V} (\max_{\pi \in S} E_{q\pi} / E_{q\pi} \max_{-4})$$

Наилучшее q^* -е РП должно иметь $\max \lambda$.

IV.3. Выбор пяти наиболее вероятных диагнозов (н.в.д.) при ряде РП

В случае, когда нет четкого выделения одного или двух диагнозов, в пятерку ранжированных н.в.д. при каждом из $v_{\text{ОДО}}$ могут входить диагнозы, которых нет в пятерках н.в.д. других ОДО, т.е. в общем случае пятерки н.в.д. могут не совпадать (строки матрицы не совпадают):

$$(D\pi q s_{\pi}) \neq (D\pi q' s'_{\pi}) \text{ где } q = \overline{1, v}, S_{\pi} = \overline{1, 5}, S_{\pi} \neq S'_{\pi} \text{ и } q \neq q';$$

q – номер строки матрицы; S – номер столбца.

Поэтому число диагнозов L_c , оказавшихся в пятерках н.в.д. при всех РП, будет больше пяти, $L_c \geq 5$; $L_c \subset L_1^1$ (см. раздел I.5).

Пятерку н.в.д. предлагается выбирать следующим образом.

1. Выбор и ранжирование диагнозов на множестве L_l при каждом РП или ОДО осуществляется по наибольшим значениям коэффициента $E_{N=l}$ среди всех L_l диагнозов, т.е.

$$\max E_{D1q} = \max_{\pi \in L_1} \frac{ОДО_{D1q}}{\sum_{\pi=1}^{L_1} ОДО_{\pi q}} \text{ и т.д.} \quad (4.2)$$

Диагнозы ранжируют в соответствии с правилом (4.2б)

$$\max E_{D1q} > E_{\max -1} \left| D_{2q} > \dots > E_{\max -4} \left| D_{5q} \right. \right. \quad (4.2б)$$

2. Составляется матрица диагнозов размером $5 \times v$ с элементом $(D_{\pi q s})$.

¹ L_1 – число диагнозов, в области которых попала $ФC_{iq}$; L_1 ограничиваем числом $L_1 \leq 15$. Остальные диагнозы $L - L_1$ – «нулевые», (см. ф-лу (3.25)), и они не рассматриваются.

3. Выбор пяти н.в.д. проводят, исходя из наибольшего числа их повторений в столбцах матрицы при различных РП и места или номера диагноза, занимаемого им в строках матрицы.

Составляют бинарное уравнение

$$n_{D\pi q S} = \begin{cases} 1, & \text{если } D_\pi \text{ присутствует в } S\text{-м столбце матрицы (с номером } S) \text{ при } q\text{-м РП,} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Тогда по всем РП, поставившим диагноз D_π на первое место ($S = 1$), число повторений

$$n_{D\pi 1} = \sum_{q=1}^v n_{D\pi q},$$

где $S = \overline{1,5}$ – номера диагнозов в порядке убывания их предпочтения, S – обозначает также номер столбца матрицы, размером $v \times L_c$, $L_c \geq 5$;

$\pi = \overline{1, L_c}$ – некий диагноз из L_c , его индексное обозначение и $\pi \neq S$.

Число повторений π -го диагноза по всем столбцам матрицы от 1 до 5

$$n_{D\pi} = \sum_{s=1}^5 \sum_{q=1}^v n_{D\pi q s} \quad (4.3)$$

Такие вычисления проводят по всем L_1 диагнозам, выбирая из них до пяти н.в.д. по максимуму выражения (4.3) и следующим за ним значениям по цепочке неравенств

$$\max_{\pi \in L_1} n_{D_1} > n_{D_2} \max-1 > \dots > n_{D_5} \max-4 \quad (4.4)$$

Однако ранговая цепочка предпочтения н.в.д., записываемая как $D_1 \succ D_2 \succ \dots \succ D_5$, может не совпасть с последовательностью диагнозов в цепочке (4.4), где « \succ » – знак предпочтения стоящему слева, так как число повторений диагнозов в последних столбцах или номерах может быть больше числа повторений на первых. Поэтому ранжирование диагнозов в пятерке н.в.д. следует проводить с использованием балловой системы, позволяющей четко ранжировать диагнозы с выделением прелиминарного¹. Ведь именно это

¹ Напомним, что прелиминарный диагноз – это предполагаемый истинный (предварительный) диагноз, а истинный – это фактический верифицированный диагноз, устанавливаемый при инструментальной проверке.

представляет теоретический и практический интерес, так как медикам-диагностам надо знать с какого диагноза (понятно, что с прелиминарного, первого по рангу диагноза) следует начать выявление истинного при инструментальном диагностировании (проверке), чтобы сэкономить время и затраты на эту операцию. Поэтому необходимо установить последовательность проверки диагнозов в соответствии с ранговой цепочкой

$$D_1 > D_2 > \dots > D_5, \quad (4.5)$$

которую можно построить, приписывая диагнозу, поставленному по критерию $\max E_q$ на первое место в рейтинге диагнозов, большее число баллов или очков, как это сделано в разделе III.5 (см. (3.27)), а диагнозу-соседу, занявшему второе место – меньшее число очков и т.д.

Балловый эквивалент приоритетов или степени предпочтения пяти н.в.д. следует вводить при сильной перемешанности (пересечении) областей этих диагнозов (оценивается по функции ОДО (N) и коэффициенту E (см. формулы (3.43а, б) и (4.2)) и неоднозначности в связи с этим выбора прелиминарного диагноза.

Такая балловая схема расстановки диагнозов по ранжиру формально напоминает метод экспертных оценок. Только в нашем случае, в роли экспертов или судей выступают не специалисты – профессионалы своего дела, а представленные в виде импликаций РП, использующие различные ОДО, а в роли объектов оценки – диагнозы или состояния. Кроме формальной аналогии предложенного метода ранжирования диагнозов и метода экспертных оценок, последний имеет субъективный характер, ибо эксперты принимают решения умозрительно на основе имеющегося априорного опыта (а если такого опыта еще не было?) и исходя из своего индивидуального видения природы или существа изучаемого и оцениваемого явления или объекта. Поэтому эти решения уже заведомо включают в себя элемент субъективизма, способный привести к ошибкам.

РП предлагаемого метода ранжирования диагнозов беспристрастны и дают объективную расстановку диагнозов по их номерам, соответствующую

степени предполагаемой истинности того или иного диагноза.

Также положим, что за первое место (первый номер или столбец матрицы (D_{pqs})) в ранжире н.в.д. приписывают 5 баллов, за второе 4 балла и т.д., за пятое место – один балл. Диагнозу, оказавшемуся на 6-м месте, ставят нулевую оценку и относят к «нулевым», несмотря на то, что он мог находиться в числе L_c диагнозов. Тогда сумму баллов, полученных диагнозом D_π , можно рассчитать по формуле:

$$C_{D_\pi} = 5 \sum_{q=1}^v n_{q\pi_1} + 4 \sum_{q=1}^v n_{q\pi_2} + \dots + 1 \sum_{q=1}^v n_{q\pi_5} = \sum_{S=1}^5 (a+1-S) \sum_{q=1}^v n_{q\pi_S}, \quad (4.6)$$

где $a = 5$ – максимальное число баллов за 1-ое место.

Такие суммы вычисляются для всех L_c диагнозов и по наибольшим из них выбирают пять н.в.д. во главе с предварительным – D_Π диагнозом. Схема выбора – прежняя. Находят максимум (4.6) по всем L_c .

$$\max_{\pi \in L_c} C_{D_\Pi} = \max_{\pi \in L_c} \left[\sum_{S=1}^5 (a+1-S) \sum_{q=1}^v n_{q\pi_S} \right]$$

Ранговую цепочку предпочтения (4.5) строят согласно неравенствам (4.6б)

$$\max_{\pi \in L_c} C_{D_\Pi} > C_{D_2} \max - 1 > \dots > C_{D_5} \max - 4 \quad (4.6б)$$

Понятно, что в идеальном случае, если первый диагноз в ранговой цепочке (4.5) имеет $\sum_{q=1}^v = v$ предпочтений, то он и будет предварительным с суммой баллов $C_{1\max} = 5v$ даже без начисления баллов по остальным столбцам матрицы.

РП выбора предварительного диагноза запишется так

$$C_{D_*} = \max_{\pi \in L_c} \left[\sum_{S=1}^5 (a+1-S) \sum_{q=1}^v n_{q\pi_S} \right] \rightarrow X_{ij} \in D_* \equiv D_\Pi. \quad (4.7)$$

РП (4.7) является основным, при выборе 5-ти н.в.д. сразу после выявления \bar{G} состояния.

Достаточным условием $D_* \equiv D_\Pi$ будет

$$\frac{ОДО_{D_*}}{\sum_{\pi=1}^5 ОДО_{\pi}} \geq \frac{1}{2}$$

Когда максимумы некоторых ОДО указывают на одни и те же диагнозы, то D_{Π} предложено выбирать из условия

$$n_{D_*} = \max \sum_{q=1}^v \gamma_{D_*q} \rightarrow X_{ij} \in D_* \equiv D_{\Pi},$$

где n_{D_*} – число указаний на диагноз D_* со стороны всех v ОДО,

$$\gamma_{D_*q} = \begin{cases} 1, & \text{если } E_{D_*q} = \max_{\pi} E | N = 1(D_{*q}) \text{ при } q\text{-м ОДО} \\ 0, & \text{если } E_{D_*q} \neq \max_{\pi} E | N = 1_{D_*} \text{ при } q\text{-м ОДО}, \end{cases}$$

D_{*q} – диагноз, при котором достигается $\max_{\pi} E |_{N=1}$ при q -м ОДО.

D_{Π} будет резко выделен, если экстремумы (максимумы) более половины всех ОДО укажут на этот диагноз.

При очень плохой различимости каждого из пяти н.в.д., выбранных по всем ОДО, т.е. при сильной перемешанности областей диагнозов, числа баллов, полученных каждым из них, будут приблизительно одинаковыми, т.е. $C_1 \approx C_2 \approx \dots \approx C_5$, и если среди этих диагнозов есть раковый, то все они подлежат инструментальной проверке.

В изложенном методе количественная шкала сравнения – основная, а ранговая (порядковая) – производная и обе шкалы, естественно, согласованы.

IV.4. Об уменьшении числа н.в.д с ростом числа проверок

Утверждение 1. Всегда найдется такое число $5 < L_1 < L$ несовместных событий (н.в.д.), среди которых находится истинный, что вероятность их осуществления будет равна 1, т.е.

$$\sum_{\pi=1}^{L_1} P_*(D_{\pi}) = 1,$$

где $P_*(D_{\pi}) \neq P(D_{\pi})$ – не априорная вероятность D_{π} , а вероятность его появления в группе L_1 диагнозов.

Это утверждение вытекает из следующих логических соображений. С

вероятностью $P = 1$ истинный диагноз находится среди L выбранных, если у проверяемого возможен один из этих L диагнозов, т.е. $\sum_{\pi=1}^L P(D_{\pi}) = 1$. Фактически эти L диагнозов охватывают 95% всех диагнозов (см. Предисловие). При недостаточной статистике по всем возможным диагнозам делается допущение, что у больных могут быть только выбранные L диагнозов. Со временем, когда будет накоплена статистика динамики ОКО в кластерах всех диагнозов, это допущение будет снято. Таким образом, формально мы приравниваем эти 95% к 100%. $\theta = L - L_1$ диагнозов не попадут в ранговые (порядковые) столбцы матрицы $v \times L_1$, т.е. окажутся «нулевыми», с нулевой вероятностью попадания (см. выше), так как ни одно РП не укажет ни на один из них, а точнее, не поставит ни в один ранговый столбец.

Можно записать

$$\sum_{\pi=1}^L P_*(D_{\pi}) = \sum_{\pi'=1}^{L_1} P_*(D_{\pi'}) + \sum_{\pi''=1}^{\theta} P_*(D_{\pi''}) = 1, \text{ где } \pi' \neq \pi''.$$

$$\text{Но } \sum_{\pi''=1}^{\theta} P_*(D_{\pi''}) = 0. \text{ Тогда } \sum_{\pi'=1}^{L_1} P_*(D_{\pi'}) = 1.$$

Согласно третьему принципу и его положениям вероятность нахождения истинного диагноза в первых столбцах матрицы должна быть выше вероятности нахождения там остальных диагнозов и она увеличивается с ростом числа проверок.

В случае (П.1.0) Приложения 1 главы III истинным будет тот диагноз, выбор которого по принятому критерию \min ОДО или \max ОДО или $\max \Sigma_{\pi}$ становится очевидным с ростом числа проверок, при котором значения ОДО и ВММБ при истинном диагнозе убывают или возрастают в отличие от остальных диагнозов (см. главу I и принцип 3 и его положения).

Утверждение 2. С ростом числа проверок необходимое для достижения заданного значения $E \geq 0,96$ число н.в.д. будет уменьшаться.

Так как области истинного диагноза и его ближайших соседей по критерию \max ОДО перемешаны, то вероятности попадания в столбцы матрицы ближайших диагнозов-соседей будут больше вероятностей попадания

остальных диагнозов, но меньше вероятности попадания истинного. Однако в силу значительной случайной составляющей истинный диагноз может быть расположен в середине ранговой цепочки предпочтения диагнозов. Это «ядро» диагнозов во главе с истинным и будет находиться в столбцах матрицы. По мере увеличения вероятности обнаружения истинного диагноза с ростом числа проверок, согласно третьему принципу, вероятности попадания остальных диагнозов будут уменьшаться вследствие увеличения числа «нулевых» диагнозов. При этом число н.в.д. должно уменьшиться.

Вернемся к аппроксимирующим функциям (см. ф-лы (3.43а и б) главы III) значений ОДО в зависимости от номеров, которые н.в.д. занимают в ранговой цепочке. Если экстремум ОДО выражать в форме максимума, то аппроксимирующие функции ОДО = $f(N)$ будут иметь другой вид, приведенный в главе II, см. ф-лу (2.27).

$$f(N) = a_{1\psi} - b_{1\psi} N^{c_{1\psi}}, \text{ где } a_{1\psi} \text{ и } b_{1\psi} > 0; 0 < c_{1\psi} < 1; \quad (4.8)$$

или

$$f(N) = a_{2\psi} b_{2\psi}^{-c_{2\psi} N}, \text{ где } c_{2\psi} \neq 0. \quad (4.9)$$

Так как коэффициенты a , b и c будут изменяться с ростом числа Ψ проверок, под каждым коэффициентом должен стоять индекс – Ψ .

Разобьем интервал $0 \div L_1$ на множество бесконечно малых отрезков – dn . Функции (4.8) и (4.9) – непрерывные на интервале $0 \div L_1$.

Тогда отношение площадей фигур, ограниченных этими функциями на интервалах $0 \div 5$ и $0 \div L_1$ будет представлять собой вероятность осуществления или образования пяти н.в.д. (несовместных событий) из L_1 возможных, которая в свою очередь равна суммарному коэффициенту E_{Σ} , т.е.

$$P\left(\bigcup_{\pi=1}^5 D_{\pi}\right)_{\psi=1} = \frac{\int_0^5 f_{\psi=1}(n) dn}{\int_0^{L_1} f_{\psi=1}(n) dn} \cong \frac{\sum_{\pi=1}^5 \text{ОДО}_{\pi_{\psi=1}}}{\sum_{\pi=1}^5 \text{ОДО}_{\pi_{\psi=1}}} = E_{\Sigma|N=5} \quad (4.10)$$

Вероятность (4.10) – вероятность покрытия областью или площадью пяти н.в.д. области или площади L_1 диагнозов.

Пусть при $\Psi = 1$ по формуле (4.10) $P\left(\bigcup_{\pi=1}^5 D_{\pi}\right)_{\psi=1} < 0,96$.

Вообще, если при первой (или n -ой) проверке $E_{\Sigma|N=5} < 0,96$, то для увеличения E_{Σ} следует либо отложить постановку диагноза до следующей, второй проверки ($\psi = 2, \varepsilon = 1$), либо для достижения $E_{\Sigma} = 1$ увеличить число н.в.д. с пяти до L_1 , при котором $E_{\Sigma|N=L_1} = 1$. Действительно, в первом случае, согласно 3-го принципа

$$E_{\Sigma|N=5, \Psi=2} > E_{\Sigma|N=5, \Psi=1} \quad \text{или} \quad P\left(\bigcup_{\pi=1}^5 D_{\pi}\right)_{\psi=2} > P\left(\bigcup_{\pi=1}^5 D_{\pi}\right)_{\psi=1}, \quad (4.11)$$

а во втором, согласно утверждению 1:

$$\sum_{\pi=1}^{L_1} P_*(D_{\pi}) = \sum_{\pi=1}^{L_1} \text{ОДО}_{\pi} / \sum_{\pi=1}^{L_1} \text{ОДО}_{\pi} = E_{\Sigma|N=L_1} = 1.$$

Однако мы ограничены пятью н.в.д., которые надлежит проверить при инструментальном диагностировании, поэтому-то и откладывают постановку диагноза до следующей проверки, при которой справедливо неравенство (4.11) при равном числе (5-ти) н.в.д., и при которой увеличивается вероятность обнаружения истинного диагноза.

Если коэффициент $E_{\Sigma|N=5} \geq 0,96$ уже при первой проверке, то тогда очередной проверки, естественно, не потребуется.

Покажем, что с ростом числа ε -проверок число н.в.д. должно уменьшиться.

С ростом числа проверок вероятность обнаружения истинного диагноза, согласно положениям 3-го принципа, возрастет настолько, что вероятность его нахождения среди 5-ти н.в.д., равная вероятности $P\left(\bigcup_{\pi=1}^5 D_{\pi}\right)$, может оказаться больше 0,96 не при 5-ти н.в.д., а уже при 4-х или даже 3-х н.в.д. Это произойдет тогда, когда отношение площадей

$$\int_0^5 f_{\psi=\varepsilon+1}(n)dn / \int_0^{L_1} f_{\psi=1}(n)dn > 1, \quad 1 \leq \varepsilon \leq 4 \vee 5. \quad (4.12)$$

В этом случае неравенство (4.12) показывает запас надежности распознавания при ε -й проверке, т.е. число пять н.в.д. оказывается избыточным и его нужно уменьшить, чтобы получить требуемую $P \geq 0.96$, ведь отношение

(4.12) представляет собой вероятность (см. (4.10) распознавания, нахождения истинного диагноза среди 5-ти н.в.д. Но значение вероятности не может быть больше 1. Поэтому требуемую вероятность при $\psi = 1 + \varepsilon$ может обеспечить отношение

$$0,96 \leq \int_0^{N=3 \div 4} f_{\psi=\varepsilon+1}(n)dn / \int_0^{L_1} f_{\psi=1}(n)dn < 1,$$

т.е. когда число н.в.д. (3÷4) меньше 5-ти. При этом два или один, последний, диагноз в ранговой цепочке предпочтения исключаются из рассмотрения.

Итак, при резком выделении истинного диагноза, с ростом числа проверок, число н.в.д. может уменьшиться с 5-ти до 2-х÷4-х. Этот случай наиболее благоприятный для медиков: сокращается время на инструментальное диагностирование.

Число н.в.д. уменьшается и в связи с «выбраковкой» ложных диагнозов из бывших н.в.д. (см. п. 1.5.2 и рис. 12 главы II).

Вычислим вероятности (4.10), когда подынтегральная аппроксимирующая функция имеет вид (4.8) и (4.9)

$$P\left(\bigcup_{\pi=1}^5 D_{\pi}\right) = \frac{a \int_0^5 dn - b \int_0^5 n^c dn}{a \int_0^{L_1} dn - b \int_0^{L_1} n^c dn} = \frac{5a(c+1) - b5^{c+1}}{L_1 a(c+1) - bL_1^{c+1}};$$

и

$$P\left(\bigcup_{\pi=1}^5 D_{\pi}\right) = \frac{a \int_0^5 b^{-cn} dn}{a \int_0^{L_1} b^{-cn} dn} = \frac{1 - b^{-5c}}{1 - b^{-L_1 c}}, c \neq 0$$

IV.5. Алгоритм проведения скрининга

Вероятность $P\left(\bigcup_{\pi=1}^N D_{\pi}\right)$ образования н.в.д. увеличивается с ростом N и с ростом числа проверок Ψ или ε -проверок, т.е.

$$P_*(D_\pi) < P\left(\bigcup_{\pi=1}^2 D_\pi\right)_\psi < \dots < P\left(\bigcup_{\pi=1}^{N=5} D_\pi\right)_\psi; 2 \leq N \leq 5 \quad (4.13)$$

и

$$P\left(\bigcup_{\pi=1}^N D_\pi\right)_1 < P\left(\bigcup_{\pi=1}^N D_\pi\right)_2 < \dots < P\left(\bigcup_{\pi=1}^N D_\pi\right)_{\psi=\varepsilon+1},$$

где предельное число $\varepsilon = 4 \vee 5$ (см. ограничение на ε в ф-ле (4.12)); N при $\psi = 1 + \varepsilon$ может быть избыточным и для достижения той же вероятности требуемое число диагнозов может оказаться меньше N , т.е.

$$P\left(\bigcup_{\pi=1}^N D_\pi\right)_{1+\varepsilon} \geq P\left(\bigcup_{\pi=1}^{N_1 < N} D_\pi\right)_{1+\varepsilon} \quad (4.14)$$

или при переходе с $\psi - 1$ -й на ψ -ю проверку возможно примерное равенство, вытекающее из неравенств (4.13) и (4.14)

$$P\left(\bigcup_{\pi=1}^{N=5} D_\pi\right)_{\psi-1} \approx P\left(\bigcup_{\pi=1}^{N-1} D_\pi\right)_\psi, \quad (4.14б)$$

т.е. приближенное равенство (4.14б) показывает уменьшение N .

Планомерное увеличение $P\left(\bigcup_{\pi=1}^N D_\pi\right)$ при скрининге достигается сначала за счет увеличения числа вводимых в объединение \cup диагнозов (см. (3.44), (3.45)) при какой-то проверке, начиная с первой, а уже потом, если эта вероятность не достигла требуемого, заданного значения 0,96 при $N = 5$ диагнозов, инструментальную проверку и постановку диагноза откладывают до следующей $\psi = 2$ -й проверки и т.д. Напоминаем, что инструментальное диагностирование назначают тогда, когда указанная вероятность или коэффициент надежности распознавания E при 2-х, 3-х, 4-х или 5-ти н.в.д. будет $\geq 0,96$ и когда раковый диагноз находится на первом или втором месте в ранговой цепочке н.в.д.

Предлагаемый метод окажется неспособным в решении поставленной задачи ранней диагностики рака с заданной, очень высокой вероятностью его обнаружения ($P \geq 0,96$) при последующей инструментальной проверке от 2-х до 5-ти н.в.д., если при предельных значениях $N = 5$ и $\varepsilon = 4 \vee 5$ эта вероятность

не будет достигнута. В этом случае придется уменьшить требуемое значение P , например, до 0,94, но не менее или по согласованию с медиками-диагностами увеличить число н.в.д. до шести.

Выше было отмечено, что чем меньше будет число N н.в.д. в объединении \cup , тем меньше окажутся затраты на инструментальное диагностирование. Желательно при этом минимизировать время, затрачиваемое на него, т.е. время, которое потребуется на проверку выданных компьютером пяти или менее н.в.д., а это связано с оптимальной, наилучшей последовательностью, порядком или очередностью проверки в соответствии с ранговой цепочкой предпочтения (4.5). Предлагалось также не назначать инструментальную проверку, если среди первых двух из пяти н.в.д. не окажется ни одного ракового диагноза. Можно вычислить эту априорную вероятность не назначения инструментальной проверки, если известны априорные вероятности всех выбранных L диагнозов.

Определим вероятность попадания ракового диагноза на первое или второе место в пятерке.

Считая попадание или занятие раковым диагнозом 1-го, 2-го или 5-го места в столбцах матрицы (D_{qs}) равновероятным, вероятность ракового диагноза (K), расположенного или оказавшегося на первом или втором месте в матрице или, что то же самое, в ранговой цепочке н.в.д., будет определена по известной формуле

$$P(A \wedge B) = P(A) * P(B / A) = \frac{2}{5} P(K),$$

где $P(A) = P(K)$ – априорная вероятность ракового диагноза, т.е. всех p его локализаций;

$P(B/A) = 2/5$ – условная вероятность занятия диагнозом первого или второго места в ранговой цепи из пяти н.в.д. при условии, что этот диагноз раковый.

Поставим параллельно и второй вопрос: будет ли изменяться $P(K)$ в зависимости от возраста – T проверяемого человека или возрастной группы

пациентов в кластерах.

$$P_t(K) = \sum_{K=1}^p P_t(D_K) = \frac{\sum_{K=1}^p n_{Kt}}{\sum_{K=1}^p n_{Kt} + \sum_{\rho=1}^{\omega} n_{\rho t} + \sum_{\varepsilon=1}^{\chi} n_{\varepsilon t}}, \quad (4.15)$$

где t – номер возрастной группы, $t = 1, 2, 3$;

n_{Kt} – число человек t -й возрастной группы, больных k -й локализацией рака на 100 тыс. населения;

$n_{\rho t}$ – число человек t -й возрастной группы, больных ρ -м ХЗ на 100 тыс. населения;

$n_{\varepsilon t}$ – число человек t -й возрастной группы с ε -й ДО на 100 тыс. населения.

Примечание: число здоровых (относительно здоровых) людей t -й возрастной группы на 100 тыс. населения не включено в знаменатель формулы (4.15), так как после первого этапа проверки (см. п. III.3 и п. 3.4.1) здоровые люди отсеиваются и на втором этапе проверки и постановки диагноза не принимают участия.

Вероятность не попадания ракового диагноза на первое или второе место, т.е. вероятность не назначения инструментальной проверки определится как

$$P_{\bar{K}} = 1 - \frac{2}{5} P_t(K)$$

Это достаточно высокая вероятность, гарантирующая экономию времени и средств на дорогостоящее инструментальное диагностирование.

Теперь, что касается второго вопроса.

На всех этапах изложения материала упоминалось о возможном числе $L = p + \omega + \chi$ выбранных, наиболее распространенных диагнозах, охватывающих до 95% всех заболеваний человека, о числе, которое с набором статистики будет увеличиваться, увеличивая указанную вероятность, приближая ее к 100%. Однако следует обратить внимание на одно немаловажное обстоятельство: число L зависит от возраста – T проверяемых людей, t -й возрастной группы пациентов.

С возрастом число возможных, распространенных нераковых \bar{K} диагнозов, включающих диагнозы ХЗ и ДО, у среднестатистического человека будет перманентно увеличиваться. Общее же число p раковых диагнозов, исключая рак простаты (он не входит в $p = 8$ выбранных, наиболее распространенных раковых локализаций) будет одинаковым во всех трех возрастных группах.

Возрастная группа пожилых пациентов (60 ÷ 80 лет и старше) оказывается самой неблагоприятной категорией пациентов, у которых могут быть уже до двух и более сопутствующих леченных ХЗ. И, наоборот, в группе молодых пациентов число возможных \bar{K} диагнозов будет небольшим, что создает благоприятную обстановку для раннего диагностирования рака по ПК и М.

Распознавание рака на ранней стадии в первых двух возрастных категориях трудоспособного населения по ПК и М будет более успешным, поскольку число ХЗ и ДО в этих группах значительно меньше, чем в третьей. А чем меньше диагнозов \bar{K} , тем меньше «помехи» в обнаружении рака и области диагнозов будут менее перемешаны.

Таким образом, с возрастом человека числитель (4.15) увеличивается за счет роста n_{k_i} , но знаменатель в этой формуле тоже увеличивается. К тому же растут и два последних слагаемых знаменателя.

В первой же возрастной группе молодых пациентов число n_{k_i} в числителе мало: рак у молодых людей встречается реже, хотя в настоящее время, с ухудшением экологии, производством генномодифицированных и канцерогеносодержащих продуктов, рак «помолодел». Остальные два слагаемых знаменателя тоже малы, т.е. числитель и знаменатель в (4.15) незначительны. В средней группе пациентов значения числителя и знаменателя будут, естественно, больше, чем в первой, но меньше, чем в третьей. Следовательно, отношения (4.15) во всех группах будут мало отличаться друг от друга.

Итак, имеет место примерное равенство априорных вероятностей раковых диагнозов в первой, во второй и третьей возрастных группах.

$$P(K)_{t_1} \approx P(K)_{t_2} \approx P(K)_{t_3} \quad (4.16)$$

Если сопоставлять вероятности возникновения только K диагнозов (без учета ХЗ и ДО), то, конечно, с возрастом вероятность K диагнозов увеличивается. Но с учетом ХЗ и ДО априорная вероятность K -диагнозов в третьей группе окажется даже несколько меньше, чем в первых двух.

Полагаем, что статистическая зависимость L от возраста – T людей будет характеризоваться либо аппроксимирующей логистической кривой, либо аппроксимирующей степенной функцией, так как после 60 лет начнет наблюдаться снижение скорости роста L (пологость логистической кривой сверху свидетельствует о возрастной насыщенности диагнозами). Обозначим эти зависимости в общем виде как

$$L = f_1(T) = \frac{A}{1 + e^{b-aT}}, \text{ либо } L = f_2(T) = L_0 + \nu T^b, \quad 0 < b < 1, \quad (4.17)$$

где коэффициенты в указанных функциях определяются из статистики МНК;

интервалы трех возрастных групп: $T_1 - T_0$; $T_2 - T_1$ и $T_3 - T_2$.

Тогда, согласно теореме о среднем, среднее число диагнозов в каждой группе будет, соответственно, равно:

$$\bar{L}_1 = \frac{1}{T_1 - T_0} \int_{T_0}^{T_1} f(T) dT; \quad \bar{L}_2 = \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} f(T) dT \quad \text{и} \quad \bar{L}_3 = \frac{1}{T_2 - T_3} \int_{T_2}^{T_3} f(T) dT \quad (4.18)$$

Подставляя подынтегральные аппроксимирующие функции (4.17) в (4.18), после интегрирования получим:

$$\bar{L}_{1t} = \frac{1}{T_t - T_{t-1}} \int_{T_{t-1}}^{T_t} \frac{A}{1 + e^{b-aT}} dT = \frac{A}{a(T_t - T_{t-1})} \ln \frac{e^{aT_t - b} + 1}{e^{aT_{t-1} - b} + 1}; \quad (4.19a)$$

$$\bar{L}_{2t} = \frac{1}{T_t - T_{t-1}} \left(\int_{T_{t-1}}^{T_t} L_0 dT + \nu \int_{T_{t-1}}^{T_t} T^b dT \right) = L_0 + \frac{\nu}{T_t - T_{t-1}} \left(\frac{T_t^{b+1} - T_{t-1}^{b+1}}{b+1} \right); \quad (4.19b)$$

$$\bar{L}_1 < \bar{L}_2 < \bar{L}_3 \quad (4.19b)$$

где $t = 1, 2, 3$ (см. (4.15))

Функция $f_1(T)$ непрерывна на интервале $T_0 \div T_3$ и имеет вторую производную по T с точкой перегиба логистической кривой $T_{II} = b/a$. Если вместо 1 в знаменателе этой функции будет другое число, например, d , то точкой перегиба будет $T_{II} = (b - \ln d)/a$.

В зависимости от возраста проверяемого (в какую t -группу он попадает) число диагнозов – L во всех формулах, где фигурирует L , будет определяться по формуле (4.19а) или (4.19б).

При пояснении приближенных равенств (4.16) числа $\bar{L}_1 \div \bar{L}_3$ в формулах (4.18) разнятся в основном за счет нераковых диагнозов \bar{K} , т.е. за счет ХЗ и ДО, поскольку, как было отмечено выше, число раковых диагнозов (локализаций), $p_i \approx const$.

Итак, формулы (4.18) – (4.19в) получены для пояснения примерных равенств (4.16). В практических же случаях при проверке i -го человека T_i лет число выбираемых диагнозов – L_i , возможных для этого возраста, определяют по правой границе интервала t -й возрастной группы, в которую попал проверяемый: для человека, попавшего в первую группу,

$$L_{i1} = f_1(T)|_{T_1} \text{ или } L_{i1} = f_2(T)|_{T_1}, \quad (4.20а)$$

во вторую $L_{i2} = f_1(T)|_{T_2} \text{ или } L_{i2} = f_2(T)|_{T_2}, \quad (4.20б).$

в третью $L_{i3} = f_1(T)|_{T_3} \text{ или } L_{i3} = f_2(T)|_{T_3},$

где T_1, T_2, T_3 – правые границы интервалов; $T_1 < T_2 < T_3$.

Вообще, границу T_3 можно установить, определив ее возрастом долгожителей, достигшим, например, 90 лет.

Если $T_i = T_1$, то L_i определяют по формуле (4.20а), если $T_i = T_2$, то L_i определяют по формуле (4.20б).

Теперь, после того, как в Приложении 1 главы III и в п.п. IV.4 и IV.5 выяснены некоторые теоретические аспекты скрининга, приведем расширенную блок-схему алгоритма его проведения, изображенную на рисунках 4.1 и 4.2.

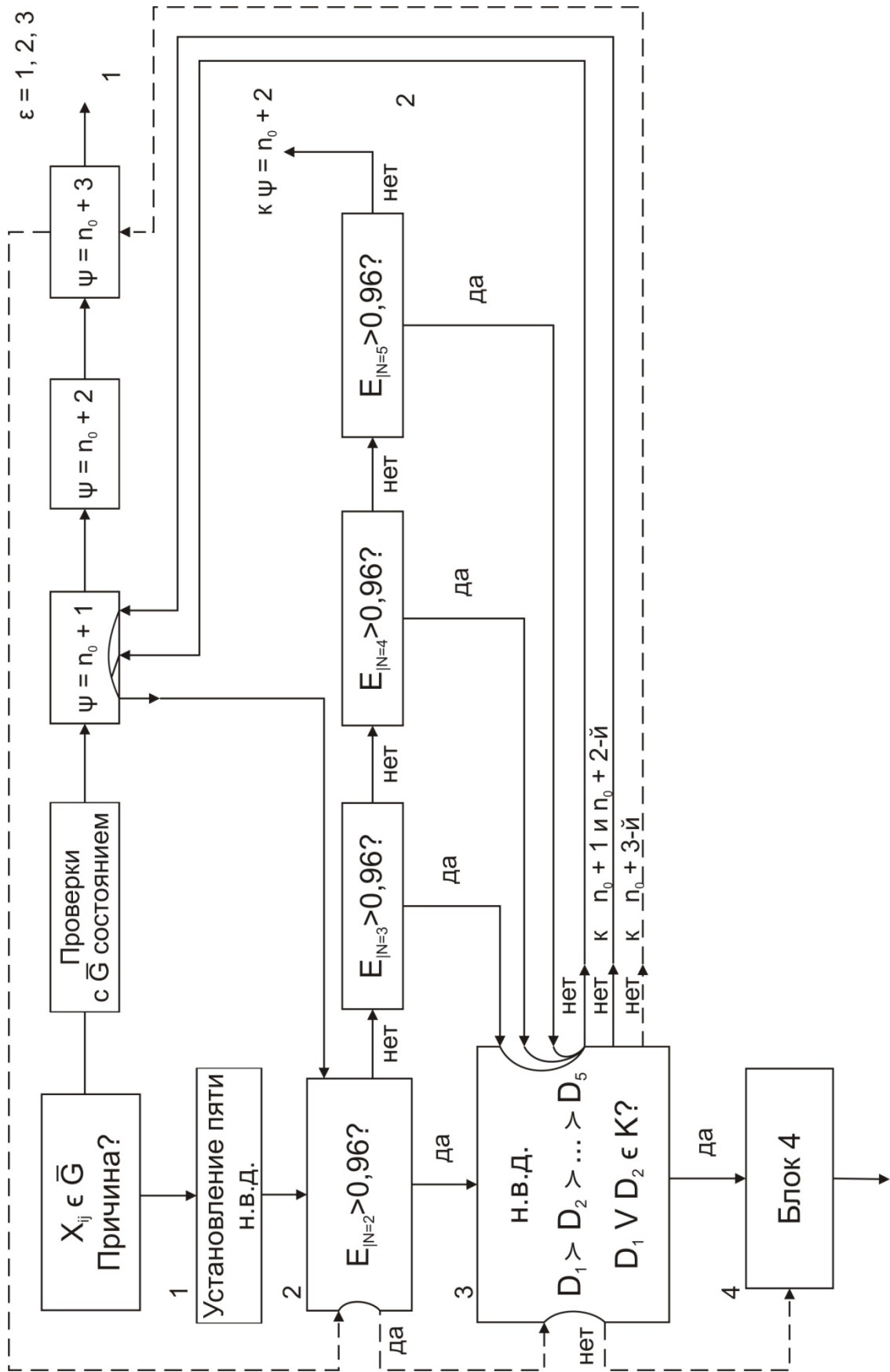


Рис. 4.2. Фрагмент блок схемы алгоритма (вариант 2) с измененной структурой центральной (стволовой) части

В этой схеме здоровое (G) или относительно здоровое ($\overline{G_0}$) и нездоровое (\overline{G}) состояния проверяемого человека выявляются по РП раздела III.3 третьей главы и РП методов Приложения 2 этой же главы. Левая «ветвь» или часть блок-схемы Рис. 4.1 выстраивается по результатам вычислений в соответствии с РП указанных разделов. При этом \overline{G} состояние проверяемого может быть обнаружено как при первой, так и n_0 -й проверке (n_0 ограничено лишь прекращением проверок по какой-либо причине самим проверяемым человеком). Но если у человека выявлено \overline{G} состояние не при первой, а при n_0 -й проверке, то общее число проверок n до установления конкретного К, ХЗ или ДО диагноза – $n = n_0 + \varepsilon$; $n_0 \geq 1$, а предельное $n = n_0 + 4 \vee 5$.

Левая часть блок-схемы алгоритма показывает скрининг людей с G и $\overline{G_0}$ состояниями, с продолжающимся подтверждающим ответом «Да».

Центральная и правая части схемы алгоритма представляют собой цепи управления скринингом в процессе установления диагноза заболевшего человека. Все части схемы логически связаны между собой управляющими воздействиями.

Центральная (стволовая) и правая части блок-схемы на рис. 4.1 и 4.2 выстраиваются в соответствии с результатами вычислений по РП остальных разделов, начиная с п. III.4 и заканчивая п. V.6. В этих частях блок-схемы выясняется причина нездорового состояния проверяемого человека. Эта комплексная процедура начинается с вычислительного блока 1, который выдает пять н.в.д. во главе с предполагаемым D_n и заканчивается блоком 4 – инструментальным диагностированием с постановкой диагноза (корень стволовой части блок-схемы алгоритма) – главного, основного результата скрининга при назначении курса лечения заболевшего человека.

На Рис. 4.1 и 4.2 представлен двухвариантный скрининг с различной очередностью следования двух основных (решающих) блоков 2 и 3 в центральной (стволовой) части схемы алгоритма.

На этих рисунках показан двухпроверочный первый цикл скрининга, где

алгоритм при первой проверке с ответами «Да», заканчивающийся назначением лечения, представляет собой центральную, вертикальную часть блок-схемы, а алгоритм с ответами «Нет» означает проведение следующей, второй или третьей ($n_0 + 1$ -й или $n_0 + 2$ -й) проверки с повторением первого цикла ($\varepsilon = 1 \vee 2$). (В блоке «Проверки с \bar{G} состоянием» – это и есть ε -проверки).

При подозрении на присутствие К-диагноза после первой ε -проверки, периодичность проведения ε -проверок – $t_{п\varepsilon}$, с целью сокращения времени до установления истинного диагноза, сначала следует уменьшить с 4-х месяцев до 3-х, а затем, при усилившемся подозрении – до 2-х месяцев с общей продолжительностью – τ от начала выяснения причины нездорового состояния до постановки диагноза: $\tau_1 = 4 + 3 = 7$ мес. при 3-х проверках, считая n_0 -ю, или $\tau_2 = 4 + 3 + 2 = 9$ мес. – после 4-х проверок.

С каждой последующей ε -проверкой цикл управления скринингом повторяется и продолжается до тех пор, пока не появятся все ответы «Да» и не будут выполнены указания в блоках центральной стволовой части схемы.

При очередных ответах «Нет» скрининг заканчивается после четырех или пятикратного ответа «Нет», т.е. при $4 \vee 5$ -й проверке. Вообще, скрининг с последующим инструментальным диагностированием и постановкой диагноза заканчивается в любом случае при предельных значениях $N = 5$ и $\varepsilon = 4 \vee 5$.

Следует заметить, что РП (1.40) главы I дает медикам альтернативу: либо проводить согласно алгоритму скрининга несколько (если потребуется) ε -проверок, либо устанавливать по РП (1.40) истинный диагноз после одной или двух ε -проверок, когда апостериорная вероятность прелиминарного диагноза, а в данном случае – истинного, составляет не менее $1/2$ среди выделенных нескольких н.в.д. Более 3-х ε -проверок рекомендовано делать только в самых сложных, не очевидных случаях распознавания и когда первые два диагноза в цепочке н.в.д. не связаны с онкологией.

Вариант алгоритма, представленный на Рис. 4.1, – более предпочтительный, так как в случае ответа «Нет» на вопрос второго блока сразу откладывают постановку диагноза до следующей, второй или $n_0 + 1$ -й

проверки (горизонтальная цепочка 1), независимо от того, какой будет ответ на вопрос третьего блока. Этим самым экономится машинное время на проведение вычислений по горизонтальной цепочке (2). Однако, если при $\psi = 2$ или $\psi = n_0 + 1$ -й проверке картина повторяется и тот же самый раковый диагноз будет опять стоять на первом или втором месте в ранговой цепочке н.в.д., то инструментальную проверку проводят независимо от того $E/N > 0,96$ или $E/N < 0,96$.

Вообще, блок 2 на Рис. 4.1 играет роль фильтра, не пропускающего диагнозы K , стоящие на местах ниже второго в ранговой цепочке н.в.д. В какой-то степени это будет способствовать некоторому увеличению вероятности β пропуска K , но уменьшению вероятности ложной тревоги α .

С другой стороны нельзя не замечать развития ХЗ. Если при трех первых проверках или $(n_0 \div n_0 + 2)$ -х проверках в трех ранговых пятерках н.в.д. не будет ни одного K -диагноза, но отмечено присутствие в каждой ранговой пятерке н.в.д. одного и того же диагноза ХЗ и если при третьей (или $n_0 + 2$ -й) проверке этот диагноз переместился с более низкого места в ранговой пятерке, какое он занимал при первой проверке, на первые места, то также следует провести инструментальное диагностирование для выявления этого ХЗ, иначе можно будет запустить болезнь.

В общем случае, если при $n_0 + 3$ -ей проверке среди первых двух н.в.д. вновь не оказалось ракового диагноза, принятие решения осуществляют уже по второму варианту блок-схемы алгоритма скрининга и при $n_0 + 3$ -ей проверке процесс установления диагноза ХЗ или ДО, встречающегося в каждой пятерке н.в.д., проводят по внешнему контуру, обозначенному на рис. 2 штриховой линией, с проведением инструментального диагностирования, несмотря на отрицательный ответ на вопрос третьего блока.

Отмеченная выше альтернатива дает следующие два варианта принятия решения.

1. При получении положительного ответа «Да» на вопрос третьего блока (см. рис. 4.1.) ε -проверка не нужна ($\varepsilon = 0$). В этом случае после $n_{\bar{G}}$ -й (на рис. 4.1 и 4.2. – n_0 -й) проверки и выбора (блок 1) нескольких н.в.д., их проверяют, начиная с первых двух, инструментальным диагностированием состояния пациента и устанавливают среди них истинный диагноз.

2. Цикл скрининга может быть лишь двухпроверочным ($\Psi = 2$): n_0 -я проверка и одна ε -проверка. После ее проведения по РП (1.40) главы I устанавливают истинный диагноз, не прибегая к инструментальной проверке всех н.в.д. Это решение принимается на консилиуме, исходя из общего состояния больного и финансовых возможностей того лечебного учреждения, где находится пациент: ведь точную и надежную инструментальную диагностику проводят с использованием, в большинстве случаев, дорогостоящих зарубежных приборов и затраты на ее выполнение достаточно велики, о чем уже было замечено в предисловии. Однако необходимо всегда помнить, что здоровье человека – дороже.

Представленная блок-схема алгоритма постановки диагноза связывает методы нового подхода к распознаванию состояний (диагнозов) с их реализацией и показывает как, каким образом, можно применить эти методы в медицине при ранней диагностике рака в случае согласия и желания медиков-онкологов содействовать этому.

Различные РП и алгоритм скрининга, приведенные в главах III и IV, а также РП (1.40) позволяют без особых проблем составить компьютерную вычислительную программу всего процесса установления диагноза, начиная от сбора и обработки полученной статистической информации о значениях ПК и М проверяемых людей. Следует отметить, что у жителей разных природно-климатических зон-антонимов, например: с жарким и холодным, умеренным и резко-континентальным климатом, возможны различные среднестатистические показатели динамики ПК и М при развитии тех же самых заболеваний. В регионах с указанными климатами верхняя и нижняя границы нормативных значений ПК и М для здоровых (относительно здоровых) людей будут

разными. Разными окажутся и априорные вероятности возникновения одних и тех же заболеваний. Следовательно, в этих регионах, а также в областях, подвергшихся чернобыльской радиации, надо проводить отдельный сбор и обработку статистической информации по результатам анализов крови людей, проживающих на этих территориях.

Выводы к главе IV

1. Наилучшее РП, обеспечивающее с наибольшей вероятностью нахождение истинного диагноза среди пяти н.в.д., выбирают по максимальному значению суммарного коэффициента надежности распознавания - E_{Σ} среди всех полученных РП.

2. Истинным будет тот диагноз, выбор которого по критерию $\max E_N$ становится очевидным с ростом числа проверок, при котором значения E_N при истинном диагнозе только возрастают в отличие от остальных диагнозов при одном и том же числе N н.в.д.

3. С ростом числа N и числа проверок значения E_N растут

4. С ростом числа проверок необходимое для достижения заданного значения $E_{\Sigma} \geq 0,96$ число н.в.д. будет уменьшаться.

5. Чем более резким будет выделение предварительного диагноза с ростом числа проверок, тем меньше число н.в.д.

6. Если при предельных значениях чисел н.в.д. и проверок не удалось достичь требуемого значения $E_{\Sigma} \geq 0,96$, то придется либо снизить его требуемое значение, например, до 0,94, но не меньше, либо по согласованию с медиками-диагностами, увеличить число н.в.д. до шести.

7. Имеет место примерное равенство априорных вероятностей раковых диагнозов в разных возрастных группах проверяемых людей.

8. Блок-схема алгоритма скрининга на Рис. 4.1 является более предпочтительной, так как экономит машинное время на вычисления и уменьшает затраты на инструментальную проверку выданных компьютером пяти н.в.д.

9. Если при $\psi = 2$ или $\psi = n_0 + 1$ -й проверке тот же самый раковый диагноз, что и при первой, будет опять стоять на первом или втором месте в ранговой цепочке н.в.д., то инструментальную проверку проводят независимо от того $E_{\Sigma} > 0,96$ или $E_{\Sigma} < 0,96$.

10. Если при каждой из трех проведенных проверок в ранговых цепочках н.в.д. будет фигурировать хотя бы один, один и тот же раковый диагноз, то независимо от места им занимаемого в ранговых цепочках, он должен быть проверен инструментальным диагностированием наряду с другими четырьмя диагнозами. Альтернативной может быть использование РП (1.40) с установлением истинного диагноза и его инструментальным подтверждением.

11. При подозрении на К-диагноз периодичность проверок должна последовательно снижаться с 4-х месяцев до 2-х.

ГЛАВА V. ДОПОЛНЕНИЯ И АНАЛИЗ НОВОГО ПОДХОДА.

V.1. Два варианта качественно-количественного метода разделения и примечание к нему

5.1.1 В дополнение к формулам (3.14) и (3.13) главы III можно предложить еще одно РП, которое опять следует из первого принципа второй гипотезы. Тройки (или четверки) ПК и М слева, в середине и в правом конце ранжированных последовательностей у проверяемого человека и в j-м кластере с диагнозом D_{π} , к которому он может принадлежать, должны в идеале совпадать, т.е. параметры в этих тройках (четверках) у проверяемого и в кластере с диагнозом D_{π^*} должны быть одноименными. Практически, чем больше параметров совпадут, тем вероятнее состояние человека относится к этому диагнозу.

Обозначим $(\cdot)_{ij\ell} = (1_{\ell(S)} \vee 2_{\ell(S)} \vee 3_{\ell(S)})_{ij\ell}$ и $(\cdot)_{jD_{\pi\ell}} = (1_{\ell(S)} \vee 2_{\ell(S)} \vee 3_{\ell(S)})_{jD_{\pi\ell}}$, где $1_{\ell(S)}$, $2_{\ell(S)}$ и $3_{\ell(S)}$ – номера одноименных параметров вида ℓ и S, соответственно у ij-го человека и в j-м кластере диагноза D_{π} с левого края соответствующих ранжированных последовательностей;

$$(\cdot)_{j\ell c} = \left(\frac{m_{\ell(S)}}{2} - 1 \vee \frac{m_{\ell(S)}}{2} \vee \frac{m_{\ell(S)}}{2} + 1 \right)_{j\ell c} \quad \text{и} \quad (\cdot)_{jD_{\pi c}} = \left(\frac{m_{\ell(S)}}{2} - 1 \vee \frac{m_{\ell(S)}}{2} \vee \frac{m_{\ell(S)}}{2} + 1 \right)_{jD_{\pi c}},$$

где $\frac{m_{\ell(S)}}{2} - 1$, $\frac{m_{\ell(S)}}{2}$ и $\frac{m_{\ell(S)}}{2} + 1$ – номера одноименных параметров... в середине ранжированных последовательностей;

$(\cdot)_{ij\Pi} = (m_{\ell(S)} - 2 \vee m_{\ell(S)} - 1 \vee m_{\ell(S)})_{ij\Pi}$ и $(\cdot)_{jD_{\pi\Pi}} = (m_{\ell(S)} - 2 \vee m_{\ell(S)} - 1 \vee m_{\ell(S)})_{jD_{\pi\Pi}}$, где $m_{\ell(S)} - 2$, $m_{\ell(S)} - 1$ и $m_{\ell(S)}$ – номера одноименных параметров... на правом краю ранжированных последовательностей.

Дизъюнкции в скобках означают, что порядок следования параметров в тройках может быть различным в соответствии с принципом перестановок Гильберта. Но в нашем случае это не приводит к полному совпадению наименований параметров внутри троек.

Правило счета совпадений троек:

$$q_{ij\ell} = \begin{cases} 1, & \text{при } (\cdot)_{ij\ell} = (\cdot)_{jD_{\pi\ell}}, \\ 0, & \text{при } (\cdot)_{ij\ell} \neq (\cdot)_{jD_{\pi\ell}}, \end{cases} \quad q_{ijc} = \begin{cases} 1, & \text{при } (\cdot)_{ijc} = (\cdot)_{jD_{\pi c}}, \\ 0, & \text{при } (\cdot)_{ijc} \neq (\cdot)_{jD_{\pi c}}, \end{cases} \quad q_{ij\Pi} = \begin{cases} 1, & \text{при } (\cdot)_{ij\Pi} = (\cdot)_{jD_{\pi\Pi}}, \\ 0, & \text{при } (\cdot)_{ij\Pi} \neq (\cdot)_{jD_{\pi\Pi}}, \end{cases}$$

РП запишется в виде

$$\Theta_{ij}|_{D_*} = \max_{\pi} \left(\sum_{\ell}^3 q_{ij\ell} + \sum_{s}^3 q_{ij_s} \right) \rightarrow X_{ij} \in D_* \quad (5.1a)$$

где 3 – число наборов троек параметров ℓ и S.

Выбирают пять диагнозов с наибольшими значениями Θ . Если диагнозов с $\Sigma = 6$ будет больше пяти, то обращают внимание на совпадение параметров у i -го проверяемого с одноименными параметрами крови в кластерах выбранных диагнозов внутри каждой тройки. При этом преимущество имеет диагноз, у которого имеются совпадения внутри троек.

5.1.2. Этот вариант метода использует идею присутствия одноименных параметров в их конкретных наборах, извлекаемых из ранжированных рядов параметров крови проверяемого человека и кластеров пациентов с разными диагнозами.

На первом шаге выясняют: при сравнении все ли одноименные параметры присутствуют в ранжированных рядах проверяемого человека и соответствующих кластеров с различными диагнозами в правой половине ранжированных рядов, начиная с номера $(m_{e(s)} + 1)/2$ до $m_e(m_s)$, если m_e и m_s – нечетные числа, или с номера $(m_{e(s)}/2) + 1$, если m_e и m_s – четные (нас интересуют параметры с наибольшей динамикой (см. III.2), находящиеся в правой половине ранжированных рядов). Если хотя бы один параметр отсутствует в кластерах с какими-то L' диагнозами, то эти диагнозы исключают из рассмотрения.

На втором шаге берут наборы параметров с числами, на единицу меньшими предыдущих и т.д. до совпадения последнего номера параметра $m_e(m_s)$ и также сравнивают присутствие одноименных параметров в указанных наборах ранжированных рядов проверяемого человека и кластеров с оставшимися диагнозами.

Таких наборов – Ω параметров будет, соответственно, $\Omega_e = \frac{m_e + 1}{2}$ и $\Omega_s = \frac{m_s + 1}{2}$, если m_e и m_s – нечетные числа или $\Omega_e = \frac{m_e}{2}$ и $\Omega_s = \frac{m_s}{2}$, если m_e и m_s четные.

Последний набор «сходится» к одному параметру, замыкающему ряд справа. Правило счета присутствий одноименных параметров в ε -м наборе параметров,

$$q_{ij\varepsilon} = \begin{cases} 1, & \text{если все параметры в кластере } \pi\text{-го диагноза присутствуют в } \varepsilon\text{-м наборе} \\ & \text{ранжированных параметров проверяемого человека,} \\ 0, & \text{если хотя бы один параметр в данном } \varepsilon\text{-м наборе отсутствует;} \end{cases}$$

$$\varepsilon = 1, 2, \dots, \Omega$$

РП запишется в виде

$$W_{ij} |_{D_*} = \max_{\pi} \left(\sum_{\varepsilon=1}^{\Omega_e} q_{ij\varepsilon} + \sum_{\varepsilon=1}^{\Omega_s} q_{ijs\varepsilon} \right) \rightarrow X_{ij} \in D_* \quad (5.16)$$

$$0 < W_{ij} |_{D_*} \leq \Omega_l + \Omega_s$$

Нетрудно видеть, что оба варианта качественно-количественного метода значительно «поглощают» неопределенность, связанную со случайной расстановкой параметров в ранжированном ряде проверяемого человека, поскольку измеряемые значения параметров – случайные величины, причем случайная составляющая превалирует. Дело в том, что номера одноименных параметров в заданных наборах ранжированных рядов проверяемого человека и предполагаемого диагноза не обязательно должны совпадать при предварительном РП (5.1а и 5.1б).

Совпадение номеров одноименных параметров в каждом из наборов следует учитывать только при равенстве максимальных значений $W = \Omega_e + \Omega_s$ у нескольких диагнозов. В этом случае надо применять другие РП.

Примечание к методу

Если при проведении статистических исследований по определению динамики ПК и М при диагнозах К и \bar{K} окажутся различными соотношения чисел m_ℓ , m_s и m_0 и их наименования, где m_0 – число ПК и М, изменяющихся за

доклинический период менее чем на 2 %, то диагнозы К можно будет установить, не прибегая к методам первой проверки, по следующим РП

$$\begin{aligned} \text{Если} \quad & \frac{m_{\ell_{jK}}}{m} \neq \frac{m_{\ell_{j\bar{K}}}}{m} \wedge \frac{m_{S_{jK}}}{m} \neq \frac{m_{S_{j\bar{K}}}}{m} \\ \text{и} \quad & \frac{m_{\ell_{ij}}}{m} = \frac{m_{\ell_{jK}}}{m} \wedge \frac{m_{S_{ij}}}{m} = \frac{m_{S_{jK}}}{m} \rightarrow X_{ij} \in K. \end{aligned}$$

$$\text{или} \quad (\ell_{ij} \equiv \ell_{j_k}) \wedge (s_{ij} \equiv s_{j_k}) \wedge (0_{ij} \equiv 0_{j_k}) \rightarrow X_{ij} \in K,$$

$$\ell_{ij} \in m_{\ell_k} \quad s_{ij} \in m_{s_k} \quad 0_{ij} \in m_{0_k}, \quad m_\ell + m_s + m_0 = m,$$

где ℓ_{ij} – определенный параметр (его наименование) с возрастающими значениями при ряде проведенных проверок у i -го человека j -го кластера; ℓ_{j_k} – определенный параметр (наименование) вида ℓ у пациентов j -го кластера диагноза К; S_{ij} , S_{j_k} и 0_{ij} , 0_{j_k} – по аналогии.

Совпадение (тождественность) ПК и М в скобках справедливо, если все параметры ℓ , S и 0 у проверяемого человека и у пациентов с диагнозами К совпадают. Этот вариант метода является разновидностью метода п. II.5.

V.2. Обобщение метода координат, некоторые дополнения и уточнения

5.2.1. Обобщение метода координат

Группировкой по два ФС можно добиться большего числа сочетаний (каждой пары) векторов ФС. Действительно, при числе ФС – ν -будем иметь $\Omega = C_\nu^2$ сочетаний векторов ФС (если $\nu = 4$, то $\Omega = C_4^2 = 6$).

Таким образом, в методе координат каждое γ -ое сочетание векторов $\Phi C_{q'}$ и $\Phi C_{q''}$ при их сложении будет иметь вид

$$\Phi C_\gamma = \alpha \Phi C_{q'} + \beta \Phi C_{q''},$$

где

$$\gamma = \overline{1, \Omega}; \quad \alpha \text{ и } \beta - \text{орты}; \quad q = \overline{1, \nu}, \quad q' \neq q''$$

При этом условная вероятность принадлежности ij -го проверяемого по γ -му сочетанию векторов к диагнозу D_π вычисляется аналогично (3.20) главы III

$$P(\Phi C_\gamma / D_\pi) = (M_{jD_\pi} / \sum_{\pi=1}^5 M_{jD_\pi})_\gamma.$$

Вероятность $P(\Phi C_\gamma / D_\pi)$ можно вычислить и через двумерную плотность распределения (см. (3.22) главы III). Если вместо окружности радиуса r взять квадрат с центром в той же точке A_{ij} и со стороной $-a$, такой, чтобы внутри этого квадрата оказались точки с пятью-шестью разными диагнозами, удовлетворяющими условиям:

$$\left| \Phi C_{1ij} - \Phi C_{1j\pi} \right| \leq \frac{a}{2} \quad \text{и} \quad \left| \Phi C_{2ij} - \Phi C_{2j\pi} \right| \leq \frac{a}{2},$$

то вероятность попадания в этот квадрат результирующего вектора ΦC_γ , его двумерного распределения при D_π -м диагнозе

$$\begin{aligned} P[(\Phi C_\gamma / D_\pi) \in S] &= P \left[\left(\Phi C_{1ij} - \frac{a}{2} \leq \Phi C_{1\gamma} \leq \Phi C_{1ij} + \frac{a}{2} \wedge \Phi C_{2ij} - \frac{a}{2} \leq \Phi C_{2\gamma} \leq \Phi C_{2ij} + \frac{a}{2} \right) / D_\pi \right] = \\ &= \iint_S f_\gamma(\Phi C_1, \Phi C_2 / D_\pi) d\Phi C_1 d\Phi C_2 = \int_{\Phi C_{1ij} - \frac{a}{2}}^{\Phi C_{1ij} + \frac{a}{2}} f(\Phi C_1 / D_\pi) d\Phi C_1 \times \int_{\Phi C_{2ij} - \frac{a}{2}}^{\Phi C_{2ij} + \frac{a}{2}} f(\Phi C_2 / D_\pi) d\Phi C_2 \end{aligned}$$

Пределы интегрирования «привязаны» к результирующему вектору ΦC_{ij} i -го проверяемого человека j -го кластера.

По всем Ω сочетаниям векторов вероятностная дискриминантная функция для π -го диагноза

$$\varphi_{D_\pi} = P(D_\pi) \prod_{\gamma=1}^{\Omega} f(\Phi C_\gamma / D_\pi) \quad (5.2)$$

Апостериорная вероятность диагноза D_π по всем Ω в случае φ_{D_π} , определенной по (5.2), в соответствии с формулой Байеса

$$P(D_\pi / \Phi C) = \frac{P(D_\pi) \prod_{\gamma=1}^{\Omega} f(\Phi C_\gamma / D_\pi)}{\sum_{\pi=1}^L P(D_\pi) \prod_{\gamma=1}^{\Omega} f(\Phi C_\gamma / D_\pi)} \quad (5.2б)$$

$$\sum_{\pi=1}^L P(D_\pi / \Phi C) = 1 \quad \text{и} \quad \text{условие нормирования} \quad \sum_{\pi=1}^L P(D_\pi) = 1.$$

В п. 3.4.3 принято допущение, что в круг радиуса r попадут только пять диагнозов. Практически в этом круге может оказаться еще несколько диагнозов, но со значительно меньшей вероятностью. Это общее число

диагнозов, попавших в круг, – $L_{\Pi} \subset L_1$. Попадание пяти н.в.д. в этот круг образует группу несовместных событий, а из L_1 диагнозов – полную группу несовместных событий. Вероятность попадания остальных $L - L_1$ диагнозов равна нулю, т.е.

$$P\left(\bigcup_{\pi=1}^5 D_{\pi}\right) = \sum_{\pi=1}^5 P_*(D_{\pi}); \quad P\left(\bigcup_{\pi=1}^{L_1} D_{\pi}\right) = 1; \quad P_*(D_{\pi}) \neq P(D_{\pi})$$

Тогда вероятность события

$$P\left(\bigcup_{\pi=1}^5 D_{\pi}\right) = \sum_{\pi=1}^5 P_*(D_{\pi}) = \frac{\sum_{\pi=1}^{N=5} M_{j\pi}}{\sum_{\pi=1}^{L_1} M_{j\pi}} \quad (5.3)$$

Но суммарный коэффициент надежности распознавания – E_{Σ} (см.(4.1) и (4.10)) так же, как указывалось выше, сходен с вероятностью события $\bigcup_{\pi=1}^5 D_{\pi}$, где $N = \overline{1,5}$ – номера первых пяти н.в.д. Таким образом, отношение (5.3) является аналогом E_{Σ} . Т.е. имеет место сходство или подобие двух отношений

$$E_{\Sigma} = \sum_{\pi=1}^{N=5} \text{ОДО}_{\pi} / \sum_{\pi=1}^{L_1} \text{ОДО}_{\pi} \approx \sum_{\pi=1}^{N=5} M_{jD_{\pi}} / \sum_{\pi=1}^{L_1} M_{jD_{\pi}}; \quad \sum_{\pi=1}^{L_1} E_{\pi} = 1,$$

где « \approx » – знак подобия.

Если $E_{\Sigma} < 0,96$, то инструментальную проверку пяти диагнозов откладывают до следующей ε -проверки.

Распространяя коэффициент E_{Σ} на все Ω сочетаний векторов состояний, получим

$$E_{\Sigma} = \sum_{\pi=1}^{N=5} \sum_{\gamma=1}^{\Omega} M_{j\pi\gamma} / \sum_{\pi=1}^{L_1} \sum_{\gamma=1}^{\Omega} M_{j\pi\gamma}$$

И тогда можно записать подобие коэффициента E_{Σ} в виде

$$E_{\Sigma} = \frac{\sum_{\pi=1}^N \text{ОДО}_{\pi}}{\sum_{\pi=1}^{L_1} \text{ОДО}_{\pi}} \approx \frac{\sum_{\pi=1}^N \sum_{\gamma=1}^{\Omega} M_{j\pi\gamma}}{\sum_{\pi=1}^{L_1} \sum_{\gamma=1}^{\Omega} M_{j\pi\gamma}}. \quad (5.36)$$

Все пять н.в.д., что очень важно, не конкурируют между собой, а находятся как бы в «одной обойме». Альтернатива появляется только при

назначении инструментального диагностирования, когда надо выбрать последовательность проверки диагнозов с целью сокращения затрат.

При каждой ε -проверке проверяется значение E_{Σ} по (5.3б) и если оно окажется $\geq 0,96$, проверки прекращают и проводят инструментальное диагностирование.

Однако, памятуя о предположении (см. (П. 1.0) Приложения 1 главы III), при котором большая часть диагнозов из пяти н.в.д. при каждой из проверок не будет повторяться, можно предложить в рамках метода координат упрощенный метод выбора пяти н.в.д., основанный на большинстве повторений того или иного диагноза во всех образованных пятерках диагнозов.

Если удастся уговорить участвующего в скрининге человека сдавать при каждой проверке по три анализа крови в течение 10+12 дней, то число образовавшихся пятерок н.в.д. составит: $3 \cdot \Omega \cdot n$, где n – число возможных проверок.

В связи со случайностью, стохастичностью выбора пяти н.в.д. в круг или сферу радиуса r включают по 6 диагнозов, 6 н.в.д. при каждом сочетании ФС, при каждой проверке и при каждом из трех измерений. Эти диагнозы, точнее, их местоположение, будет изображаться в этом варианте метода координат концами результирующих векторов при каждом q -м сочетании из двух или трех ФС. Таким образом, число диагнозов во всех шестерках с учетом их повторений

$$W = 6 \cdot \Omega \cdot 3 \cdot n = 18\Omega n, \text{ где } 3\Omega n \text{ – число шестерок;}$$

$$\text{если } \Omega = C_4^2 = 6, \text{ а } n = 3, \text{ то } W = 324.$$

Из этих 324-х диагнозов с повторениями выбирают 5 н.в.д., имеющих наибольшие числа повторений. Расставляются диагнозы по ранговой цепочке предпочтения (4.5) в соответствии с условиями

$$\max \Pi_{D_1} > \Pi_{\max-1} |_{D_2} > \dots > \Pi_{\max-4} |_{D_5},$$

где Π_{D_π} – число повторений каждого из 5-ти н.в.д.; $D_1 = D_{II}$, так что имеет место равенство

$$\sum_{\pi=1}^6 \Pi_{D_{\pi \max-\pi+1}} + L'_0 = W = 324,$$

где $\max \Pi_{D_i} = 54$, а L'_0 – число единичных, неповторяющихся диагнозов, которых мы относим к "нулевым" диагнозам (см. п. IV.3).

При ε возможных проверках можно предложить следующие правила установления истинного диагноза ($D_{и}$)

$$\max \frac{M_{jD_*}}{\sum_{\pi=1}^5 M_{D_{\pi}}} |_{\varepsilon=1} < \max \frac{M_{jD_*}}{\sum_{\pi=1}^5 M_{D_{\pi}}} |_{\varepsilon=2} < \max \frac{M_{jD_*}}{\sum_{\pi=1}^5 M_{D_{\pi}}} |_{\varepsilon=3} \rightarrow X_{ij} \in D_* \equiv D_{и} \quad (5.4)$$

5.2.2. Метод координат и ВМП

В главе I было показано, что применение ВМП с введенной ВММБ лучше выделяет $D_{и}$ как при n -ой, так и особенно при последующих ε -проверках по сравнению с отдельным использованием вероятностного и метрического подходов. Выведем РП установления $D_{и}$ в методе координат при ВМП.

При записи ОДО в форме максимума, если в числителе формулы (1.5) с учетом (1.4) вместо плотности вероятности записать саму вероятность, то в методе координат с двумерным вектором ФС, для одной из пар ФС ($\gamma = 1$), – ОДО будет представлено в виде

$$\text{ОДО}_{i|\pi} = P(D_{\pi}) \cdot P(\text{ФС}_i/D_{\pi}) / |\text{ФС}_i - \text{ФС}_{\pi}| = P(D_{\pi}) \cdot U(\text{ФС}_i/D_{\pi}),$$

где ФС_i и ФС_{π} – векторы состояний; $\pi \in L$.

Статистические центры – ФС_{π} («центры тяжести») диагнозов зафиксированы на «координатном поле» (см. рис. 5). Возможно, что не все центры тяжести¹ $\Omega = 5 \div 6$ -ти диагнозов окажутся внутри круга радиуса r . С каждой ε -проверкой, после обнаружения \bar{G} , перемещается лишь т. $A_i(\text{ФС}_{1_i}, \text{ФС}_{2_i})$ и соответственно меняется местоположение круга радиуса r с центром в т. A'_i . Число точек (пациентов) с диагнозом $D_{и}$ при $n + 1$ -ой проверке, согласно 3-го принципа, будет не меньше, чем при n -ой. При этом число

¹ Необходимо напомнить, что речь идет не о центрах тяжести самих диагнозов, а о центрах кластеров с этими диагнозами. Диагноз с индексом « π » вводится вместо кластера с диагнозом π с целью сокращения обозначений. Для каждого j -го кластера с состоянием \bar{G}_0 (см. ф-лу (3.2) и ее обозначения и рис. 4.1, левую ветвь), –будут свои центры L диагнозов с координатами $\text{ФС}_{1_{j\pi}}$ и $\text{ФС}_{2_{j\pi}}$.

диагнозов Ω' со своими пациентами, оказавшимися внутри круга, может быть не равно Ω , а наименование этих диагнозов, за исключением D_{II} , так же могут не совпасть (см. неравенство (П.1.0) Приложения 1 главы I).

Расстояние ρ между векторами ΦC_i и ΦC_π при n -ой проверке

$$\rho_n = |\Phi C_{ij,n} - \Phi C_{j\pi}| = \left[\left(\Phi C_{1ij,n} - \Phi C_{1j\pi} \right)^2 + \left(\Phi C_{2ij,n} - \Phi C_{2j\pi} \right)^2 \right]^{1/2} < r,$$

где координаты центров тяжести диагнозов определяются:

$$\Phi C_{1j\pi} = \sum_{i'=1}^{M_j} \Phi C_{1i'j,\pi} / M_j; \quad \Phi C_{2j\pi} = \sum_{i'=1}^{M_j} \Phi C_{2i'j,\pi} / M_j,$$

M_j – число пациентов в j -м кластере любого диагноза одинаково;

$\Phi C_{1i'j,\pi}$ и $\Phi C_{2i'j,\pi}$ – координаты вектора ΦC i' -го пациента j -го кластера с

π -м диагнозом.

$P(\Phi C_i/D_\pi)_n$ определяется по ф-ле (3.20). Подставляя ρ_n и $P(\Phi C_i/D_\pi)_n$ в приведенную выше ф-лу ОДО, получим при n -ой проверке

$$\text{ОДО}_{ij\pi,n} = P(D_\pi)U(\Phi C_{ij}/D_\pi)_n = P(D_\pi) \frac{M_{j\pi,n}^{(r)}}{\sum_{\pi=1}^{\Omega} M_{j\pi,n}^{(r)}} \cdot \frac{1}{\rho_n}, \quad (5.5a)$$

где $M_{j\pi,n}^{(r)}$ – число пациентов j -го кластера π -го диагноза внутри круга радиуса r при n -ой проверке; $\varepsilon = 0$; $M_{j\pi,n}^{(r)} < M_{j\pi} = M_j$.

Выражение ОДО при этом же π -м диагнозе, но уже при $n + 1$ -ой проверке ($\varepsilon = 1$) при условии, что в круг радиуса r с центром в т. A'_i попадет часть пациентов с этим диагнозом

$$\text{ОДО}_{ij\pi,n+1} = P(D_\pi)U(\Phi C_{ij}/D_\pi)_{n+1} = P(D_\pi) \frac{M_{j\pi,n+1}^{(r)}}{\sum_{\pi=1}^{\Omega'} M_{j\pi,n+1}^{(r)}} \cdot \frac{1}{\rho_{n+1}}, \quad (5.5б)$$

$M_{j\pi,n}^{(r)} \neq M_{j\pi,n+1}^{(r)}$ и $M_{j\pi,n+1}^{(r)} < M_j$.

Поделив выражение (5.5б) на (5.5а), получим не что иное, как динамическое отношение ВММБ

$$R_{ij\pi} = \frac{U(\Phi C_{ij}/D_\pi)_{n+1}}{U(\Phi C_{ij}/D_\pi)_n} = \frac{M_{j\pi,n+1}^{(r)}}{M_{j\pi,n}^{(r)}} \cdot \frac{\sum_{\pi=1}^{\Omega} M_{j\pi,n}^{(r)}}{\sum_{\pi=1}^{\Omega'} M_{j\pi,n+1}^{(r)}} \cdot \frac{\rho_n}{\rho_{n+1}}$$

Откуда D_{IIj} должен иметь согласно (1.35) максимальное значение $R_{ij\pi}$.

Записывая это высказывание в форме РП, получим аналог (1.40)

$$R_{ij|D_*} = \max_{\substack{\pi \in \Omega \\ \pi \in \Omega'}} \frac{M_{j\pi, n+1}^{(r)}}{M_{j\pi, n}^{(r)}} \cdot \frac{\sum_{\pi=1}^{\Omega} M_{j\pi, n}^{(r)}}{\sum_{\pi=1}^{\Omega'} M_{j\pi, n+1}^{(r)}} \cdot \frac{\rho_n}{\rho_{n+1}} \rightarrow X_{ij} \in D_* \equiv D_{II} \quad (5.5B)$$

Подтверждающими условиями установления D_{II} по РП (5.5B) будут $R_{ij|D_{II, n}} \leq R_{ij|D_{II, n+\varepsilon}}$, где $\varepsilon = 1, \dots, 4 \vee 5$ и $\gamma = \frac{R_{ij|D_{II}}}{R_{ij|D_2}} > \gamma_{II} > 1$ (см. условие (1.43)).

Если же $\gamma \leq \gamma_{II}$, то инструментальным диагностированием проверяют оба диагноза, начиная с предполагаемого D_{II} .

5.2.3. Некоторые дополнения и уточнения

1. В методе координат, в соответствии с первым принципом следствия второй гипотезы, в качестве векторов, направляемых по осям координат X и Y , можно выбрать три сочетания по два вектора из трех предложенных ФС q , например, см. п. 1.7: ФС $_l$, ФС $_s$ и $\text{tg}\varphi/c$ (в этом случае, в ранжированных последовательностях, ПК и М проверяемого человека и пациентов с L диагнозами следует расположить в соответствии с наименованиями параметров в ранжированной последовательности опорного диагноза) и три комбинации по два из трех ФС q : $R_{\delta/x}$, R_{II} и R_{II} , согласно второго принципа следствия второй гипотезы. Тогда условие выбора D_{II}

$$Kr|D_{II} = \left\{ \begin{array}{l} \max_{\pi \in \Theta} \left[P(D_{\pi}) \sum_{\varepsilon_1=1}^3 P(\Phi C_{\varepsilon_1 ij} / D_{\pi}) \right] \\ \max_{\pi \in \Theta} \left[P(D_{\pi}) \sum_{\varepsilon_2=1}^3 P(\Phi C_{\varepsilon_2 ij} / D_{\pi}) \right] \end{array} \right\} \rightarrow X_{ij} \in D_{II},$$

где $P(\Phi C_{\varepsilon ij} / D_{\pi})$ определяется по (3.20); ΦC_{ε_1} и ΦC_{ε_2} – результирующие ε -ые векторы, образуемые сложением векторов – состояний ΦCq и $\Phi Cq'$, предложенных, исходя из указанных выше двух принципов, $\varepsilon_{1,2} = \overline{1,3}$; $q \neq q'$; $\Theta \geq 5$.

2. Для корректного сопоставления разнородных, по применяемым ФС, расстояний – ρ , при различных D_{π} , слагаемые в (3.41) и в $\rho_{\Sigma 2}^2$ в методе

координат (2) главы III, следует записать в относительных величинах и нормировать, например, в методе координат (2)

$$\rho_{\Sigma 2}^2 = \sum_{\mu=1}^3 \left[\left(\frac{R_{\mu i} - R_{\mu D\pi}}{R_{\mu D\pi}} \right)^2 \right] + \sum_{\varepsilon=1}^m \left[\left(\frac{N_{\varepsilon i} - N_{\varepsilon D\pi}}{N_{\varepsilon D\pi}} \right)^2 \right].$$

Здесь $\varepsilon = \overline{1, m}$ – параметр вида l или s .

V.3. О прелиминарном и истинном диагнозах в свете периодических проверок

Предположение о том, что $D^* \equiv D_{\pi}$, усиливается, если в цепочке неравенств (3.30) или (3.35) главы III при второй проверке диагнозы-соседи будут другими, т.е. $D_{c11} \neq D_{c12}$, $D_{c21} \neq D_{c22}$ и $D_{c31} \neq D_{c32}$. При этом это предположение о прелиминарном диагнозе D^* становится очевидным, если соблюдается условие (3.19) главы III или $\max n_{D_1^*} < \max n_{D_2^*}$. Обобщая эти условия на случай более 2-х проверок ($\psi \geq 2$), можно записать РП постановки конкретного диагноза D^*

$$\rho_{\Sigma | D^*} = \left. \begin{array}{l} \min_{\pi} \sum_{\varepsilon=1}^{\psi} \rho_{\varepsilon D\pi} \wedge \min S_{1D^*} > \min S_{2D^*} > \dots > \min S_{\psi D^*} \\ \max n_{D_1^*} < \max n_{D_2^*} < \dots < \max n_{D_{\psi}^*} \end{array} \right\} \rightarrow X_{ij} \in D^* \quad (5.6)$$

$$\text{или } \min ODO_{D_1^*} > \min ODO_{D_2^*} > \dots > \min ODO_{D_{\psi}^*} \rightarrow X_{ij} \in D^*$$

$$\text{либо } \max ODO_{D_1^*} < \max ODO_{D_2^*} < \dots < \max ODO_{D_{\psi}^*} \rightarrow X_{ij} \in D^* \quad (5.7)$$

При этом должно соблюдаться еще и условие

$$\rho_{\psi D_c} - \rho_{\psi D^*} > \rho_{1D_c} - \rho_{1D^*}, \quad \psi \geq 2,$$

где D_c – ближайший (по значениям ρ) диагноз-сосед.

Последнее условие и РП следует применять, если разность $\rho_{1D_c} - \rho_{1D^*}$ мала и достоверно выделить прелиминарный диагноз при первой или даже второй проверке невозможно.

Если надежность выбора первых пяти диагнозов в (3.40) $E|_{N=5} < E_0$, то постановку диагноза (инструментальный выбор из 5-ти) откладывают до следующей, второй или даже ψ -й проверки, когда четче проявится «дрейф»

состояния проверяемого к его истинному диагнозу и будет выполнено условие $E|N = s \geq E_0$. Этот дрейф, помимо (5.6) ÷ (5.7), можно выразить, применяя формулу Байеса и информационную меру Кульбака (МК) [28]. В РП записывают разности МК, полученных при последующих проверках и первой.

Байесово условие дрейфа к диагнозу D_1

$$P(D_1|\Phi C_q)_1 < P(D_1|\Phi C_q)_2 < \dots < P(D_1|\Phi C_q)_\Psi \rightarrow X_{ij} \in D_1, \quad (5.8)$$

где $P(D_1|\Phi C_q)_\Psi$ определяется по ф-ле Байеса, а при ВМП по ф-ле (1.6).

В качестве функции плотности распределений принимаем также $f(\text{СМС}_{ij}/D_\pi)$ или $\prod_{q=1}^v f(\Phi C_{iq}|D_\pi)$, а при неодномодальных распределениях следует использовать формулу Байеса (3.26) главы III.

В цепочке неравенств (5.8) при нескольких ФС апостериорная вероятность диагноза при периодических проверках может быть вычислена по формуле (5.2б), а при ВМП по ф-ле (5.16).

Мера Кульбака при первой проверке и сравнении 1-го и 2-го диагнозов

$$MK_1^{1,2} = \log[P(D_1|\Phi C_q)/P(D_2|\Phi C_q)]_1 - \log[P(D_1)/P(D_2)]_0. \quad (5.9)$$

При Ψ -й проверке и сравнении этих же диагнозов ($\Psi=2,3,\dots(\Psi \leq 6)$)

$$MK_\Psi^{1,2} = \log[P(D_1|\Phi C_q)/P(D_2|\Phi C_q)]_\Psi - \log[P(D_1)/P(D_2)]_0. \quad (5.10)$$

При сравнении первого диагноза с 3-м и 4-м, при МК и в знаменателях (5.9) и (5.10) будут меняться номера диагнозов: 3 и 4 вместо 2 и D_3 и D_4 вместо D_2 .

Вычитая из (5.10) (5.9), получим разность

$$\Delta MK_{\Psi,1}^{1,2} = \log[P(D_1|\Phi C_q)/P(D_2|\Phi C_q)]_\Psi - \log[P(D_1|\Phi C_q)/P(D_2|\Phi C_q)]_1. \quad (5.11)$$

Разность (5.11) не зависит от априорной вероятности сравниваемых диагнозов. Это свойство было обнаружено в главе I при выводе РП (1.40).

Дрейф к D_1 при использовании МК запишется в виде РП

$$\left. \begin{aligned} \Delta MK_{2,1}^{1,2} < \Delta MK_{3,1}^{1,2} < \dots < \Delta MK_{\Psi,1}^{1,2} \\ \Delta MK_{2,1}^{1,3} < \Delta MK_{3,1}^{1,3} < \dots < \Delta MK_{\Psi,1}^{1,3} \\ \Delta MK_{2,1}^{1,4} < \Delta MK_{3,1}^{1,4} < \dots < \Delta MK_{\Psi,1}^{1,4} \end{aligned} \right\} \rightarrow X_{ij} \in D_1 \quad (5.116)$$

V.4. К вопросу половой принадлежности проверяемого и его группы крови.

В обобщенной формуле Байеса, формулах (3.32) и (3.33) главы III, в знаменателях формул (3.39) для определения ОДО, при объединенном вероятностно-метрическом подходе к распознаванию, не были учтены два признака: биохимическая особенность крови – её группа (всего таких групп–4) и половая принадлежность – δ проверяемого и пациентов в кластерах ($\delta = 1,2$). Между тем, следует предположить, что условные вероятности встречаемости μ -й группы крови у женщин и мужчин при разных диагнозах различны.

В зависимости от пола проверяемого и его группы крови в указанных формулах следует вместо априорной вероятности $-P(D\pi)$ указывать вероятность совместного появления событий: $D\pi, \mu$ и δ

$$P(D\pi_{\mu\delta}) = P(D\pi) \cdot P(\mu|D\pi) \cdot P(\delta|D\pi_{\mu}). \quad (5.12)$$

Если обозначить цифрой 1 – женский пол, то для женщин и мужчин

$$P(D\pi_{\mu 1}) = P(D\pi) \cdot P(\mu|D\pi) \cdot P(1|D\pi_{\mu})$$

$$P(D\pi_{\mu 2}) = P(D\pi) \cdot P(\mu|D\pi) \cdot [1 - P(1|D\pi_{\mu})].$$

Условные вероятности

$$P(\mu|D\pi) = N_{\mu}D\pi / \sum_{\mu=1}^4 N_{\mu}D\pi, \quad \mu = \overline{1,4}; \quad \pi = \overline{1,L}, \quad \sum_{\mu=1}^4 P(\mu|D\pi) = 1,$$

$$P(\delta|D\pi_{\mu}) = N_{\delta\mu}D\pi / N_{\mu}D\pi, \quad \delta = 1,2; \quad \sum_{\delta=1}^2 P(\delta|D\pi_{\mu}) = 1,$$

где $N_{\mu}D\pi$ – число пациентов с μ -й группой крови и π -м диагнозом; $N_{\delta\mu}D\pi$ – число пациентов δ -го пола с μ -й группой крови и π -м диагнозом. При различии хотя бы одного из признаков: δ, μ или $D\pi, N_{\delta\mu}D\pi$ будет разным.

Например, подставляя (5.12) в правую часть неравенства (3.33) главы III, получим

$$\frac{f(\text{СМС}_{ij} / X3_{\rho})}{f(\text{СМС}_{ij} / K_k)} > \frac{P(K_k)}{P(X3_{\rho})} \cdot \frac{P(\mu|K_k)}{P(\mu|X3_{\rho})} \cdot \frac{P(\delta|K_k\mu)}{P(\delta|X3_{\rho}\mu)} \rightarrow X_{ij} \in X3_{\rho}.$$

Обобщенная формула Байеса при подстановке в формулу (3.26) главы III будет иметь вид (5.13)

$$P(D_{\text{вп}}/\xi_{l(s)j}) = \frac{P(D_{\pi})P(\mu|D_{\pi}) \cdot P(\delta|D_{\pi\mu}) \prod_{l=1}^{m_l} (P_{lgj}|\xi_{l_{ij}}/D_{\pi}) \cdot \prod_{s=1}^{m_s} (P_{sg'j}|\xi_{s_{ij}}/D_{\pi})}{\sum_{\pi=1}^L P(D_{\pi})P(\mu|D_{\pi}) \cdot P(\delta|D_{\pi\mu}) \prod_{l=1}^{m_l} (P_{lgj}|\xi_{l_{ij}}/D_{\pi}) \cdot \prod_{s=1}^{m_s} (P_{sg'j}|\xi_{s_{ij}}/D_{\pi})}, \quad (5.13)$$

V.5. Решающие правила при периодических проверках

Поскольку в ходе скрининга состояние человека оценивается или устанавливается при его периодических проверках, каждая из которых может иметь по три измерения, три значения ПК и М, то все РП с учетом этих проверок, а при выявлении нездорового состояния – ε -проверок, будут более сложной конструкции, например, РП (3.13) главы III запишется

$$\rho_{N_{\Sigma}} = \min_{\bar{G}} \left(\sum_{\psi=1}^{\varepsilon} \sum_{\gamma=1}^3 \sum_{l=1}^{m_e} |N_{ij\psi\gamma} - \bar{N}_{ljK(X3)}| + \sum_{\psi=1}^{\varepsilon} \sum_{\gamma=1}^3 \sum_{S=1}^{m_s} |N_{Sij\psi\gamma} - \bar{N}_{SjK(X3)}| \right) \rightarrow Xij \in K \vee X3, \quad (5.14)$$

где $\varepsilon \leq 4 \vee 5$; $\gamma = 1, 2, 3$ – порядковый номер измерения ПК и М при ψ -й проверке.

РП (3.17) запишется в виде

$$\left. \begin{aligned} \rho_{tg\varphi} &= \min_{\bar{G}} \left(\frac{1}{3\varepsilon} \sum_{\psi=1}^{\varepsilon} \sum_{\gamma=1}^3 \left| \frac{tg\varphi_{ij\psi\gamma}}{C_{ij\psi\gamma}} \Big|_{K(\bar{K})} - \frac{tg\varphi_{jK(\bar{K})}}{C_{jK(\bar{K})}} \right| \right) \\ S &= \min_{\bar{G}} \frac{1}{3\varepsilon} \sum_{\psi=1}^{\varepsilon} \sum_{\gamma=1}^3 A_{ij\psi\gamma} \Big|_{K(\bar{K})} \leq \max A_{ij} \Big|_{K(\bar{K})} \end{aligned} \right\} \rightarrow Xij \in K \vee \bar{K} \quad (5.146)$$

Формула (3.31) главы III при описании состояния проверяемого примет вид

$$CMC_{ij\psi} = \frac{1}{3\varepsilon} \sum_{\psi=1}^{\varepsilon} \sum_{\gamma=1}^3 \left(\prod_{q=1}^{\nu} \Phi C_{ijq\psi\gamma} \right)^{1/\nu},$$

а среднегеометрическое мультипликативное расстояние

$$\rho_0 = CMP = \frac{1}{3\varepsilon} \sum_{\psi=1}^{\varepsilon} \sum_{\gamma=1}^3 \left(\prod_{q=1}^{\nu} |\Phi C_{ijq\psi\gamma} - \overline{\Phi C}_{jqD_{\pi}}| \right)^{1/\nu} \quad (5.14B)$$

РП (4.7) примет вид

$$C_{D_*} = \max_{\pi \in L_1} \sum_{\psi=1}^{\varepsilon} \sum_{\gamma=1}^3 \left[\sum_{S=1}^5 (a+1-S) \sum_{q=1}^{\nu} n_{D_{\pi\psi\gamma S q}} \right] \rightarrow Xij \in D_* \equiv D_{\Pi} \quad (5.15)$$

Обобщенная вероятностная дискриминантная функция (ОВДФ) (5.2) может быть представлена

$$\varphi_{D\pi} = P(D\pi) \sum_{\psi=1}^{\varepsilon} \sum_{\gamma=1}^3 \prod_{q=1}^{\nu} f(\Phi C_{ijq\psi\gamma} / D_{\pi}),$$

а в методе координат, основанном на втором принципе, ОВДФ в отличие от формулы (3.23) главы III приобретет вид

$$\max_{\pi} P(D\pi) \sum_{\psi=1}^{\varepsilon} \sum_{\gamma=1}^3 \prod_{\mu=1}^3 f(\Phi C_{ij\mu\psi\gamma} / D_{\pi}).$$

Соответствующим образом преобразуется и модифицированная формула Байеса, она будет выглядеть в записи РП следующим образом

$$E_{\Sigma} \cong P(D\pi / \Phi C) |_{D_*} = \max_{\pi} \frac{P(D\pi) \sum_{\psi=1}^{\varepsilon} \sum_{\gamma=1}^3 \prod_{q=1}^{\nu} U(\Phi C_{ijq\psi\gamma} / D_{\pi})}{\sum_{\pi=1}^{L_1} P(D\pi) \sum_{\psi=1}^{\varepsilon} \sum_{\gamma=1}^3 \prod_{q=1}^{\nu} U(\Phi C_{ijq\psi\gamma} / D_{\pi})} \rightarrow X_{ij} \in D_*, \quad (5.16)$$

где U – ВММБ (см. п. I.1).

Приведенные выше обобщающие РП еще более приближают к 1 вероятность нахождения истинного диагноза среди пяти н.в.д.

Эти формулы и РП при сравнении состояния проверяемого человека с различными диагнозами гасят случайность и нестабильность при измерениях ПК и М. Например, совместно с РП (5.1а, б) РП (5.14) значительно "поглощают" неопределенность, связанную со случайной нумерацией параметров при ранжировании по их значениям.

В заключение приведем еще одно РП, входящее в структуру предложенного вероятностно-метрического подхода, отличающееся от остальных РП тем, что предназначено для лучшего варианта возможных статистических условий или ситуации при различении диагнозов. Дело в том, что самый худший случай для распознавания диагноза у проверяемого человека - это когда все диагнозы K и \bar{K} имеют один и тот же закон распределения, например, нормальный, с близкими значениями дисперсий или любой другой, несимметричный с одинаковой асимметрией. И, наоборот, диагнозы K и \bar{K} легче отличить друг от друга, когда они имеют разные законы распределения с разной асимметрией, а также дискретные и полимодальные распределения с разным числом мод.

В случае разных законов распределения плотностей вероятностей, взяв за "опорные" характеристики распределения и моду (M_0) и медиану (Me) в виде среднего значения $\overline{\Phi C}_q$,

$$\overline{\Phi C}_{qjD\pi} \Big|_{M_0, Me} = \frac{\Phi C_{qjD\pi} \Big|_{M_0} + \Phi C_{qjD\pi} \Big|_{Me}}{2},$$

РП можно представить, например, следующим образом через ОДО

$$\text{ОДО} \Big|_{D_*} = \max_{\pi} \sum_{\psi=1}^{\varepsilon} \sum_{\gamma=1}^3 \prod_{q=1}^{\nu} \frac{P(D\pi) f(\Phi C_{ijq\psi\gamma} / D\pi)}{(\Phi C_{ijq\psi\gamma} - \overline{\Phi C}_{jqD\pi} \Big|_{M_0, Me})^2} \rightarrow X_{ij} \in D_*,$$

При этом, в такой записи, следует ввести ограничение: для одного обобщенного показателя, каким является ΦC , будут, как правило, унимодальные непрерывные распределения плотности вероятности этого показателя.

V.6. Рекомендации по применению решающих правил при разделении раковых и нераковых диагнозов

При выборе пяти н.в.д. из L_c рекомендуется применять РП(4.7), (5.15) с ранговой цепочкой предпочтения, используя формулу (5.29), (см. п.V.8)

$$D_1 \Big|_{\max C_D} \succ D_2 \Big|_{C_D \max -1} \succ \dots \succ D_5 \Big|_{C_D \max -4}.$$

Это обобщенное "матрично-балловое" РП (5.15) базируется на критерии максимума коэффициента надежности распознавания – Е или максимума ОДО (см. (4.1), (4.2)). В этом случае при периодических проверках дрейф в виде приближения состояния проверяемого к прелиминарному и возможно истинному диагнозу должен проявляться при выполнении условия

$$\max C_1 \Big|_{D_{II}} < \max C_2 \Big|_{D_{II}} < \dots < \max C_{\varepsilon} \Big|_{D_{II}} \rightarrow X_{ij} \in D_{II}, \quad (5.17)$$

где $C_{D_{II}}$ определяется по формуле (4.6); 1,2,... ε – номера проверок.

Подчеркивая значимость периодических проверок при скрининге и положений третьего принципа, следует добавить неравенство

$$\max C_{\varepsilon} \Big|_{D_{II}} - \max C_{\varepsilon-1} \Big|_{D_{II}} > \max C_{\varepsilon-1} \Big|_{D_{II}} - \max C_{\varepsilon-2} \Big|_{D_{II}} \quad (5.18)$$

При РП (5.15) выбор прелиминарного диагноза из пяти н.в.д. предложено проводить исходя из условия

$$\max_{\psi=1}^{\varepsilon} C_{\psi} |_{D_{\pi}} > \sum_{\psi=1}^{\varepsilon} C_{\psi} |_{D_{2, \max-1}} > \dots > \sum_{\psi=1}^{\varepsilon} C_{\psi} |_{D_{s, \max-4}}. \quad (5.19)$$

Условие (5.18) приближения к истинному диагнозу является более эффективным, чем условие (5.17), а условие (5.19) эффективнее (4.6б).

РП (4.7) и его улучшенный вариант – РП (5.15) наилучшим образом упорядочивает диагнозы в ранговой цепочке предпочтения пяти н.в.д., где первый (прелиминарный) диагноз имеет большую вероятность быть истинным, чем остальные четыре и медикам при инструментальном диагностировании (блок 4 на рис. 4.1 и 4.2) с меньшей вероятностью придется проверять все пять н.в.д. Блок 1, включающий эти вычислительные процедуры, является основным вычислительным блоком в схеме алгоритма скрининга с установлением истинного диагноза.

Решающие правила и формулы, приведенные в п. V.5, составляющие ОДО, рекомендовано применять в случае, если при первой ε -проверке или при второй значение $E_{\Sigma} < 0,96$, а также при уточнении прелиминарного диагноза в случае его неочевидности при первой проверке.

Для инструментальной медицинской диагностики на завершающем этапе установления $D_{\text{и}}$ рекомендовано предложить медикам и несколько (2 ÷ 4), по «мнению компьютера», ложных конкурирующих диагнозов из группы Ω н.в.д.

Однако, если при $n_{\bar{G}}$ -й проверке по РП (5.16) $E_{\Sigma} \geq 0,96$, то при установлении $D_{\text{и}}$ после проведения первой ε -проверки следует использовать РП (1.40), которое будет иметь вид

$$R_i |_{D_*} = \max_{\pi \in \Omega} \frac{\prod_{q=1}^{\nu} \sum_{\gamma=1}^3 U(\Phi C_{iq\gamma} / D_{\pi})_{n+1}}{\prod_{q=1}^{\nu} \sum_{\gamma=1}^3 U(\Phi C_{iq\gamma} / D_{\pi})_n} \rightarrow X_i \in D_* \equiv D_{\text{и}},$$

где R_i – динамическое отношение ВММБ (см. п. 1.5.3).

Если инструментальное диагностирование не подтверждает, что маловероятно, истинность этого диагноза, то проверяют второй соседний диагноз из группы н.в.д. цепочки неравенств (5.19) или цепочки

$$\max R |_{D_{\text{и}}} > R_{\max-1} |_{D_2} > R_{\max-2} |_{D_3}, \quad (5.19б)$$

где $D_{\text{и}} > D_2 > D_3$.

Медики в этом случае могут и не проверять инструментально второй диагноз, а провести ещё одну ε -проверку с целью окончательного установления D_{ii} по РП (1.40) и его подтверждения условиями (1.41) или (1.43) и инструментальной проверкой.

V.7. Дальнейшие исследования

Под дальнейшими исследованиями понимается математическая диагностика уже в ходе установившегося скрининга, когда большинство людей участвуют в нем, периодически сдавая анализы на проверку, и когда накоплен уже необходимый объем информации по результатам этих анализов.

Эти исследования связаны с изучением динамики ПК и М при каждом из L выбранных диагнозов. Динамика ПК и М оценивается коэффициентами ν и α степенной аппроксимирующей функции [24]. Статистическая информация собирается уже в ходе скрининга на выборках заболевших людей с верифицированными диагнозами (обучение также проводится с «учителем»). При этом вся ретроспективная статистика оказывается ненужной.

Доминирующим показателем, характеризующим изменение ПК и М при том или ином диагнозе, является показатель степени $-\alpha$. Об этом уже было указано в [34] и в Приложении I главы III.

В работах [24] и [36] при диагностировании и прогнозе состояний технических объектов рассматривалась динамика выходного параметра партии или выборки одноименных однотипных изделий. При этом случайной величиной является показатель скорости ν изменения параметра, а показатель α считался неслучайной величиной. Заметим, что партия одноименных однотипных изделий подобна кластеру пациентов с каким-то одним диагнозом.

При диагностировании состояния человека мы сознательно усложняем процесс распознавания и считаем показатель степени $-\alpha$ так же случайной величиной. Но поскольку коэффициент α характеризует динамику состояния любого человека в кластере при том или ином диагнозе в отличие от показателя скорости $-\nu$, различного для каждого человека в этом кластере, то

коэффициент α будет зависеть от характера развития того или иного диагноза и слабо зависеть от состояния (гомеостаза) конкретного человека в кластере. Поэтому дисперсия α в кластере должна быть незначительной в отличие от ν . В связи с этим изложенные ниже методы разделения диагнозов K и \bar{K} представлены только с использованием коэффициента α . Эти методы основаны на первом и третьем принципах. Отметим, что показатели ν и α применялись в Приложении 2, п.4 главы III для отличия здорового и нездорового состояний.

Оценки ν и α получают МНК при аппроксимации степенной функцией статистических данных за ψ проверок ($\psi = 5 \div 6$). После вычисления значений $\bar{\alpha}_{l\pi}$, $\bar{\alpha}_{s\pi}$ и α_{lij} , α_{sij} запишем РП подобно (3.13) главы III в виде

$$\Delta\alpha|_{D_{II}} = \min_{\pi \in L_1} \left(\sum_{l=1}^{m_l} |\alpha_{lij} - \bar{\alpha}_{lj\pi}| + \sum_{s=1}^{m_s} |\alpha_{sij} - \bar{\alpha}_{sj\pi}| \right) \rightarrow X_{ij} \in D_{II}. \quad (5.20)$$

Нетрудно видеть, что РП (5.20) «устойчивее» к случайной расстановке сравниваемых показателей, чем РП (3.13), так как построено на оценке показателя α МНК.

Далее строят распределения случайных величин α_l и α_s для j -х кластеров с каждым диагнозом и получают РП, в котором, согласно ВМП, выражение РП (5.20) окажется в знаменателе ОДО. Это РП приведено ниже.

Следует заметить, что ранжировки, как элементы нечисловой статистики [38], выполненные с применением аппроксимации и МНК, хотя и вбирают в себя имевшие место случайности, но в то же время гасят их и делают заметнее различия между самими ранжировками параметров проверяемых однотипных объектов (или людей) с разными состояниями (диагнозами), в результате чего эти различия становятся более очевидными.

Это предложение является своего рода прологом важного следствия первого принципа распознавания состояний. Сформулируем это следствие в общем виде для различных деградиционных процессов, в т.ч. заболеваний человека.

Следствие первого принципа

При изменении значений параметров объектов, с развитием того или иного деградационного, деструктивного процесса, ранжировки параметров по характеру изменения их значений будут близки к инвариантным у одноименных, однотипных объектов (или пациентов одного кластера), подверженных одному и тому же деструктивному процессу (или имеющих одно и то же заболевание), т.е. с одним и тем же диагнозом, и отличны от подобных ранжировок параметров у этих объектов с другим деструктивным процессом (состоянием или диагнозом).

В связи с этим следствием РП (5.20) можно трансформировать в РП, похожее на (3.13), но гораздо более устойчивое к случайным отклонениям, ранжировав параметры не по их значениям, а по характеру их изменения (коэффициенту α). Тогда это РП будет

$$\rho|_{D_*} = \min_{\pi \in L_1} \left(\sum_{l=1}^{m_l} |l_{ij} - l_{j\pi}|_{\alpha} + \sum_{S=1}^{m_S} |S_{ij} - S_{j\pi}|_{\alpha} \right) \rightarrow X_{ij} \in D_*, \quad (5.20a)$$

где l_{ij} , $l_{j\pi}$, S_{ij} , $S_{j\pi}$ – положение одноименных параметров вида l и S или их нумерация в ранжированных по коэффициенту α рядах.

В соответствии с приведенным следствием, если состояние i -го объекта принадлежит диагнозу D_* , то практически все одноименные параметры в ранжированных рядах у диагностируемого объекта и группы однотипных объектов с верифицированным диагнозом D_* должны совпадать. Т.е. в идеальном случае $\min \rho|_{D_*} = 0$.

В бинарном варианте РП может быть записано, как

$$\rho|_{D_*} \min_{\pi \in L_1} \left(\sum_{l=1}^{m_l} n_{l\pi} |_{\alpha} + \sum_{S=1}^{m_S} n_{S\pi} |_{\alpha} \right) \rightarrow X_{ij} \in D_*, \quad (5.20б)$$

$$\text{где } n_{l\pi} = \begin{cases} 0, & \text{если } l_{ij}|_{\alpha} = l_{j\pi}|_{\alpha} \\ 1, & \text{если } l_{ij}|_{\alpha} \neq l_{j\pi}|_{\alpha} \end{cases}, \quad n_{S\pi} = \begin{cases} 0, & \text{если } S_{ij}|_{\alpha} = S_{j\pi}|_{\alpha} \\ 1, & \text{если } S_{ij}|_{\alpha} \neq S_{j\pi}|_{\alpha} \end{cases}$$

В случае полной (абсолютной) инвариантности ранжировок по α параметров каждого из однотипных объектов с диагнозом D_{π} и ранжировок по

α усредненных значений параметров в кластере с диагнозом D_π – РП (5.20б) будет даже предпочтительней РП (5.20а).

РП (5.20а) более устойчиво к случайным изменениям параметров, чем РП (3.13) и даже РП (5.20), так как основано на их ранжировках по вычисленным МНК значениям показателя α степенной аппроксимирующей функции динамики параметров. Аппроксимация, как уже было отмечено, приводит к усреднению и нивелированию значительной части случайной составляющей, образующейся при помехах, воздействии случайных внутренних и внешних факторов, в результате чего ранжировка параметров диагностируемого объекта по показателю α будет близка к детерминированной. Поэтому в смысле устойчивости РП (5.20а) лучше, чем перечисленные выше. Отсюда и разрешающая способность диагностирования (только по метрической мере близости) также окажется выше. Однако РП (5.20) по сравнению с РП (5.20а) удобно для записи более общего РП в форме вероятностно-метрической меры близости, т.е. в форме ОДО, о чем было замечено выше. Действительно, представляя РП в форме ОДО с учетом (5.20), получим

$$ОДО_\alpha |_{D_\pi} = \max_{\pi \in L_1} \frac{\prod_{l=1}^{m_l} f(\alpha_{lij} / D_\pi) \cdot \prod_{S=1}^{m_s} f(\alpha_{Sij} / D_\pi)}{\sum_{l=1}^{m_l} |\alpha_{lij} - \overline{\alpha_{lij}}| + \sum_{S=1}^{m_s} |\alpha_{Sij} - \overline{\alpha_{Sij}}|} \rightarrow X_{ij} \in D_\pi \quad (5.21)$$

Метод двойной аппроксимации

1. После первой аппроксимации полученных данных о средних значениях ПК и М и вычислении МНК оценок $v_{l\pi}$, $v_{S\pi}$ и $\alpha_{l\pi}$, $\alpha_{S\pi}$ проводят ранжирование $\alpha_{l\pi}$ и $\alpha_{S\pi}$ по их значениям для всех L диагнозов. Таким образом, для диагноза D_π имеем следующие ряды неравенств (ранжированные ряды)

$$\alpha_{1\pi} < \alpha_{2\pi} < \dots < \alpha_{l_m\pi}$$

$$\alpha_{S_1\pi} < \alpha_{S_2\pi} < \dots < \alpha_{S_m\pi}.$$

2. Проводят вторую аппроксимацию уже показателей α_l и α_S .

Если значения α_{lij} и α_{Sij} проверяемого человека ($l = \overline{1, m_l}; S = \overline{1, m_s}$) так же, как и в методе 3.4.2. каждый раз записывать (расставлять) в

последовательности, соответствующей ранжированной последовательности α_l и α_s каждого диагноза, то полученные последовательности окажутся не ранжированными для всех диагнозов, кроме диагноза, к которому принадлежит состояние проверяемого. В этом случае последовательности α_l и α_s будут близки к ранжированным.

Последовательности $\alpha_l(l)$ и $\alpha_s(s)(l_{ij} \neq l_{j\pi}$ и $S_{ij} \neq S_{j\pi})$ аппроксимируем теперь уже линейной зависимостью, подобно тому, как это сделано в п. 3.4.2 и аналогично (3.17) получаем следующее РП

$$\left. \begin{aligned} \rho_{D\pi} &= \min_{\pi \in L_1} \left(\left| \frac{tg\varphi_{\alpha_l}}{C_l} ij\pi - \frac{\overline{tg\varphi_{\alpha_l}}}{C_l} j\pi \right| + \left| \frac{tg\varphi_{\alpha_s}}{C_s} ij\pi - \frac{\overline{tg\varphi_{\alpha_s}}}{C_s} j\pi \right| \right) \\ S_{D\pi} &= \min_{\pi \in L} \left[\sum_{l=1}^{m_l} (\hat{\alpha}_{lij} - \alpha_{lij})_{\pi}^2 + \sum_{s=1}^{m_s} (\hat{\alpha}_{sij} - \alpha_{sij})_{\pi}^2 \right] \end{aligned} \right\} \rightarrow X_{ij} \in D_{\Pi}, \quad (5.22)$$

где $\hat{\alpha}_{lij}$ и $\hat{\alpha}_{sij}$ – линейризованные значения.

3. Обозначив $\frac{tg\varphi_{\alpha_l}}{C_{\alpha_l}} ij\pi = r_{lij}$ и $\frac{tg\varphi_{\alpha_s}}{C_{\alpha_s}} ij\pi = r_{sij}$, строят гистограммы и функции

плотности вероятности этих величин, полагая при малой дисперсии и малом интервале распределений эти плотности распределений одномодальными.

4. Составляют РП в форме ОДО

$$ОДО_r |_{D_{\Pi}} = \max_{\pi \in L_1} \frac{f(r_{lij} / D_{\pi}) * f(r_{sij} / D_{\pi})}{|r_{lij\pi} - \bar{r}_{lij\pi}| + |r_{sij\pi} - \bar{r}_{sij\pi}|} \rightarrow X_{ij} \in D_{\Pi}. \quad (5.23)$$

Следует заметить, что РП (5.22) самодостаточно и распознает диагнозы K и \bar{K} без его усиления через ОДО или коэффициент E_N .

Понятно, что если r_{lij} или r_{sij} попадают в интервалы распределений этих величин только при одном диагнозе (истинном), то числитель в РП (5.23), согласно (3.25) главы III, будет ненулевым только при этом диагнозе.

Обратим внимание на возможность применения здесь ОКО.

Поскольку ОКО гасит случайные отклонения измеряемых значений ПК и М от их математических ожиданий, то при его использовании в этом методе значительно повысится вероятность правильного распознавания диагнозов (об

этом уже было сказано в главе III при выводе формулы ОКО (3.4). Оставшиеся случайные ошибки нивелируются (сглаживаются) в результате аппроксимации МНК. Применяя аугментированное ОКО (см. формулу (3.12) или формулу (3.14) главы III), после аппроксимации ОКО(t) или ОКО(Ψ) степенной функцией и получении оценки коэффициента $\alpha_{ОКОj\pi}$, запишем РП в форме ОДО

$$ОДО\alpha_{ОКО} |_{D_{\Pi}} = \max_{\pi \in L_1} \frac{f(\alpha_{ОКОij} / D_{\pi})}{|\alpha_{ОКОij} - \bar{\alpha}_{ОКОj\pi}|} \rightarrow X_{ij} \in D_{\Pi}, \quad (5.23б)$$

где число диагнозов – L определяют, в зависимости от возрастной группы проверяемого человека, по формуле (4.19а) или (4.19б).

В этом варианте метода коэффициент $\alpha_{ОКОj\pi}$ также «устойчив» в каждом j -м кластере с определенным диагнозом и имеет малую дисперсию.

Условие подтверждения прелиминарного диагноза – D_{Π} (5.23в) можно получить, если аппроксимацию $ОКО(\psi_1)$ и $ОКО(\psi_2)$ провести дважды: за $\omega_1 = 4$ и $\omega_2 = 5$ проверок¹, где $\psi_1 = 1, 2, \dots, 4$, а $\psi_2 = 1, 2, \dots, 5$.

$$\left(\max_{\pi \in L_1} ОДО\alpha_{ОКО} |_{D_{\Pi}} \right)_{\omega_1} < \left(\max_{\pi \in L_1} ОДО\alpha_{ОКО} |_{D_{\Pi}} \right)_{\omega_2} \rightarrow X_{ij} \in D_{\Pi} \quad (5.23в)$$

Остальные четыре н.в.д. выбирают из условия

$$(ОДО\alpha_{ОКО})_{\max-1|_{D_2}} > (ОДО\alpha_{ОКО})_{\max-2|_{D_3}} > \dots > (ОДО\alpha_{ОКО})_{\max-4|_{D_5}}; \text{ здесь } D_1 \equiv D_{\Pi}.$$

Заметим, что в записи РП: (5.21), (5.23) и (5.23б) в числителях отсутствуют априорные вероятности диагнозов. Их отсутствие анализируется в п. V.8.

И в рамках этого метода, проведя ϵ -проверку ($\epsilon = 1$), можно установить истинный диагноз по РП, аналогичному (1.40). В обозначениях этого раздела D_{Π} определится так

$$R_{ij}|_{D_*} = \max_{\pi \in \Omega} \frac{U(\alpha_{ОКОij}/D_{\pi})_{n+1}}{U(\alpha_{ОКОij}/D_{\pi})_n} \rightarrow X_{ij} \in D_* \equiv D_{\Pi},$$

где $\Omega < L_1$ – получено из неравенств цепочки (5.19) или (5.28).

¹ Эти проверки проведены до и в момент обнаружения \bar{G} -состояния. Из них четвертая или пятая ω -проверка может быть $n_{\bar{G}}$ -й.

Метод двойной аппроксимации, дважды использующий МНК, значительно гасит случайности («нейтрализует» случайные отклонения) и уменьшает дисперсию ФС или в данном случае - показателя α и показателя r_α .

Поскольку дисперсия α мала, то «коридоры» или области существования каждого из диагнозов по этому показателю будут узкими и, следовательно, вероятности их пересечения окажутся незначительными, и прелиминарный диагноз проверяемого человека можно будет поставить сразу (при нулевой вероятности пересечения) или выделить два, три н.в.д., из которых один обязательно окажется истинным.

V.8. Некоторые аналитические выводы

При использовании указанных выше РП следует заметить, что основная ошибка в распознавании состояний, выявлении раковых диагнозов по косвенным параметрам, какими являются ПК и М, будет исходить из того факта, что априорная вероятность K -диагнозов по сравнению с наиболее распространенными ХЗ мала, что может увеличить вероятность пропуска цели (K -диагноза) при вероятностном подходе, а если эти априорные вероятности не включать в вероятностные дискриминантные функции, как это имеет место в методе максимального правдоподобия, то произойдет увеличение вероятности ложной тревоги (присутствие априорных вероятностей, еще раз подчеркнем, может увеличить вероятность пропуска цели).

Методы п. III.4 и п. V.1 с их РП, не учитывающие априорные вероятности диагнозов, могут увеличить вероятность ложной тревоги, когда имеет место геометрическая близость по выбранному ФС проверяемого человека к ФС кластера с K -диагнозом и мы ложно ставим этот диагноз, не учитывая, что \bar{K} -диагноз, имеющий меньшую геометрическую близость, обладает гораздо большей априорной вероятностью появления.

Следует, однако, заметить, что методы п. III.4 и п. V.1 нельзя назвать чисто детерминистскими, так как они в некоторой степени нивелируют случайные отклонения. Скорее всего, эти методы – вероятностно-

детерминистские, ибо содержат как стохастические признаки, учитывающие случайную природу процесса диагностирования человека по ПК и М, так и метрические признаки в форме расстояний (методы п. III.3 и п. III.4). Эти методы учитывают случайности, связанные с нестабильностью ПК и М, что выражается в аппроксимации полученных при измерениях случайных значений ПК и М (см. п. 3.4.2 и V.7) и "гашении" случайностей на множестве параметров (п. 3.4.1, V.7 и п. V.1).

Метод координат (п. 3.4.3 и п. V.2) в явном виде содержит вероятности. Этот метод учитывает состояние каждого из пациентов какого-либо кластера по расположению точки, конца результирующего вектора ФС в 2-х или 3-х мерном пространстве.

В отличие от известных метрических методов детерминистского подхода, в которых области диагнозов обычно считают непересекающимися, методы указанных разделов предполагают пересечение областей диагнозов.

Байесовый вероятностный подход приводит к увеличению β редких (к сожалению сейчас не таких редких) диагнозов, какими являются K -диагнозы, когда отношения правдоподобия говорят в пользу K -диагноза и этот диагноз – правильный, а принимается решение в пользу \bar{K} -диагноза по наибольшему значению вероятностной дискриминантной функции.

Таким образом, можно сделать следующий вывод, долгое время остававшийся в тени математических рассуждений: детерминистские или метрические методы распознавания при неспецифичных параметрах(признаках) и сильно пересекающихся областях диагнозов, - увеличивают вероятность ложной тревоги, а вероятностные методы, основанные на байесовом подходе, - увеличивают вероятность пропуска цели, т.е. в том и другом случаях приводят к увеличению ошибок первого и второго рода при распознавании состояний.

Методами предложенного нового (ВМП) подхода, с введением ОДО, достигается "разумный компромисс" между детерминистскими и вероятностными методами и в некоторой степени уменьшаются ошибки

первого и второго рода. Но главное – схема, конструкция ОДО позволяет повысить разрешающую способность в распознавании состояний.

Априорные вероятности наиболее распространенных раковых локализаций в первой и второй возрастных категориях будут примерно равны априорным вероятностям ХЗ в этих группах, особенно у людей до 45-ти лет. Но в третьей возрастной категории априорные вероятности К-диагнозов будут значительно меньше априорных вероятностей \bar{K} -диагнозов и в этом случае даже при новом подходе, с введением коэффициента E_N и E_{Σ} на основе ОДО, возникают некоторые сложности, связанные с соотношениями априорных вероятностей, условных вероятностей или плотностей распределений ФС при том или ином диагнозе и мер близости по различным расстояниям – ρ , предложенным в п. III.4, и находящимся в знаменателе ОДО при его записи в форме максимума.

В формализованном и упрощенном виде это связано с рассмотрением соотношений составных частей ОДО при K и \bar{K} -диагнозах. Приведем указанные соотношения ОДО \bar{K} и K -диагнозов.

$$\frac{ОДО_{ij}(D_{\bar{K}})}{ОДО_{ij}(D_K)} = \frac{P(D_{\bar{K}})}{P(D_K)} \cdot \frac{f(\Phi C_{ij} / D_{\bar{K}})}{f(\Phi C_{ij} / D_K)} \cdot \frac{\rho_{ij}(K)}{\rho_{ij}(\bar{K})} = \frac{P(D_{\bar{K}})}{P(D_K)} \cdot \frac{f(\Phi C_{ij} / D_{\bar{K}})}{\rho_{ij}(\bar{K})} \cdot \frac{\rho_{ij}(K)}{f(\Phi C_{ij} / D_K)}$$

Обозначим $\frac{f(\Phi C_{ij} / D_{\bar{K}})}{\rho_{ij}(\bar{K})} = U_{\bar{K}}$, а $\frac{f(\Phi C_{ij} / D_K)}{\rho_{ij}(K)} = U_K$, где U_K и $U_{\bar{K}}$ – ВММБ K -го

и \bar{K} -го диагнозов, и рассмотрим отношения:

$$\frac{P(D_{\bar{K}})}{P(D_K)} \quad (1) \text{ и } \frac{f(\Phi C_{ij} / D_K)}{\rho_{ij}(K)} / \frac{f(\Phi C_{ij} / D_{\bar{K}})}{\rho_{ij}(\bar{K})} = \frac{U_K}{U_{\bar{K}}} \quad (2)$$

Отношения U_K и $U_{\bar{K}}$, как следует из главной теоремы распознавания (глава I, п. 1.5.3), являются определяющими в распознавании. Они показывают фактическое состояние проверяемого по отношению к тому или иному диагнозу, к которому оно может принадлежать.

Если $P(D_{\bar{K}}) > P(D_K)$, а $f(\Phi C_{ij} / D_{\bar{K}}) < f(\Phi C_{ij} / D_K)$ и $\rho_{ij}(K) < \rho_{ij}(\bar{K})$,

то отношение (1) в некоторой степени "уравновешивается" отношением

(2), т.е. они оказываются соизмеримыми и если будет выполнено условие

$$\frac{\rho_{ij}(\bar{K})}{\rho_{ij}(K)} \cdot \frac{f(\Phi C_{ij}/D_K)}{f(\Phi C_{ij}/D_{\bar{K}})} \geq \frac{P(D_{\bar{K}})}{P(D_K)} > 1, \quad (5.24)$$

то обеспечивается достоверное установление истинного диагноза. Но если

$$\frac{P(D_{\bar{K}})}{P(D_K)} \gg \frac{\rho_{ij}(\bar{K})}{\rho_{ij}(K)} \cdot \frac{f(\Phi C_{ij}/D_K)}{f(\Phi C_{ij}/D_{\bar{K}})} > 1, \quad (5.25)$$

то правильное распознавание диагноза становится проблематичным и в этом случае в $P(D_{\bar{K}})$ необходимо ввести поправочный, корректирующий коэффициент, из статистики верных постановок диагнозов, уменьшающий эту вероятность.

В условиях (5.24) и (5.25) следует брать наибольшие значения $P(D_{\bar{K}})$ и $P(D_K)$ среди 2 ÷ 5 н.в.д., выданных компьютером.

На обучающих выборках надо проанализировать: какой процент К-диагнозов с неравенствами (5.25) оказались поставленными правильно или какова при этом вероятность правильной постановки К-диагноза когда отношение в правой части (5.25) говорит в пользу К-диагноза. Допустим эта вероятность – $P_{п.п.} = \Theta$, который и будет поправочным коэффициентом; $0 < \Theta < 1$. Коэффициент Θ зависит от \bar{K} -диагноза, точнее – от значения его априорной вероятности: чем больше априорная вероятность, тем больше β и коэффициент Θ более отдаляется от 1 и наоборот, чем меньше априорная вероятность, тем Θ ближе к 1 и равен 1 при условии (5.24).

Введение еще одного коэффициента – показателя степени – n отношения $\frac{\rho_{ij}(\bar{K})}{\rho_{ij}(K)}$ еще более делает соизмеримыми левую и правую части неравенства(5.25).

Показатель степени – n можно определить на стадии обучения модели. Как правило, при практических расчетах $n = 1, 2$ или 3.

Например, в третьей возрастной группе, когда априорные вероятности

таких \bar{K} -диагнозов, как: атеросклероз, артроз или остеохондроз, намного выше априорных вероятностей K -диагнозов, – выбор пяти н.в.д. из L_1 должен быть проведен с использованием Θ и n . Для остальных \bar{K} -диагнозов, где упомянутые выше отношения в неравенстве (5.24) соизмеримы, поправочные коэффициенты не нужны. С учетом Θ и n представим в упрощенном виде ОДО для K и \bar{K} -диагнозов

$$ОДО_{ij}(K) = [P(D_K) \cdot f(\Phi C_{ij} / D_K)] / \rho_{ij}^n(K)$$

$$ОДО_{ij}(\bar{K}) = [\Theta \cdot P(D_{\bar{K}}) \cdot f(\Phi C_{ij} / D_{\bar{K}})] / \rho_{ij}^n(\bar{K})$$

Допустим $\rho_{ij} = \rho_0$ (см. формулу (5.14в)).

Если учесть (см. п. V.5) трехкратное измерение ПК и М за одну проверку, то обобщенное ОДО, например, для \bar{K} -диагнозов

$$ОДО_{ij}(\bar{K}) = \sum_{\psi=1}^{\varepsilon} \sum_{\gamma=1}^3 \prod_{q=1}^{\nu} \frac{\Theta \cdot P(D_{\bar{K}}) f(\Phi C_{ijq\psi\gamma} / D_{\bar{K}})}{|\Phi C_{ijq\psi\gamma} - \overline{\Phi C}_{jqD_{\bar{K}}}|^n} \quad (5.26)$$

Для K -диагнозов $ОДО_{ij}(K)$ определяется также по формуле (5.26), только без поправочного коэффициента.

РП постановки предварительного диагноза - D_{II} следующее

$$ОДО(D_*) = \max_{\pi \in L_1} (\cdot) \rightarrow X_{ij} \in D_* \equiv D_{II}, \quad (5.27)$$

где (\cdot) – выражение (5.26)

Условие выбора Ω н.в.д.:

$$\max ОДО |_{D_1} > ОДО \max - 1 |_{D_2} > \dots > ОДО \max - \Omega + 1 |_{D_{\Omega}}, \text{ где } \Omega \subset L_1 \quad (5.28)$$

По РП (5.27) и условию (5.28) выбирают Ω н.в.д. из L_1 диагнозов.

Для выбора пяти н.в.д. из L_1 диагнозов по n_{D_x} (см. формулу (4.3)) и РП (5.15), в формулу (4.2) подставляют ОДО, вычисленные по следующей формуле при $q = 1$

$$ОДО_{ij}(D_{\pi}) = \sum_{\psi=1}^{\varepsilon} \sum_{\gamma=1}^3 \frac{(\Theta(\bar{K})) P(D_{\pi}) f(\Phi C_{ij\psi\gamma} / D_{\pi})}{|\Phi C_{ij\psi\gamma} - \overline{\Phi C}_{jD_{\pi}}|^n}, \quad (5.29)$$

где (\cdot) при $\Theta(\bar{K})$ означают включение Θ или не включение для K -диагнозов. Формула (5.29) в отличие от (5.26) записана для π -го диагноза.

В РП, при его записи в виде критерия максимума ОДО, вероятностная дискриминантная функция в качестве вероятностной меры и метрическая мера близости могут не совпадать при распознавании даже при одном или одних и тех же применяемых ФС, находящихся в числителе и знаменателе ОДО (см. глава I п. I.2).

Эффективность ОДО еще более возрастет, если в числителе и знаменателе ОДО, т.е. в вероятностной и метрической мерах близости, будут фигурировать различные, независимые друг от друга ФС, т.е. $\Phi_{C_{qч}} \neq \Phi_{C_{qз}}$, а общее число ФС $v = v_{ч} + v_{з}$

Теперь, что касается методов п. V.7.

Метод двойной аппроксимации, связанный с показателем степени $-\alpha$, является, пожалуй, наиболее сильным и надежным методом, значительно уменьшающим дисперсию этого показателя или отношения $-r_{\alpha}$, а чем меньше дисперсия, тем больше «ослабляется» вероятностная составляющая в числителе ОДО. При нулевой дисперсии числитель ОДО теряет смысл и используется только его метрическая составляющая(знаменатель).

Допустим, что диагноз К – истинный. Тогда при применении метода двойной аппроксимации, когда дисперсии показателей α и r_{α} малы, будем иметь неравенство, подобное (5.25), но уже с обратным знаком, т.е.

$$\frac{\rho_{ij}(\bar{K}) \cdot f(r_{ij} / D_K) \cdot f(r_{Sij} / D_K)}{\rho_{ij}(K) \cdot f(r_{ij} / D_{\bar{K}}) \cdot f(r_{Sij} / D_{\bar{K}})} \gg \frac{P(D_{\bar{K}})}{P(D_K)} \quad (5.30)$$

и распознавание диагноза возможно без использования априорных вероятностей.

Если методы п. V.7 позволят с вероятностью $P \cong 1$ обеспечить нахождение истинного диагноза в пятерке н.в.д. или даже в меньшем их числе: двух, трех н.в.д., то априорные вероятности диагнозов не следует включать в ОДО, так как они приведут к ошибке второго рода(вероятности пропуска цели – онкологического заболевания), которая окажется выше заданного значения.

Таким образом, в этом случае необходимо проверить выполнение условия (5.30), где так же, как и в неравенствах (5.24) и (5.25), следует брать

наибольшие значения априорных вероятностей \bar{K} и K - диагнозов среди 2-х ÷ 5-ти н.в.д., выданных компьютером. Данное замечание теряет смысл, если среди этих н.в.д. нет K - диагноза.

Приложение к методам п.п. 3.4.1, 3.4.2 и 3.4.3

Можно построить ранжированную последовательность значений ПК и М у самого проверяемого человека, у которого выявлено нездоровое состояние, и пронумеровать эту последовательность числами натурального ряда от 1 до m_l и от 1 до m_s . Тогда для всех диагнозов последовательности средних значений ПК и М в кластерах с этими диагнозами, построенные в соответствии с номерами ПК и М проверяемого человека, окажутся неупорядоченными, неранжированными. Ближе к ранжированной последовательности будут приближаться ПК и М кластера только с тем диагнозом, к которому принадлежит состояние проверяемого.

Формула РП (3.17) п. 3.4.2. в этом случае примет вид

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \min_{\bar{G}} \left| \frac{tg\varphi_{ij}}{C_{ij}} - \frac{tg\varphi_{j_{K(\bar{K})}}}{C_{j_{K(\bar{K})}}|_{ij}} \right| \\ S &= \min_{\bar{G}} A_{j_{K(\bar{K})}|_{ij}} \end{aligned} \right\} \rightarrow X_{ij} \in K \vee \bar{K}, \quad (5.31)$$

где
$$A_{j_{K(\bar{K})}|_{ij}} = \sum_{l(s)=1}^{m_l(s)} (\xi_{l(s)j_{K(\bar{K})}|_{ij}}^H - \xi_{l(s)j_{K(\bar{K})}|_{ij}}^H)^2.$$

Если после проведения трех проверок выполняются условия (достаточные условия правильного распознавания)

$$\left\{ \begin{aligned} \rho_{\psi}|_{D_{II}} &> \rho_{\psi+1}|_{D_{II}} > \rho_{\psi+2}|_{D_{II}}, \\ S_{\psi}|_{D_{II}} &> S_{\psi+1}|_{D_{II}} > S_{\psi+2}|_{D_{II}}, \end{aligned} \right. \quad (5.32)$$

где все ρ и S имеют при диагнозе D_{II} минимальные значения, то состояние проверяемого человека принадлежит диагнозу $-D_{II}$.

В формулу (3.13) п. 3.4.1 необходимо добавить достаточное условие правильного установления истинного диагноза. В окончательном виде РП

постановки диагноза, основанное на первом принципе распознавания состояний, запишется следующим образом:

$$\rho_{N_{(ij-jD_*)}} = \min_{\pi \in L} \left(\sum_{l=1}^{m_l} |N_{l_{ij}} - \bar{N}_{l_{jD\pi}}| + \sum_{s=1}^{m_s} |N_{s_{ij}} - \bar{N}_{s_{jD\pi}}| \right) \rightarrow X_{ij} \in D_*. \quad (5.33)$$

Дополнительно, подобно (5.32), вводится временное, достаточное условие при проведении мониторинга изучаемого процесса

$$\min(\rho_{N_{(ij-jD_*)}})_{n_{\bar{G}}} > \min(\rho_{N_{(ij-jD_*)}})_{n_{\bar{G}+1}} > \min(\rho_{N_{(ij-jD_*)}})_{n_{\bar{G}+2}}, \quad (5.34)$$

где $n_{\bar{G}}$ – номер проверки, при которой выявлено нездоровое состояние или нестабильное состояние любого другого изучаемого процесса.

Условия (5.33) и (5.34) – необходимые и достаточные условия правильного распознавания состояния при ряде периодических проверок (в данном случае – трех проверок), из них – двух ε -проверок.

Выбор пяти н.в.д. осуществляется, исходя из цепочек неравенств при $n_{\bar{G}}$ -й, $\varepsilon = 1$ -й и $\varepsilon = 2$ -й проверках

$$\min_{\pi \in L} \rho_{N_{(ij-jD_*)}} < \rho_{N_{(ij-jD_2)}}^{\min+1} < \dots < \rho_{N_{(ij-jD_5)}}^{\min+4}. \quad (5.35)$$

После проведения трех проверок выписывают в соответствии с условием (5.35) три пятерки н.в.д., выданных компьютером. Для инструментальной проверки выбирают $2 \div 5$ диагнозов, имеющих наибольшее присутствие в этих трех пятерках н.в.д. и сравнивают эти $2 \div 5$ диагнозов с н.в.д., выбранными по РП (4.7) или (5.15), которое является основным для групп 5-ти н.в.д. Интерес представляет сравнение (5.35) и с условием выбора 5-ти н.в.д. по РП (1.40).

В самом худшем случае пересекающихся и перемежающихся K и \bar{K} диагнозов целесообразно применить метод координат в трехмерном пространстве, так как этот метод позволит фиксировать перемещение конца результирующего вектора-состояния заболевшего человека при его 2-х \div 3-х дополнительных ε -проверках и видеть к какому среднему вектору-состояния или вектору-эталону того или иного диагноза все ближе приближается вектор состояния проверяемого. Этот диагноз и будет предварительным. Вместе с ним для инструментальной проверки пяти н.в.д. и установления истинного

выбирают еще четыре диагноза, средние векторы-состояния которых ближе остальных диагнозов расположены к вектору-состояния заболевшего человека.

Приложение ко второму принципу второй гипотезы.

Допустим статистически установлено, что отношения средних значений ОКО (см. п. III.2) в кластерах К и ХЗ диагнозов¹ отличаются и

$$\frac{OKO_{II}(K)}{OKO_{\delta/x}(K)} < \frac{OKO_{II}(X3)}{OKO_{\delta/x}(X3)} \quad (5.36)$$

и

$$\frac{OKO_{II}(K)}{OKO_{II}(K)} < \frac{OKO_{II}(X3)}{OKO_{II}(X3)}, \quad (5.37)$$

где «II», « δ/x » и «II» – соответственно гематологические, биохимические и иммунологические параметры крови;

$$m = m_l + m_s = m_{\delta/x} + m_{II} + m_{II},$$

$$m_{\delta/x} = m_{l\delta/x} + m_{s\delta/x}, \quad m_{II} = m_{lII} + m_{sII}, \quad m_{II} = m_{lII} + m_{sII}.$$

Тогда более сильное неравенство получаем перемножением левых и правых частей неравенств (5.36) и (5.37), а именно:

$$R_1^2(K) = \frac{OKO_{II}^2(K)}{OKO_{\delta/x}(K) \cdot OKO_{II}(K)} < \frac{OKO_{II}^2(X3)}{OKO_{\delta/x}(X3) \cdot OKO_{II}(X3)} = R_1(X3) \quad (5.38)$$

Если бы неравенство (5.36) было с обратным знаком, то усиливающее неравенство образовалось бы делением (5.36) на (5.37), и имело бы вид

$$R_2(K) = \frac{OKO_{II}(K)}{OKO_{\delta/x}(K)} > \frac{OKO_{II}(X3)}{OKO_{\delta/x}(X3)} = R_2(X3) \quad (5.39)$$

Допустим, что справедливо неравенство (5.39) и статистическими исследованиями выявлено пересечение областей трех К и трех ХЗ-диагнозов, где имеет место следующая цепочка неравенств

$$\bar{R}(X3_1) < \bar{R}(X3_2) < \bar{R}(X3_3) < \bar{R}(K_1) < \bar{R}(K_2) < \bar{R}(K_3). \quad (5.40)$$

Указанные диагнозы будут известны: выданы вычислительным блоком 1 на рис. 4.1.

¹ Для К и ДО-диагнозов из статистики составляются подобные отношения ОКО.

² В этом Приложении отношения обозначены буквой «R», не путать с динамическим отношением ВММБ, обозначенным в главе I тоже буквой R.

Из неравенств (5.40) следует, что интервал пересечения K и $X3$ - диагнозов составляет

$$K \cap X3 = \max R(X3_3) - \min R(K_1).$$

Тогда будет справедливо следующее РП

$$\left. \begin{aligned} R_{ij} < \min R(K_1) &\rightarrow X_{ij} \in X3 \\ R_{ij} > \max R(X3_3) &\rightarrow X_{ij} \in K \\ \min R(K_1) \leq R_{ij} \leq \max R(X3_3) &\rightarrow X_{ij} \in X3 \vee K. \end{aligned} \right\} \quad (5.41)$$

В случае первых двух условий РП (5.41) прелиминарный диагноз и еще несколько н.в.д.: либо $X3$ -диагнозы (первое условие), либо K -диагнозы (второе), выбирают по РП и условиям методов, основанных на первом принципе с записью РП через ОДО. При этом прелиминарные диагнозы для первого и второго условий (5.41) устанавливают по РП

$$ОДО_{R|K_*} = \max_{k \in p} \frac{P(K_k) f(R_{ij} / K_k)}{(R_{ij} - \bar{R}_{jK_k})^2} \rightarrow X_{ij} \in K_* \equiv D_{II}$$

$$ОДО_{R|X3_*} = \max_{\rho \in \omega} \frac{P(X3_\rho) f(R_{ij} / X3_\rho)}{(R_{ij} - \bar{R}_{jX3_\rho})^2} \rightarrow X_{ij} \in X3_* \equiv D_{II}$$

или для любого диагноза

$$ОДО_{R|D_*} = \max_{\pi \in L_1} \frac{P(D_\pi) f(R_{ij} / D_\pi)}{(R_{ij} - \bar{R}_{jD_\pi})^2} \rightarrow X_{ij} \in D_* \equiv D_{II}, \quad (5.42)$$

где R определяется из неравенства (5.39):

$$\bar{R}_{jD_\pi} = OKO_{j_{II}}(D_\pi) / OKO_{j_{\delta/x}}(D_\pi); \quad R_{ij} = OKO_{ij_{II}} / OKO_{ij_{\delta/x}}.$$

В общем виде расстояния до $\bar{R}_{jK(X3)}$ могут быть записаны в форме Минковского.

В случае же, если R_{ij} попадает в середину интервала пересечения (третье условие РП (5.41)), то медикам предлагается инструментальным диагностированием проверить все шесть диагнозов или отложить постановку диагноза до следующей проверки, когда определится «движение» R_{ij} в сторону либо K -диагнозов, либо $X3$ -диагнозов.

Выбор пяти н.в.д. проводят по ранговой цепочке предпочтений

$$D_{II} | \max(\cdot) \succ D_2 | (\cdot)_{\max-1} \succ \dots \succ D_5 | (\cdot)_{\max-4},$$

где (\cdot) – отношение, входящее в РП (5.42).

При этом должно быть

$$E_{\Sigma} = \sum_{\pi=1}^{N=5} ODO_{R\pi} / \sum_{\pi=1}^{L_1} ODO_{R\pi} \geq 0,96 \quad (5.43)$$

Если $E_{\Sigma} < 0,96$, то согласно алгоритму скрининга (Рис. 4.1 и 4.2) проводят следующую очередную проверку и если потребуется, то проводят еще одну, две проверки до выполнения условия (5.43).

В случае 2-х; 3-х ε -проверок, значительно повышающих вероятность правильного распознавания, следует использовать РП п.п. V.5 и V.6.

Во всех случаях целесообразно проводить ε -проверку или две ε -проверки и устанавливать D_{II} по РП (1.40) и его усиленным вариантам (см. п.п. V.6 и V.7).

Общее примечание, касающееся внедрения методов в онкологии

Математические методы пока еще слабо внедряются в медицинскую практику. А уж что говорить о тех работах, в положительный результат которых медики не верят заведомо, изначально. Именно так обстоит дело с проблемой ранней диагностики рака по обычным, привычным для всех, анализам крови, где, несмотря на её экономическую привлекательность, пессимизм медиков «зашкаливает». Поэтому трудности при реализации предложенных разработок в онкологическом скрининге очевидны. Большинство онкологов чрезмерно консервативны и очень неохотно принимают участие в новых, пусть даже очень актуальных, но неординарных, тем более математических исследованиях, эффективность которых для них (онкологов) не очевидна. Они предпочитают традиционные, чисто медицинские исследования, близкие и понятные им, например, поиск маркеров антигенов.

Из изложенного выше материала видно, что ранняя диагностика рака по ПК и М – в равной степени как медицинская, так и сложная математическая задача, которую сами медики решить не в состоянии. И поэтому уже более полувека продолжается «эксплуатация» в основном лишь одного био или онкомаркёрного направления диагностики рака, не приносящая заметных побед, а для «запуска» нового направления, связанного с математической

диагностикой, по-видимому, не хватает ни энергии, ни желания. Между тем, в работе [6] установлено, что у больных раком людей «уже в первой стадии наблюдаются достоверные и стереотипные изменения параметров крови в зависимости от размеров опухоли. Работа [7] также выполнена с учетом изменений ПК и М при развитии K и \bar{K} заболеваний. В ряде других медицинских работ, например [35], экспериментально показано, что с ростом раковой опухоли у мышей значения показателей крови тоже заметно изменяются. Но физиология живых организмов – животных и людей, подчиняется единым законам природы. Указанные работы позволяют считать, что выдвинутые в главе I гипотезы, на основе которых предложены методы ранней диагностики рака и решающие правила постановки диагноза, вполне правдоподобны.

Известно, что без скрининга % выявления рака на первой и второй стадиях значительно меньше % его выявления на третьей и четвертой стадиях, а % смертности при последних значительно выше, чем на первых двух. Скрининг по ПК и М с применением предложенного подхода позволит диагностировать рак на первой, начальной стадии или в худшем случае – на второй.

В дальнейшем, с набором статистики, целесообразно оптимизировать межпроверочный период скрининга (периодичность сдачи анализов) здоровых (относительно здоровых) людей и людей из групп риска, построив целевую функцию на основе критерия минимума удельных затрат, подобно тому как это сделано в работе [36] при диагностировании и назначении ремонта технических объектов, но, естественно, с преломлением к диагностике состояний людей, где будут фигурировать другие функции и наборы (составляющие) затрат и другие наборы вероятностей. Однако это уже – другая тема, другая задача исследования, касающаяся экономической стороны проблемы, которую следует решать после внедрения в медицинскую практику предложенных методов ранней диагностики рака по ПК и М.

Борьба с раком касается всех нас от мала до велика. Никто не застрахован от этой пока еще, в большинстве случаев, смертельной болезни. Сейчас необходимо внедрить в сознание медиков необходимость проведения полномасштабных исследований по сбору и обработке данных анализов крови, проведения проверки и реализации предложенных методов, позволяющих, экономя значительные средства, осуществить раннюю диагностику рака.

Только тесное сотрудничество медиков и математиков может повысить эффективность диагностирования [29]. Особенно это касается диагностики рака по ПК и М. Постановка диагноза или ее перенос до следующей проверки – компетенция врачей-диагностов, принимающих решение по установлению (выбору) окончательного диагноза из четырех, максимум – пяти наиболее вероятных, предложенных компьютером по разработанному математиками алгоритму.

В заключение сравним возможности предложенных методов диагностики рака (К) и хронических заболеваний (ХЗ) с существующими методами по указанным ниже критериям. Прежде следует разделить эти методы на визуальные, действующие извне на организм человека посредством физических полей или биохимических реакций, и методы, непосредственно исследующие биоматериал, в данном случае – кровь, т.е. методы, действующие как бы «изнутри» и использующие те или иные характеристики состояния крови.

Методы первой группы назовем экто-визуальными, а второй – энто-диагностическими. В обобщенном виде в каждую группу можно включить следующие независимые друг от друга методы:

1. В первую группу методов и средств диагностики следует отнести:
 - 1.1. – магниторезонансную томографию, 1.2. – тепловизоры, 1.3. – УЗИ, 1.4. – радио-термо-метрические исследования;
2. Во вторую:
 - 2.1. – онкомаркерный метод, 2.2. – физические методы, 2.3. – биологические методы, 2.4. – компьютерный метод направленного перебора(поиска специфичной совокупности показателей крови) и, наконец,

2.5. – предложенные математические методы диагностики по лабораторным анализам крови.

Рентгенодиагностика и радиоизотопный метод не включены в первую группу, так как они не безопасны для здоровья. Таким образом, отпадает необходимость вносить в список критериев безопасность методов.

Критерии сравнения методов диагностики заболеваний при скрининге

1. Приемлемость для скрининга применяемого метода по его экономичности или стоимости.

2. Возможность при отсутствии симптомов диагностировать ранние стадии рака.

3. Возможность без симптомов диагностировать одновременно(в рамках метода) как ранние стадии рака, так и хронические заболевания.

4. Возможность, при отсутствии симптомов, сознательного выбора, по условиям предпочтения, нескольких н.в.д., среди которых находится истинный (н.в.д. имеют касательство к возможным несовместимым заболеваниям двух и более органов).

5. Возможность охвата наибольшего числа диагнозов или возможность метода иметь наибольший набор рассматриваемых диагнозов.

Все методы первой группы, обладая высокой надежностью распознавания при наличии симптомов, жалоб пациентов, имеют два существенных недостатка. Они значительно дороже методов второй группы, но самое главное – они не позволяют осуществить диагностику заболеваний на их ранних, доклинических стадиях, когда отсутствуют симптомы заболеваний: для успешной диагностики в этом случае пришлось бы зондировать весь организм человека, весь его «объем», что еще более удорожало бы обследование и сделало его совершенно неприемлемым для скрининга. При этом методы первой группы оказываются высоконадежными и приемлемыми по стоимости при диагностике лишь одной конкретной локализации рака, но никак не 8-ми ÷ 10-ти наиболее распространенных. Таким образом, при скрининге отпадает необходимость сравнения предложенных методов (2.5) с методами

первой группы, не удовлетворяющими всем критериям, кроме второго, и то с большой оговоркой, делающей по существу невыполнимой диагностику по условию этого критерия. Сравнению подлежат методы только второй группы.

Сразу отметим, что условию критерия №3 полностью отвечают только методы 2.5.

Существенным моментом, повышающим надежность распознавания, является удовлетворение критерию 4. Из второй группы этому критерию соответствуют методы 2.5. Весьма важным для полноты диагностирования является критерий №5, которому так же удовлетворяют только методы 2.5.

Для удобства дальнейшего сравнения по первым трем основным критериям детализируем второй и третий критерий.

6. Возможность без симптомов диагностировать ранние стадии 8-ми ÷ 10-ти наиболее распространенных локализаций рака.

7. Возможность без симптомов отличить К-диагнозы от диагнозов ХЗ.

8. Возможность без симптомов диагностировать ранние стадии каждого из наиболее распространенных ХЗ.

Метод 2.1. удовлетворяет двум критериям: 6 и 7. Но даже если будут найдены онкомаркеры всех 8-ми ÷ 10-ти локализаций рака, этот метод окажется не приемлем для скрининга из-за дороговизны, т.к. придется проводить диагностику по всем 8-ми ÷ 10-ти маркерам. Критерию №3 и, следовательно, №8, метод 2.1. не удовлетворяет.

Методы 2.2 ÷ 2.4 исполняют требования критериев №1 и №7 и отчасти №2. Критерию №3 и, следовательно, критериям №6 и №8 эти методы не удовлетворяют.

Итак, сравнение показало, что только предложенные в работе методы 2.5 удовлетворяют всем указанным выше критериям.

Из изложенного следует, что будущее скрининга на предмет раннего выявления рака и других заболеваний, – возможно и за математическими методами диагностики состояния проверяемых людей по их лабораторным анализам крови. Но для успешного внедрения этих методов в онкологических

клиниках нужен продолжительный, тщательный сбор статистической информации о динамике ПК и М пациентов разных кластеров с различными диагнозами для получения сравнительных оценок их (диагнозов) отличия друг от друга по выбранному комплексу ПК и М. Нужны полномасштабные статистические исследования по этому вопросу.

Параллельно с ПК и М для ранней диагностики рака в будущем, в рамках ВМП, можно применить и другие диагностические параметры.

Практический вывод при медицинской диагностике

Распознать рак в возрасте до 50-ти лет легче, чем в более старшем возрасте. Поэтому скрининг надо начинать в молодом возрасте.

Чем раньше здоровый (относительно здоровый) человек «войдет» в скрининг, тем больше окажется у него накопленных проверок с измеренными за определенный период значениями ПК и М и тем больше будет информации о динамике каждого ПК и М и, следовательно, точнее оценки показателей этой динамики и «устойчивее» средние значения ПК и М при возможном возникновении у этого человека того или иного заболевания, что значительно улучшит разделение диагнозов, при котором первый диагноз (прелиминарный) будет более резко выделен среди пяти выбранных компьютером н.в.д.

Предложенные методы диагностики по комплексу ПК и М позволят медикам, в сочетании с их большим, многолетним практическим опытом, по обычным анализам выявлять ранние стадии рака и своевременно назначать лечение, которое в большинстве случаев приведет к выздоровлению заболевших людей и продлит их жизнь.

Главные выводы

1. Монография представляет собой новые главы общей теории распознавания, в которых учитываются существенные пересечения областей множества состояний (диагнозов-эталонов), а главы III ÷ V кроме того представляют собой теорию медицинской математической диагностики заболеваний по ПК и М, т.е. при наличии неспецифичных параметров (признаков).

2. Принципы, сформулированные в первой главе для технической диагностики и в III ÷ V главах – для медицинской, на основе которых созданы эффективные методы диагностики, – являются своего рода предварительной, текстовой аксиоматикой в изложенной теории распознавания состояний.

Общие и акцентированные выводы

1. Предложены объединенный вероятностно-метрический подход и соответствующие математические методы в новом направлении математической диагностики - распознавании состояний при неспецифичных признаках (параметрах), измеряемые значения которых изменяются с течением времени при развитии какого-либо процесса.

2. Предлагаемые методы математической диагностики, основанные на совместном использовании всех трех приведенных принципов распознавания состояний, позволят значительно повысить вероятность правильной постановки диагноза.

3. Применение ВМП и методов его реализующих исключает использование многомерного статистического анализа, тем более, что он не пригоден для множества существенно пересекающихся областей диагнозов, распределения ФС которых отличны от нормального закона.

4. Показана возможность предложенными в работе решающими правилами ВМП, при 1 ÷ 3-х ε -проверках (проверки после выявления нездорового (неисправного) состояния), надежно диагностировать и прогнозировать те или иные состояния, а в случае медицинской диагностики диагностировать на ранних стадиях различные заболевания, включая и рак.

Акцентированные выводы

1. РП, приведенные в III главе, – промежуточные и служат для быстрого отсеивания очевидных ложных диагнозов сразу после выявления неисправного (нездорового) состояния \bar{G} .

2. РП, основанные на ОДО, т.е. на ВМП распознавания, сужают число рассматриваемых диагнозов и доводят его до Ω н.в.д. < 5 , при этом эта

операция осуществляется в момент выявления \bar{G} состояния. Такими РП являются, например, (4.7) и (5.42).

3. Метод координат с окончательным РП (5.5) и графоаналитический метод вычеркивания ложных диагнозов (п. 1.5.2) главы I – самодостаточны и устанавливают истинный диагноз – Ди без применения основного РП (1.40), однако следует разумно подходить к построению функций состояния (ФС) диагнозов-эталонов и диагностируемого объекта. Две или три ФС должны быть независимыми, не коррелируемыми, основанными не только на первом принципе распознавания с его метрической мерой близости, но и на втором, физиологическом, в случае медицинской диагностики, или физическом, физико-химическом, в случае технической диагностики.

4. РП (1.40), построенное на ВММБ, и метод координат с РП (5.5) позволяют уже при одной (или двух) ε -проверке надежно установить Ди предъявляемого объекта из нескольких н.в.д., а метод вычеркивания ложных диагнозов – через одну ÷ три ε -проверки.

5. Для инструментальной медицинской диагностики рекомендовано оставить медикам для проверки истинного «по мнению компьютера» диагноза 1 ÷ 3 ближайших к нему по условию предпочтения н.в.д. И в этом случае показана возможность с вероятностью $P \approx 1$ установить Ди.

6. РП (1.40) позволит сократить машинное время установления Ди как нездорового человека, так и выявления конкретной неисправности технического или любого другого объекта, так как отпадает необходимость в вычислении апостериорных вероятностей диагнозов и, следовательно, априорных.

7. В приложении главы I показано, что потенциальная функция Айзермана-Бравермана-Розоноэра и отношение правдоподобия являются частными случаями, соответственно, ВММБ и ее отношения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В начале предисловия отмечено, что словосочетание «распознавание образов» можно рассматривать как триединство, точнее, как трихотомию –

разделение на три части: идентификацию, диагностику, включая прогнозирование, и кластеризацию, где в зависимости от поставленных целей и задач на передний план выступают одна или сразу две части. При решении задач, поставленных в данной работе, необходимо объединить последние две.

Следует заметить, что стержнем, объединяющей основой, всех трех составных частей распознавания образов является сравнение, тесным образом связанное с общим процессом познания мира. Сравнение разных однородных образов, видов, классов, состояний, явлений проводят либо между ними, либо с уже известными, заранее выделенными (заданными) образами, видами, классами, с уже заданными эталонными состояниями (диагнозами) тех или иных объектов или процессов. Через сравнение мы отличаем одно от другого или говорим об их сходстве, близости, т.е. различие (отличие) и сходство находятся в неразрывном единстве. С другой стороны сравнение является заключительным актом, этапом перед выводом, который мы делаем, когда принимаем решение о сходстве или различии чего или кого-либо, выборе той или иной модели распознавания, и это сравнение, равно как все элементы нового, вероятностно-метрического подхода (ВМП), лейтмотивом проходит через все главы предлагаемой читателю монографии, где решение (решающее правило) принимается с использованием ВМП и его главного продукта – вероятностно-метрической меры близости.

Автор надеется, что данная монография послужит новому всплеску творческой активности многих специалистов, ранее занимавшихся теорией распознавания образов, но по каким-то причинам оставившим это занятие, пробудит интерес к проблеме распознавания у молодых специалистов, делающих первые шаги в науке. Проблема распознавания образов остается актуальной по сей день, а сама теория распознавания, входящая в математическую кибернетику и включающая классификацию и установление истинных состояний человека и окружающего его мира, как оказалось, ещё находится в состоянии становления и развития.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дарьялова С.Л., Чиссов В.И. Диагностика и лечение злокачественных опухолей. М. Медицина, 1993.
2. Трапезников Н.Н., Шайн А.А. Онкология. М. Медицина, 1992.
3. Новосельцев В.Н. Гомеостаз организма как система управления. Препринт Ин-та проблем управления РАН. М., 1973.
4. Рябых Т.П. и др. Зависимость частоты выявления антител к ММТВ у человека от факторов риска рака молочной железы. – Вопросы онкологии. Научно-практический журнал. Эскулап. С-Пб, 1996, № 2.
5. Кровь - индикатор состояния организма и его систем. Редактор Р.В. Ставицкий. – Москва, МНПИ, 1999.
6. Кшивец О.М. Оптимизация диагностического процесса у больных злокачественными новообразованиями основных локализаций: Диссертация на соискание ученой степени к.м.н. – С-Пб., 1992.
7. Сусликов В.И. Метод вычисления риска заболевания пациента по количественным данным его истории болезни. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, № 47 за 1999.
8. Петрова Г.П., Петрусевич Ю.М., Алексеев С.Г., Иванов А.В. Метод релеевского рассеяния в диагностике онкологических заболеваний. / Сб. научн. трудов «Медицинская физика. М., Физфак МГУ, 2002, с. 156-167.
9. Brawer M.K., Cheli C.D., Neaman I.E., Coldblatt J., ...Complexed prostate specific antigen provides significant enhancement of specificity compared with total prostate specific antigen for detecting prostate cancer./J. Urol. 2000 Nov: 164 (5): 1671-2. NPI. Seattle, Washington, USA.
10. Эмануэль Н.М. и др. Биофизика рака. Изд-во «Наукова думка», Киев. – 1976.
11. Марчук Г.И. Математические модели в иммунологии. Вычислительные методы и эксперименты. М., Наука, 1991.
12. Алгоритмы и программы восстановления зависимостей / под ред. В.Н. Вапника – М., Наука, 1984.
13. Адельсон-Вельский Г.М., Кунин П.Е., Леман А.А. Об одном классе обучающихся алгоритмов узнавания. – Докл. АН СССР, 1967, т. 173, № 3.
14. Карп В.П. Алгоритмы направленного обучения в задачах классификации с помощью ЭВМ и их применение в альтернативной онкологической диагностике легочных заболеваний: Диссертация на соиск. учен. степени к.т.н.. – М., 1972.

15. Глазкова Т.Г. Методы построения многофакторных моделей в условиях отсутствия априорной информации и их применение в онкологии: Автореферат диссертации на соиск. учен. степени д.т.н. – М., 1986.
16. Гаскаров Д.В., Голинкевич Т.А., Мозгалеvский А.В. Прогнозирование технического состояния и надежности радиоэлектронной аппаратуры. М., Советское радио, 1974.
17. Уздин Д.З. Способ раннего выявления онкозаболеваний по параметрам крови. Заявка № 2002101919 от 28.01.02. – Бюллетень изобретений, № 25, 2003.
18. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М., Наука, 1969.
19. Васильев В.И. Распознающие системы /справочник/. – Научная думка, Киев. – 1983.
20. Ивахненко А.Г. Самообучающиеся системы распознавания и автоматического управления. Киев. Техника, 1969.
21. Цыпкин Я.З. Основы теории обучающихся систем. М., Наука, 1970.
22. Биргер И.А. Техническая диагностика. М., Машиностроение, 1978.
23. Генкин А.А. Новая информационная технология анализа медицинских данных. – Политехника, С-Пб, 1999.
24. Михлин В.М., Уздин Д.З. О выборе аппроксимирующей функции динамики выходного параметра при нелинейных детерминированных реализациях случайного процесса изменения технического состояния. – Надежность и контроль качества. М., 1983, № 6.
25. Математические методы в распознавании образов и дискретной оптимизации./Под ред. Журавлева Ю.И.. ВЦ АН СССР. М. 1990.
26. Ширяев А.Н. Задача скорейшего обнаружения нарушения стационарного режима. – Докл. АН СССР, 1961, т. 138, № 5.
27. Обнаружение изменения свойств сигналов и динамических систем. / Под. ред. Бассвиль М., Банвениста А.. Перевод под ред. Никифорова И.В. М. Мир, 1989.
28. Вопросы статистической теории распознавания. Под. ред. Б.В. Варского. М., Сов. радио, 1967.
29. Гельфанд И.М., Розенфельд Б.И., Шифрин М.А. Структурная организация данных в задачах медицинской диагностики и прогнозирования. М., 1982.
30. Вентцель Е.С. Исследование операций. М., Высшая школа. 2001.
31. Загоруйко Н. Г. Методы распознавания и их применение. М., Советское радио. 1972.
32. Горелик А.Л., Скрипкин В.А. Методы распознавания. М., высшая школа. 1989.

33. Фомин Я.А., Тарловский Г.Р. Статистическая теория распознавания образов. М., Радио и связь. 1986.
34. Уздин Д.З. О некоторых методах математической диагностики: теории распознавания состояний. – 2-е издание, доп. и испр. – М., МАКС Пресс. 2010.
35. Боженко В.К. Многопараметрический анализ лабораторных показателей крови для получения диагностической информации в экспериментальной и клинической онкологии: Автореферат диссертации на соиск. учен. степени д.м.н. – М., 2004.
36. Уздин Д.З. Оптимизация допускаемого значения выходного параметра при назначении ремонта машин по состоянию. – Надежность и контроль качества. М., 1984, №3.
37. Клир Дж. Системология. М., Радио и связь. 1990.
38. Орлов А.И. Организационно-экономическое моделирование. Часть 1. Нечисловая статистика. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009.
39. Айзерман М.А., Браверман Э.М., Розноэр Л.И. Метод потенциальных функций в теории обучения машин. М.: Наука, 1970.
40. Лбов Г.С. Методы обработки разнотипных экспериментальных данных. – Новосибирск: Наука, 1981.
41. Журавлев Ю.И., Рязанов В.В., Сенько О.В. «Распознавание». Математические методы. Программная система. Практические применения. М.: ФАЗИС. 2006.
42. Воронин Ю.А. Введение мер сходства и связи для решения геолого-географических задач. – Докл. АН СССР, 1971, т. 199, №5, с. 1011-1014.
43. Дуда. Р., Харт П. Распознавание образов и анализ сцен. М. Мир, 1976.

Примечание к списку литературы

Отсутствие зарубежных авторов в списке литературы обусловлено тем, что математических методов ранней диагностики рака по ПК и М за рубежом еще нет. Там опубликовано большое число однотипных работ по «биомаркерному» направлению диагностики, но не по ПК и М, и поэтому ссылаться на них нет необходимости. В качестве примера приведена одна из современных значимых работ [9].

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Предисловие	3
	Принятые сокращения и обозначения	15
ГЛАВА I.	Вероятностно-метрический подход (ВМП) в теории распознавания состояний	18
	Введение к главе I	18
I.1.	Основные понятия ВМП и общие принципы распознавания состояний	20
I.2.	Условия противоречия и согласия мер близости	25
I.3.	Геометрическая интерпретация вероятностно-метрической меры близости (ВММБ)	28
I.4.	Решающие правила разделения исправного – G и неисправного – \bar{G} состояний	30
I.5.	Второй этап распознавания. Установление истинного диагноза – $D_{и}$	38
1.5.1.	Двумерная реализация процесса распознавания	38
1.5.2.	Метод установления $D_{и}$ путем вычеркивания (удаления) ложных диагнозов	41
1.5.3.	Главная теорема установления истинного диагноза ($D_{и}$)	44
1.5.4.	Некоторые аналитические замечания	46
I.6.	Решающие правила установления предварительного диагноза на основе метрического подхода	47
I.7.	Функции состояния (ΦC_1 и ΦC_2)	49
	Поясняющий пример	52
	Выводы к главе I	55
	Приложение главы I: другой вариант вероятностно-метрической меры близости (ВММБ); отношения правдоподобия и ВММБ	55
ГЛАВА II.	Методы распознавания состояний. связь числа наиболее вероятных диагнозов и вероятности установления истинного с числами проверок и параметров	58
II.1.	Введение к главе II	58
II.2.	Метод конгруэнции (совпадения) кодов	59
2.2.1.	Преамбула метода	59
2.2.2.	Математическая основа метода конгруэнции кодов	61
2.2.3.	Анализ метода и соображения по поводу необходимого числа параметров и его связи с числом диагнозов L_1	66

2.2.4.	Зависимость числа параметров от доверительной вероятности не перекрытия их интервалов	73
2.2.5.	Общее решающее правило, касающееся разных шкал	77
II.3.	Обобщенный качественно-количественный метод распознавания состояний	78
II.4.	Обобщающие теоретические результаты и зависимости	80
II.5.	Приложение к методу конгруэнции кодов	87
	Общий вывод и выводы к главе II	89
ГЛАВА III.	Методы распознавания при неспецифичных признаках (параметрах)	91
	Введение к главе III	91
III.1.	Гипотезы и постановка задач	94
III.2.	Параметры крови и мочи и их обобщенное конфигурационное отношение (ОКО)	98
III.3.	Решающие правила разделения здорового и нездорового состояний	102
III.4.	Методы разделения пересекающихся диагнозов раковых и хронических заболеваний	104
3.4.1.	Структура преобразованного обобщенного конфигурационного отношения ОКО при каскадной аугментации	105
3.4.2.	Метод линейной аппроксимации локально-дискретных отношений	109
3.4.3.	Метод координат	112
III.5.	Алгоритм предварительного выбора нескольких наиболее вероятных диагнозов (н.в.д.) без применения ВМП	115
III.6.	Обобщенное диагностирующее отношение и коэффициент надежности распознавания в медицинской диагностике	122
	Выводы к главе III	127
	Приложения главы III	131
	Приложение 1	131
	Приложение 2	137
	Резюме по Приложениям главы III	158
ГЛАВА IV.	Выбор наиболее вероятных диагнозов и общий алгоритм скрининга	159
	Введение к главе IV	159
IV.1.	Третий принцип и его основные положения.	160
IV.2.	Выбор наилучшего решающего правила (РП)	162
IV.3.	Выбор пяти наиболее вероятных диагнозов (н.в.д.) при ряде РП	163

IV.4.	Об уменьшении числа н.в.д с ростом числа проверок.....	167
IV.5.	Алгоритм проведения скрининга	171
	Выводы к главе IV	184
ГЛАВА V.	Дополнения и анализ нового подхода.	186
V.1.	Два варианта качественно-количественного метода разделения и примечание к нему.....	186
V.2.	Обобщение метода координат, некоторые дополнения и уточнения.....	189
5.2.1.	Обобщение метода координат	189
5.2.2.	Метод координат и ВМП	193
5.2.3.	Некоторые дополнения и уточнения	195
V.3.	О прелиминарном и истинном диагнозах в свете периодических проверок.....	196
V.4.	К вопросу половой принадлежности проверяемого и его группы крови.	198
V.5.	Решающие правила при периодических проверках	199
V.6.	Рекомендации по применению решающих правил при разделении раковых и нераковых диагнозов	201
V.7.	Дальнейшие исследования.....	203
V.8.	Некоторые аналитические выводы	209
	Приложение к методам п.п. 3.4.1, 3.4.2 и 3.4.3	215
	Приложение ко второму принципу второй гипотезы.	217
	Общее примечание, касающееся внедрения методов в онкологии.....	219
	Практический вывод при медицинской диагностике	224
	Главные выводы.....	224
	Общие и акцентированные выводы	225
	Заключение	226
	Список литературы.....	228