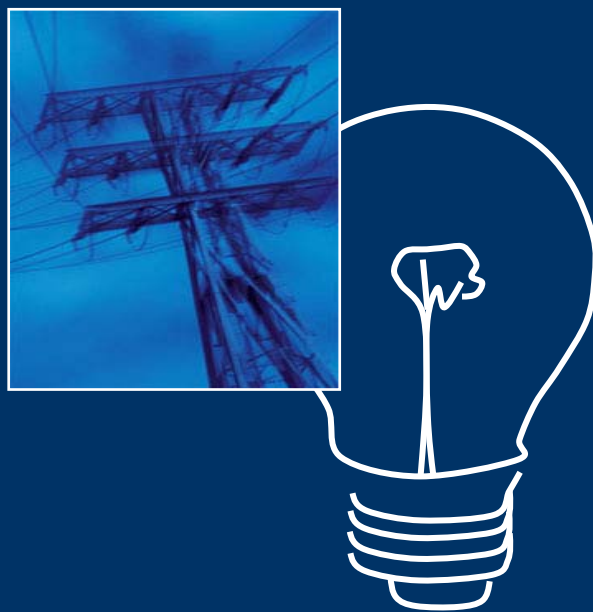


**В.П. ОБОСКАЛОВ**

**НАДЕЖНОСТЬ ОБЕСПЕЧЕНИЯ  
БАЛАНСА МОЩНОСТИ  
ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ**



Министерство образования Российской Федерации  
Уральский государственный технический университет УГТУ-УПИ

В.П. ОБОСКАЛОВ

**НАДЕЖНОСТЬ ОБЕСПЕЧЕНИЯ БАЛАНСА МОЩНОСТИ  
ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Екатеринбург  
2002

УДК 621.311.16.019.3

ББК 31.27

О-22

Рецензент:

Начальник бюро оптимизации режимов отдела АСУ ОАО «Свердлов-энерго», канд. техн. наук В.М. Летун

**В.П. Обоскалов**

О-22 Надежность обеспечения баланса мощности электроэнергетических систем / В.П.Обоскалов. Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2002. 210 с.

Предназначено для инженерно-технических работников энергосистем, аспирантов, магистров и студентов старших курсов специальностей 100200 – Электроэнергетические системы и сети, 210400 - Автоматическое управление электроэнергетическими системами.

ISBN 5-321-00256-8

© ГОУ ВПО Уральский государственный  
технический университет – УПИ, 2002

## ПРЕДИСЛОВИЕ

---

Предлагаемая вниманию читателя монография явилась результатом достаточно длительного периода работы автора по проблеме балансовой надежности электроэнергетических систем, и в какой-то мере она планировалась как этапное обобщение публикаций автора в научных журналах и сборниках.

Работа ориентирована, прежде всего, на магистров, осваивающих основы теории надежности энергосистем, и аспирантов, которые либо по своей инициативе, либо по инициативе их руководителей пытаются найти новые, более эффективные алгоритмы и процедуры расчета показателей надежности. Такая направленность определила структуру монографии. Необходимо показать не только и не столько исследования автора, сколько базовые знания, без которых освоение проблемы просто не мыслимо. Оказалось, что второй аспект является главным, в результате чего работа приобрела статус учебного пособия, где отражены исследования автора. В то же время, автор ориентируется на то, что основные понятия теории надежности энергосистем читателю уже знакомы [1-5 и др.], поэтому многие, безусловно, важные проблемы надежности здесь не отражены.

## ВВЕДЕНИЕ

---

Проблема, основные цели и задачи расчета надежности объединенной электроэнергетической системы (ЭЭС) с позиции обеспечения балансов мощности и энергии сформулированы в [1 - 4, 6 - 13].

Математический аппарат теории балансовой надежности (БН) ЭЭС основывается на математических методах и процедурах общей теории надежности технических систем [14 - 18], структурной [1 - 6, 18 - 26] и режимной [1 - 3, 25, 28 - 31] надежности ЭЭС.

Расчеты показателей БН выполняются как при планировании, так и при эксплуатации ЭЭС с целью определения и распределения резервов активной мощности, обоснования ввода генерирующих установок и межсистемных связей, планирования капитальных ремонтов основного оборудования, формирования тарифов на электроэнергию и мощность и др.

В математическом аспекте основной задачей балансовой надежности является определение вероятностных характеристик (функции распределения, частоты, математического ожидания, дисперсии и др.) дефицита мощности и энергии отдельных систем, работающих в составе объединения с межсистемными связями ограниченной пропускной способности (ПС). На основании полученных функций распределения можно вычислить ожидаемый ущерб от недоотпуска электроэнергии потребителю, а, следовательно, и решить задачу, например, об эффективности инвестиций на развитие ЭЭС [1, 32, 33].

В составе основной задачи можно выделить два направления - анализ баланса мощности и баланса энергии [8]. Второе направление пока исследовано меньше, чем первое. Частично это объясняется функциональной зависимостью энергии от мощности. Отсюда понятна приоритетность первого направления. В данной работе рассматриваются проблемы только баланса мощности

Одним из главных факторов в задаче балансовой надежности является ограниченная пропускная способность межсистемных связей. В зависимости от того, учитывается или не учитывается данный фактор, используется тот или иной математический аппарат, а общая задача конкретизируется как БН концентрированной ЭЭС или БН ЭЭС со слабыми связями.

Структура исходной и результирующей информации задачи БН компактно представлена при описании тестовой схемы №2 СЭИ [34]. Как правило, считаются заданными:

- топология ОЭЭС;
- состав генерации и характеристики нагрузки в узлах ОЭЭС;
- состав и вероятностные характеристики пропускной способности межсистемных связей,
- графики капитальных ремонтов основного оборудования ОЭЭС;
- план ввода в эксплуатацию нового и вывода из эксплуатации существующего оборудования;
- технические характеристики составных элементов ОЭЭС.

Для идентификации состава работающих агрегатов при решении задач БН предварительно должна быть решена проблема оптимального планирования капитальных и средних ремонтов основного оборудования ЭЭС. Здесь возможны два подхода: состав агрегатов, выведенных в капитальный ремонт, определяется в рамках единой расчетной процедуры оптимизации плановых и аварийных резервов в ЭЭС и планирование капитальных ремонтов в виде отдельного этапа, предшествующего расчетам показателей балансовой надежности [8, 12, 13, 35, 36]. Последний подход используется практически всеми существующими программами, что определяется в основном сложностью проблемы БН. Безусловно, первый подход математически более корректен, но в ближайшем будущем он, вероятно, не будет основным.

Система генерации отдельной ЭЭС представляется в виде групп однотипных агрегатов с биномиальным законом распределения вероятностей их состояний, с последующим их объединением в виде вероятностного ряда. Час-

то используется аппроксимация вероятностного ряда некоторым непрерывным распределением (нормальное, гамма и др.) [1, 38, - 40]. Естественно это приводит к появлению погрешностей и в каждом конкретном случае аппроксимация должна быть обоснована по критериям допустимости.

Пропускные способности межсистемных связей обычно представляется своими вероятностными рядами. Здесь аппроксимация функции распределения непрерывным распределением нежелательна, поскольку число состояний связи, как правило, невелико (при одной линии - это два состояния: включена, отключена).

В сопоставлении расчетных методов, алгоритмов и программ по тестовой схеме СЭИ принимали участие такие организации как СЭИ (программные комплексы Янтарь, Поток), Коми научный центр Ур.О РАН (Орион), отдел энергетической кибернетики АН Молдовы (Состав), ЭНИН им. Г.М. Кржижановского [41]. Именно эти организации являются ведущими в решении упомянутой проблемы.

Сравнение результатов показало их существенное различие. При этом трудно сказать, какой метод или алгоритм обеспечивает более качественное решение, поскольку пока не существует абсолютно точный метод или алгоритм оценки показателей балансовой надежности ЭЭС в схемах сети любой сложности, в частности с контурами.

Основным математическим методом при расчете БН сложных ЭЭС в настоящее время является метод статистического моделирования. В той или иной мере его используют все существующие программы. Известны положительные и отрицательные стороны этого метода. В последнее время в математических алгоритмах БН крен делается в сторону аналитических методов. Это объясняется, прежде всего, тем, что задача БН постепенно распространяется из сферы перспективных в область текущих расчетов (планирование и распределение оперативного и коммерческого резервов мощности), где значимым является фактор скорости расчетов [42]. В предлагаемой работе в качестве

приоритетного выбрано менее разработанное направление использования аналитических методов.

Работа состоит из шести глав. Первая и вторая главы, где описаны основные функции распределения и метод статистического моделирования, носят справочный характер. Третья глава является ключевой для понимания остального содержания работы. В большей степени это касается частотно-вероятностных рядов небалансов мощности. В четвертой главе описывается математический аппарат так называемых «редуцированных» распределений, на наш взгляд необходимый для быстрых расчетов балансовой надежности. Последние две главы описывают математические процедуры определения показателей надежности сложнзамкнутых объединенных ЭЭС.

В работе приведено достаточно большое число примеров, в расчетах которых принимали участие аспиранты Нгуен Вьет Кыонг и А.Г. Оносов

Автор будет бесконечно благодарен читателю за замечания по работе.



**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ БАЛАНСОВОЙ НАДЕЖНОСТИ ЭЭС**

Данный раздел носит скорее справочный, нежели познавательный характер. Здесь приведено далеко не все, что используется в современных алгоритмах расчета БН ЭЭС. Мы выделили лишь то, что будет использовано в данной работе. Для более подробного знакомства с математическим аппаратом теории надежности имеется большой спектр учебной и справочной литературы, например [14-17 и др.].

**1.1 Функции распределения**

Теория надежности является развитием теории вероятности и математической статистики. Она наследует их основные понятия, определения и функциональные закономерности. Имеет смысл конспективно упомянуть те вероятностные функции, которые используются при расчетах БН. К их числу относятся: функция распределения (ФР)  $F(t)$ , дополнительная функция (часто называемая функцией надежности)  $R(t)=1-F(t)$ , плотность распределения (ПР)  $f(t)$  и функция интенсивности  $\lambda(t)$ . Взаимосвязь между этими функциями представлена в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Функция	Определяющее соотношение	$F(t)$	$R(t)$	$f(t)$	$\lambda(t)$
$F(t)$	$\int_0^t f(t)dt$	—	$1-R(t)$	$\int_0^t f(t)dt$	$1 - \exp\left(-\int_0^x \lambda(t) dt\right)$
$R(t)$	$1-F(t)$	$1-F(t)$	—	$\int_t^\infty f(t)dt$	$\exp\left(-\int_0^x \lambda(t) dt\right)$
$f(t)$	$\frac{d}{dt}F(t)$	$\frac{d}{dt}F(t)$	$-\frac{d}{dt}R(t)$	—	$\lambda(t) \exp\left(-\int_0^x \lambda(t) dt\right)$
$\lambda(t)$	$-\frac{f(x)}{R(x)}$	$\frac{F'(t)}{1-F(t)}$	$-\frac{d}{dt}[\ln R(t)]$	$\frac{f(t)}{\int_t^\infty f(t)dt}$	—

### 1.1.1 Оптимальный резерв мощности в концентрированной ЭЭС

Одним из ярких примеров необходимости и применимости вероятностных характеристик небаланса мощности в ЭЭС является задача об оптимальном резерве мощности в концентрированной энергосистеме.

Увеличение резерва приводит к повышению надежности электроснабжения потребителя, но это связано с дополнительными капиталовложениями. В качестве критерия оптимальности в экономических расчетах, как правило, принимается минимум приведенных затрат. Если составляющие затрат имеют вероятностный характер, то данный критерий преобразуется в минимум математического ожидания (МО) приведенных затрат.

От величины располагаемого резерва мощности  $R$  зависит вероятностный ущерб от недоотпуска электрической энергии  $\bar{V}(R)$ . Отсюда задача об оптимальном резерве мощности имеет вероятностный характер и заключается в отыскании такого резерва  $R$ , который минимизирует МО приведенных затрат

$$\min\{\bar{Z}(R) = E_n K(R) + I_{ao}(R) + \bar{V}(R)\}.$$

В упрощенной постановке можно принять линейную модель капиталовложений и ежегодных издержек  $K(R) = C_R R$ ,  $I_{ao}(R) = p_{ao} K(R) = p_{ao} C_R R$ . Реальный годовой график нагрузки можно представить ожидаемой максимальной нагрузкой и числом часов использования максимума  $T_{\max}$ . В этом случае

$$\bar{Z}(R) = (E_n + p_{ao})C_R R + yT_{\max}\bar{D}(R),$$

где  $y$  – удельный ущерб от недоотпуска электроэнергии;  $\bar{D}(R)$  – МО дефицита мощности при максимальной нагрузке. В общем случае  $\bar{V}(R)$  имеет более сложный функциональный характер [2, 3, 7, 17], который, безусловно, учитывается в программных реализациях.

Небаланс мощности в ЭЭС определяется соотношением

$$N = P_{\max} - G_{уст} + G_{ав} + \Delta P_n,$$

где установленная мощность  $G_{уст} = P_{max} + R$ . Составляющие  $G_{ав}$  - аварийно отключенная мощность генераторов и  $\Delta P_n$  - отклонение максимальной нагрузки от ожидаемого  $P_{max}$  имеют случайный характер с математическими ожиданиями  $\overline{G_{ав}}$  и 0. Отсюда  $N = G_{ав} + \Delta P_n - R$ . Дефицит мощности наблюдается тогда, когда  $N^* = G_{ав} + \Delta P_n > R$ . Если известна плотность распределения  $f(x)$  величины  $N^* = G_{ав} + \Delta P_n$ , то МО дефицита мощности определяется выражением

$$\overline{D} = \int_R^{\infty} (x - R) f(x) dx.$$

Используем процедуру преобразования интеграла «по частям». Обозначая  $u = (x - R)$ ;  $dv = -f(x)dx$ ,  $v = J(x) = 1 - F(x)$ , получаем

$$\overline{D} = \int_R^{\infty} (x - R) f(x) dx = - \left( uv \Big|_R^{\infty} - \int_R^{\infty} J(x) dx \right) = -(x - R) J(x) \Big|_R^{\infty} + \int_R^{\infty} J(x) dx = \int_R^{\infty} J(x) dx,$$

т.е. МО дефицита определяется площадью под кривой дополнительной функции распределения  $J(x)$  (рис. 1.1).

В результате

$$\overline{Z}(R) = (E_n + p_{ao}) C_R R + y T_{max} \int_R^{\infty} J(x) dx.$$

Оптимальный резерв мощности определяется из условия равенства нулю производной по  $R$  от функции приведенных затрат

$$\frac{d}{dR} \overline{Z}(R) = (E_n + p_{ao}) C_R - y T_{max} J(R) = 0.$$

Отсюда оптимальный резерв мощности должен быть таким, чтобы вероятность дефицита мощности  $J(R) = J_{opt}$  удовлетворяла условию

$$J_{opt} = \frac{(E_n + p_{ao}) \cdot C_R}{y T_{max}},$$

т.е. интегральная вероятность пропорциональна удельным капиталовложениям и обратно пропорциональна удельному ущербу. Данное соотношение носит

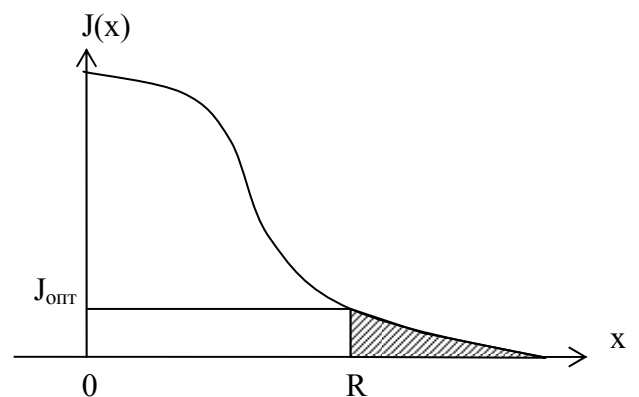


Рис. 1.1. Оптимальный резерв мощности

название критерия Марковича [32]. Нетрудно видеть, что для определения оптимального резерва мощности необходимо знать функцию распределения небаланса мощности.

**Пример 1.1.** Пусть  $C_R=200\$/кВт$ ;  $y=1\$/кВт\cdot ч$ ;  $T_{max}=6000ч$ ; отчисления на амортизацию и обслуживание  $p_{ao}=9\%$ . Тогда при оптимальном  $R$  вероятность дефицита мощности  $\bar{F}(R) = \frac{(0,12 + 0,09)200}{1 \cdot 6000} = 0,007$  (в течение года допускается  $0,007 \cdot 8760 = 61$  час состояния дефицита мощности). При заданных условиях оптимальный индекс надежности  $F(R) = 1 - \bar{F}(R) = 0,993$ .

### 1.1.2 Распределения дискретных случайных величин

#### *Биномиальное распределение*

Наиболее широкое применение для описания дискретных случайных величин, в частности числа аварийно отключенных генераторов, получило биномиальное распределение. Вероятность  $q(n, k)$  совместного отказа  $k=0, 1, \dots, n$  элементов в группе из  $n$  элементов при одинаковой вероятности  $q$  независимого отказа одного элемента выражается формулой

$$q(n, k) = C_n^k q^k p^{n-k}, \quad (1.1)$$

где  $p=1-q$  - вероятность безотказной работы элемента;

$C_n^k = \frac{n!}{k! (n-k)!}$  - число сочетаний из  $n$  элементов по  $k$ .

Представленное выражение является отражением общего члена биномиального разложения  $(p + q)^n$  по степеням  $q$

$$(q + p)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k q^k p^{n-k} = 1. \quad (1.2)$$

Обычно для определения вероятностей биномиального распределения используется рекуррентное соотношение

$$q(n, k) = q(n, k-1) \frac{n-k+1}{k} \frac{q}{1-q}. \quad (1.3)$$

Математическое ожидание случайной величины, описываемой биномиальным распределением,  $M=nq$ . Дисперсия  $D=npq$ .

В качестве примера в табл. 1.2 приведены вероятности  $q(n, k)$  аварийного отключения  $k$  блоков в системе из четырех агрегатов мощностью 50 МВт с  $q=0,04$  и  $q=0,1$ . Функцию распределения характеризует накопленная вероятность  $Q(n, k) = \sum_{i=1}^k q(n, i)$  - вероятность того, что число отказавших блоков не больше  $k$ .

Таблица 1.2

Число отказавших агрегатов	Потеря мощности, МВт	$q=0,04$		$q=0,1$	
		Вероятность отключения $q(n, k)$	Накопленная вероятность $Q(n, k)$	Вероятность отключения $q(n, k)$	Накопленная вероятность $Q(n, k)$
0	0	0,844347	0,849347	0,6561	0,6561
1	50	0,141558	0,990904	0,2916	0,9477
2	100	$8,847 \cdot 10^{-3}$	0,999752	0,0486	0,9963
3	150	$2,458 \cdot 10^{-4}$	0,999998	$3,6 \cdot 10^{-3}$	0,9999
4	200	$2,560 \cdot 10^{-6}$	1	$1, \cdot 10^{-4}$	1

В частности, для  $k=1$ ,  $q=0,04$  имеем  $q(n, k) = 4 \cdot 0,04 \cdot 0,96^3 = 0,141558$ .

Из табл. 1.2 видно, что  $q(n, k)$  убывает экспоненциально. Однако для больших  $n$  форма графика меняется и становится коло-

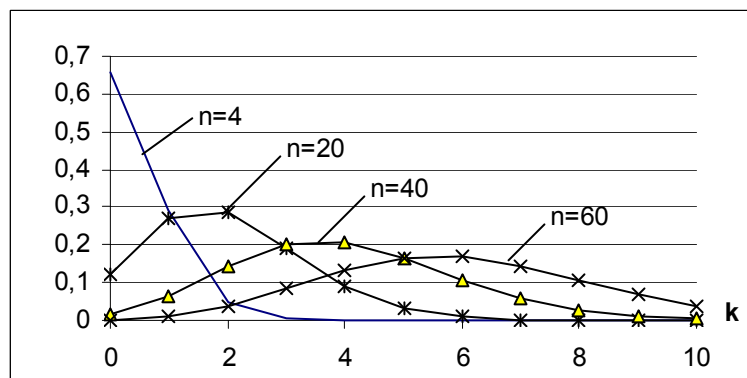


Рис. 1.2. Биномиальное распределение

колообразной (рис. 1.2). В теории вероятности доказано, что биномиальное распределение при  $n \rightarrow \infty$  является асимптотически нормальным с математическим ожиданием  $M = np$  и дисперсией  $D = npq$  (предельная теорема Муавра—Лапласа). Замена биномиального распределения нормальным не приводит к большой погрешности, если  $D \geq 9$ .

Для практических целей часто желательно знать наиболее вероятное число  $K_m$  отключенных блоков. Вероятность биномиального распределения имеет наибольшее значение, когда  $K_m$  равно целой части выражения  $(n+1)q$ . Если это выражение является целым, то максимум вероятности наблюдается и для предыдущего целого значения  $k$ . В приведенном на рис. 1.2 примере при  $n=20$  и  $q=0,1$  наиболее вероятное число блоков равно  $K_m = \text{int}(21 \cdot 0,1) = 2$ , а при  $n=40$   $K_m = 4$ . Отличие от нуля наиболее вероятной величины определяет необходимость учета кратных отказов элементов ЭЭС. Сверх того, только такие отказы и представляют интерес в теории надежности ЭЭС, поскольку энергосистема проектируется таким образом, что любой единичный отказ не приводит к нарушению ее функционирования.

Биномиальное распределение обладает еще одним интересным с практической точки зрения свойством. Если  $q > n/(n+1)$ , то последовательность  $q(n, k)$  является монотонно возрастающей, а при  $q < 1/(n+1)$  она монотонно убывает. Приведенные соотношения могут служить ориентиром при выборе аппроксимирующего распределения.

Биномиальное распределение нескольких групп элементов строится исходя из соотношения, подобного (1.2):

$$\prod_{i=1}^N (p_i + q_i)^{n_i} = \prod_{i=1}^N \sum_{k=0}^{n_i} C_{n_i}^k q_i^k p_i^{n_i-k} = 1. \quad (1.4)$$

Отсюда комбинированная вероятность того, что в группе  $i=1, \dots, N$  произошел отказ  $k_i$  элементов

$$Q = \prod_{i=1}^N C_{n_i}^{k_i} q_i^{k_i} p_i^{n_i-k_i}. \quad (1.5)$$

## **Распределение Пуассона**

При малых вероятностях  $q$  биномиальное распределение, как правило, аппроксимируется однопараметрическим распределением Пуассона. Здесь вероятность появления случайной величины  $x$  вычисляется по относительно простой, не требующей вычисления числа сочетаний формуле

$$P(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}.$$

Математическое ожидание и дисперсия распределения Пуассона определяются параметром  $\lambda$ :  $M=D=\lambda$ . Условие равенства (с допустимой погрешностью) МО и дисперсии может служить критерием для правомочности замены биномиального распределения распределением Пуассона.

Приравнявая математические ожидания распределений Пуассона и биномиального, получаем условие для аппроксимации:  $\lambda = nq$ .

При этом  $q(n, k) \approx \frac{(nq)^k}{k!} e^{-nq}$ .

Для сопоставления в табл. 1.3 приведены распределения биномиальное и Пуассона ( $n=20$ ,  $q=0,001$  и  $0,1$ ).

Таблица 1.3

k	q=0,001			q=0,1		
	Биномиальное	Пуассона	Ошибка	Биномиальное	Пуассона	Ошибка
0	0,980	0,980	0%	0,121	0,135	-11%
1	0,020	0,020	0%	0,270	0,271	0%
2	1,87E-04	1,96E-04	-5%	0,285	0,271	5%
3	1,12E-06	1,31E-06	-17%	0,190	0,1801	5%
4	4,77E-09	6,53E-09	-37%	0,09	0,090	0%
5	1,53E-11	2,61E-11	-71%	0,032	0,0361	-13%
6	3,82E-14	8,71E-14	-128%	0,009	0,0121	-36%

Нетрудно видеть, что рассматриваемые распределения практически совпадают. В то же время при больших  $k$  относительная погрешность становится столь значительной (при  $k=20$  это  $1,6 \cdot 10^7 \%$ ), что если интерес представ-

ляет именно область малых вероятностей, то аппроксимация становится просто недопустимой. Здесь следует отметить, что реально нас интересуют ве-

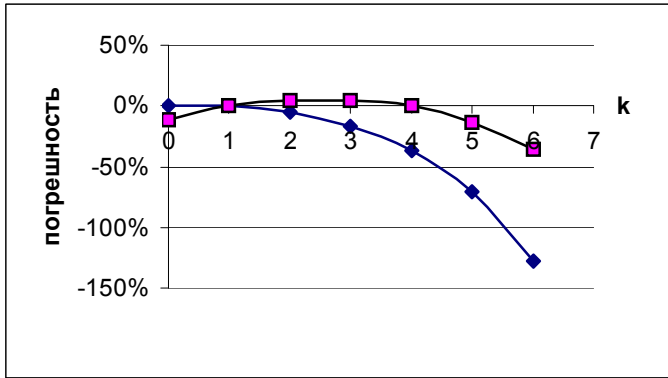


Рис. 1.3. Ошибка аппроксимации

роятности не ниже  $10^{-6}$ , а в этом диапазоне погрешность относительно невелика.

Представляет интерес поведение ошибки аппроксимации (рис. 1.3). Нетрудно видеть, что она подчинена некоторой функциональной зависимости и, если

известна ее аналитическая структура (например, полином или, лучше, экспонента), то возможна дополнительная коррекция аппроксимирующей функции.

Как правило, распределение Пуассона описывает закономерности появления внезапных отказов в сложных системах. Оно используется также при моделировании функции распределения нескольких групп генераторов с отличающимися параметрами. Так, для  $L$  групп генераторов с параметрами  $\{n_j, q_j, P_j, \dots, \lambda_j = n_j q_j, j = 1, \dots, L\}$ , где  $P_j$  - мощность генератора группы  $j$ , функция распределения отключенной мощности может быть представлена в виде формулы, часто называемой формулой сложной суммы:

$$F(x) = \sum_{k_1} \sum_{k_2} \dots \sum_{k_L} \frac{\lambda_1^{k_1}}{k_1!} \frac{\lambda_2^{k_2}}{k_2!} \dots \frac{\lambda_L^{k_L}}{k_L!} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_L)}, \quad \sum_{j=1}^L k_j P_j < x. \quad (1.6)$$

Здесь вероятность отказа  $k_i$  генераторов группы  $i$  моделируется распределением Пуассона. Несмотря на то, что формула называется сложной, расчеты по ней существенно проще, нежели расчеты с использованием (1.5). Однако снижение трудоемкости связано с увеличением погрешности, особенно в области маловероятных событий.

### 1.1.3 Распределения непрерывных случайных величин

Некоторые, наиболее часто используемые в расчетах надежности ЭЭС распределения непрерывных случайных величин, представлены в табл. 1.4. Не



показанные в таблице аналитические выражения имеют громоздкую структуру и вычисляются либо через показанные функции (с использованием табл.1.3), либо путем их интегрирования или дифференцирования, согласно определению рассматриваемой величины.

### *Нормальное распределение*

Большинство случайных величин (например, мощность нагрузки энергосистемы) описывается нормальным распределением (НР). Как правило, данное распределение применяется к таким случайным величинам, которые зависят от большого числа случайных факторов или представляют сумму некоторого числа случайных величин. В теории вероятности показано (центральная предельная теорема Ляпунова), что независимо от вида распределений составных событий распределение результирующего события будет асимптотически приближаться к нормальному по мере увеличения числа составных событий. С другой стороны, НР является асимптотически предельным для большинства непрерывных распределений (Гамма, Стьюдента и др.).

Широко известен порожденный НР критерий "трех или двух сигм", согласно которому случайная величина практически не отклоняется от своего математического ожидания на величину, большую трех среднеквадратичных отклонений  $\sigma$ . При использовании критерия "двух сигм" вероятность отклонения на величину, большую  $2\sigma$ , составляет 4,6%, чем часто можно пренебречь.

В инженерной практике значимость НР несколько преувеличена. Часто его используют там, где более уместным было бы применение иного распределения. Следует тщательно по известным из теории вероятности критериям проверять допустимость использования НР для описания рассматриваемых случайных величин.

Функция интенсивности нормального распределения имеет возрастающий характер, отсюда данным распределением можно описывать длительность безотказной работы стареющих элементов.

Распределение	F(x), R(x)	f(x)	$\lambda(x)$	МО	Дисперсия	Примечание
Нормальное	$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(x-m)/\sigma} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$		m	$\sigma^2$	x-любое
Экспоненциальное	$R(x) = \exp(-\lambda x)$	$\lambda \exp(-\lambda x)$	$\lambda$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$x \geq 0$
Вейбулла	$R(x) = \exp(-(\beta x)^\alpha)$	$\alpha\beta(\beta x)^{\alpha-1} \exp(-(\beta x)^\alpha)$	$\alpha\beta(\beta x)^{\alpha-1}$	$\frac{1}{\beta} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)$		$x \geq 0$
Гамма	$F(x) = \gamma(\beta x, \alpha)$	$\frac{\beta(\beta x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta x}$		$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{\alpha}{\beta^2}$	$x \geq 0$
Эрланга	$R(x) = \sum_{r=0}^{a-1} \frac{(\beta x)^r}{r!} e^{-\beta x}$	$\frac{\beta(\beta x)^{a-1}}{(a-1)!} e^{-\beta x}$	$\frac{(\beta x)^{a-1}}{(a-1)! \sum_{r=0}^{a-1} \frac{(\beta x)^r}{r!}}$	$\frac{a}{\beta}$	$\frac{a}{\beta^2}$	a-целое a>0

В приведенных выражениях  $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-u} du$  - гамма-функция;  $\gamma(t, \alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t u^{\alpha-1} e^{-u} du$  - неполная гамма-функция.

### **Экспоненциальное распределение**

Экспоненциальное (показательное) распределение играет ключевую роль в теории надежности. Большинство математических моделей (структурная надежность ЭЭС) основано на предположении об экспоненциальном характере функции распределения. Согласно табл.1.4 функция надежности

$$R(x) = \exp\left(-\int_0^x \lambda(t) dt\right).$$

Экспоненциальное распределение отражает частный случай, когда  $\lambda(t) = \lambda = \text{const}$ . Здесь  $R(t) = e^{-\lambda t}$ . Данным распределением описываются те элементы ЭЭС, отказы которых не зависят от характера и длительности предшествующей работы, т.е. отказы возникают из-за появления непредвиденных, нерасчетных ситуаций (КЗ, обрыв связи, случайный спрос на обслуживание, стихийное явление, диверсия и др.).

Экспоненциальное распределение часто используется как составное для формирования моделей отказов стареющих объектов (случайные процессы с накоплением, которые представляются как многостадийные, причем каждая стадия описывается экспоненциальным распределением). В качестве примера можно привести длительность безотказной работы высоковольтного выключателя с ограниченным числом отключений КЗ. При этом длительность периода между смежными КЗ подчинена экспоненциальному распределению. Данный пример можно распространить на большинство устройств с ограниченным ресурсом.

### **Распределение Вейбулла**

Для реальных объектов функция интенсивности отказов имеет не постоянный, как у экспоненциального распределения, а корытообразный характер (рис. 1.4). Период эксплуатации условно подразделяется на три интервала: А - начальный (период устранения начальных дефектов, период отрицательного старения), где  $\lambda(t)$  имеет ниспадающий характер, В - центральный (основной эксплуатационный период), где  $\lambda(t) \approx \text{const}$ , и С - период положительного

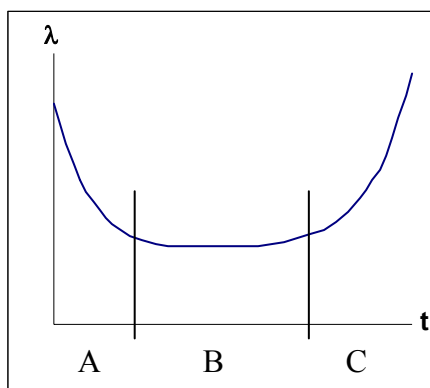


Рис. 1.4. Интенсивность отказов реальных объектов

старения, где  $\lambda(t)$  возрастает во времени. Распределение Вейбулла изменением своих параметров позволяет описать специфику всех трех периодов. При  $\alpha=1$  элемент не стареет, при  $\alpha<1$  имеет место отрицательное, а при  $\alpha>1$  -положительное старение.

В теории вероятности распределение Вейбулла известно как предельное распределение минимальной из совокупности случайных величин с одним и тем же распределением.

### *Распределения гамма и Эрланга*

В теории надежности показано, что если длительность одной стадии многостадийного процесса описывается экспоненциальным распределением с параметром  $\beta$ , то длительность  $a$ -стадийного процесса описывается распределением Эрланга с параметрами  $\beta$  и  $a$ , основные функции которого представлены в табл.1.4.

Поскольку МО длительности одной стадии составляет  $M = 1/\beta$ , а дисперсия  $D = 1/\beta^2$  (экспоненциальное распределение), то понятно, что в силу  $a$ -стадийности процесса для распределения Эрланга эти величины должны быть в  $a$  раз больше.

Важность этого класса распределений вытекает из двух тесно связанных фактов. Первым является простота преобразования Лапласа, вторым - связь с экспоненциальным распределением, которое является частным случаем при  $a=1$ .

Упомянутое преобразование Лапласа играет исключительно важную роль в теории восстановления. Обладая этим математическим аппаратом, можно достаточно просто получить решение многих задач надежности. Не приводя описания этого аппарата, отметим, что преобразование Лапласа плотности экспоненциального распределения с параметром  $\beta$

$$f_e^*(s) = \beta / (\beta + s),$$

а плотности распределения Эрланга

$$f_g^*(s) = (\beta / (\beta + s))^a = (f_e^*(s))^a.$$

Гамма-распределение отличается от распределения Эрланга тем, что здесь параметр  $a$  может принимать не только целочисленные значения (в табл.1.4 данный параметр представлен как  $\alpha$ ). Учитывая свойства гамма-функций, нетрудно показать, что при целых  $\alpha$  гамма-распределение совпадает с распределением Эрланга.

Гамма-распределение является асимметричным, меняясь от экспоненциального при  $\alpha=1$  до нормального при  $\alpha \rightarrow \infty$ . Асимметричность гамма-распределения определяет его универсальный характер. Подбирая  $\alpha$  и  $\beta$ , с его помощью можно достаточно точно описать реальный случайный процесс.

В справочной литературе имеются таблицы гамма-распределения, однако возможность простой алгоритмической реализации распределения Эрланга позволяет выполнять расчеты функций гамма-распределения путем интерполяции распределения Эрланга по параметру  $\alpha$ .

### ***Распределение смеси***

В практических приложениях часто встречаются ситуации, когда случайная величина является смесью двух или более случайных величин с различными распределениями. Для примера нагрузка узла энергосистемы - это взвесь составных типов нагрузки (коммунальная, машиностроительный завод, металлургический комбинат и др.). Если известны их процентное содержание (вероятности  $p_k, \forall k$ ) и характеристики распределений, то можно определить функцию, плотность и параметры распределения объединенной нагрузки.

Функция и плотность распределения смеси имеют вид

$$F(x) = \sum p_k F_k(x); \quad f(x) = \sum p_k f_k(x).$$

Математическое ожидание и дисперсия смеси являются также средневзвешенными величинами:

$$M = \sum p_k M_k(x); \quad D = \sum p_k D_k(x).$$

### 1.1.4 Свертка функций распределения

Функция распределения суммы двух независимых случайных величин с распределениями  $F_1(x)$ ,  $F_2(x)$  определяется интегралом свертки

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(z-x) dF_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_2(z-x) dF_1(x). \quad (1.7)$$

Действительно, для того, чтобы сумма случайных величин не превышала  $z$ , необходимо, чтобы при одной из случайных величин, равной  $x$  (вероятность  $dF_1(x)$ ), вторая не превышала величину  $z-x$  (вероятность  $F_2(z-x)$ ). Выражение для плотности распределения суммы имеет аналогичную структуру:

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(z-x) f_2(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(z-x) f_1(x) dx. \quad (1.8)$$

Понятие свертки функций в виде (1.7) распространяется не только на функции распределения, но и на произвольные функции. В теории надежности свертку функций распределения в явном виде (1.8), как правило, заменяют преобразованием Лапласа, где суммирование случайных величин сводится к произведению преобразований Лапласа слагаемых.

## 1.2 Метод пространства состояний

Рассматриваемый метод является основным при анализе динамически развивающихся процессов. Однако и он широко используется и для анализа стационарных состояний сложных систем.

Для того, чтобы оценить надежность системы методом пространства состояний, необходимо сначала описать систему ее состояниями и возможными переходами между этими состояниями. Состояние системы определяется состоянием каждого элемента системы: элемент либо исправен, либо в состоя-

нии отказа, либо подвергается принудительному ремонту, либо находится еще в каком-либо состоянии.

Если изменяется состояние одного из элементов, то и система переходит в новое состояние. Совокупность всех возможных состояний системы образует пространство состояний. Диаграмма состояний отражает возможные переходы из одного состояния в другое. В качестве примера на рис. 1.5 изображена диаграмма состояний системы из двух независимых элементов, где состояние  $ab$  соответствует готовности элементов  $a$  и  $b$ , состояние  $\bar{a}b$  - неготовности  $a$  и готовности  $b$  и т.д.

Специфической особенностью метода пространства состояний является его тесная функциональная связь со стационарными случайными процессами, для которых необходимо выполнение трех основных свойств: вероятность перехода из одного состояния в любое другое не зависит от предыстории системы; вероятность одновременного появления двух и более событий на малом отрезке времени пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью одного события (свойство ординарности); вероятность появления на некотором отрезке времени определенного числа событий не зависит от числа и характера событий, происшедших до этого отрезка (отсутствие последствия).

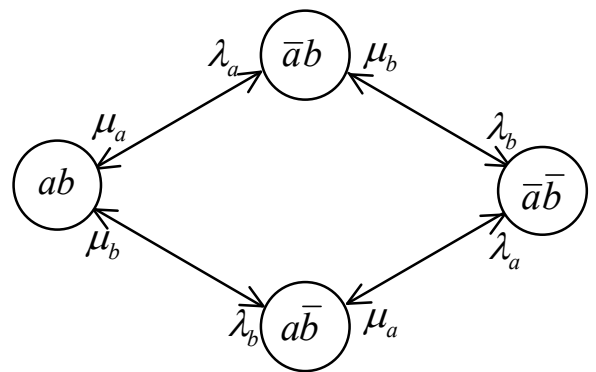


Рис. 1.5. Диаграмма состояний двух независимых элементов

Процесс перехода от одного состояния к другому описывается экспоненциальным распределением. Предположение об экспоненциальном распределении событий на интервале времени, предшествующем рассматриваемому событию, лежит в основе большинства технических приложений. Однако если рассматривается длительный промежуток времени функционирования системы, то модель с постоянной интенсивностью переходов дает удовлетворительные

результаты и в тех случаях, когда эти распределения в действительности не экспоненциальны.

Основной областью применения метода пространства состояний является вычисление характеристик надежности ремонтпригодных систем. Основными показателями, определяемыми данным методом, являются вероятности, частоты и средние продолжительности отдельных состояний системы. После идентификации состояний системы, приводящих к ее отказу, вычисляются аналогичные показатели для состояния отказа системы в целом.

### 1.2.1 Вероятности состояний

Процесс, при котором интенсивность переходов постоянна, представляет собой однородный процесс Маркова, описываемый линейной системой дифференциальных уравнений

$$P'(t) = P(t)A, \quad (1.9)$$

где  $P(t)$  — вектор-строка из вероятностей состояний системы;  $A$  — матрица интенсивностей переходов, элементы которой  $a_{ij} = \lambda_{ij}$  при  $i \neq j$  и  $a_{ii} = -\sum_{j \neq i} \lambda_{ij}$ .

Сумма элементов в каждой строке матрицы всегда равна нулю.

Для иллюстрации структуры дифференциальных уравнений определим вероятность события  $H_i$ , заключающегося в том, что в момент  $t + \Delta t$  система оказывается в состоянии  $i$ . Это возможно, если в момент  $t$  система уже находилась в этом состоянии и за интервал  $\Delta t$  не было переходов системы в любое другое состояние (событие  $H_{ii}$ ) или в момент  $t$  система находилась в некотором состоянии  $j$  и за время  $\Delta t$  произошел единственный переход системы в состояние  $i$  (событие  $H_{ji}$ ), причем состояние  $j$  может быть любым.

Для малых  $\Delta t$  вероятность перехода из состояния  $j$  в состояние  $i$  примерно равна произведению  $\lambda_{ji}\Delta t$ . Условная вероятность того, что система, находящаяся в момент времени  $t$  в состоянии  $j$ , к моменту  $t + \Delta t$  перейдет в со-



стояние  $i$ , определяется произведением вероятности состояния  $j$  на вероятность перехода из состояния  $j$  в состояние  $i$ . Таким образом,

$$H_i = H_{ii} + \sum H_{ji};$$

$$P_i(t + \Delta t) = P_i(t)(1 - \sum_{j \neq i} \lambda_{ij} \Delta t) + \sum_{j \neq i} P_j(t) \lambda_{ji} \Delta t.$$

Последнее уравнение можно преобразовать к виду

$$P_i(t + \Delta t) - P_i(t) = \sum a_{ji} P_j(t) \Delta t.$$

При  $\Delta t \rightarrow 0$  получается дифференциальное уравнение, входящее в (1.9):

$$P_i'(t) = \sum a_{ji} P_j(t).$$

При оценке надежности систем с большим сроком службы изменениями вероятностей состояний, как правило, пренебрегают, т. е. рассматривают только асимптотические (стационарные) значения вероятностей. Их можно получить, приравнивая левую часть системы уравнений (2.1) к нулю. В результате (1.9) трансформируется в систему линейных уравнений

$$PA = 0. \tag{1.10}$$

Необходимо заметить, что матрица  $A$  является вырожденной, поэтому одно из уравнений должно быть заменено таким уравнением, чтобы  $\det A \neq 0$ . В частности, дополнительное уравнение может быть получено исходя из равенства единице суммы вероятностей всех состояний

$$\sum P_j(t) = 1. \tag{1.11}$$

В качестве примера можно привести систему с двумя неизвестными элементами (рис. 1.5). Матрица интенсивностей переходов имеет вид

$$A = \begin{vmatrix} -(\lambda_a + \lambda_b) & \lambda_a & \lambda_b & 0 \\ \mu_a & -(\lambda_b + \mu_a) & 0 & \lambda_b \\ \mu_b & 0 & -(\lambda_a + \mu_b) & \lambda_a \\ 0 & \mu_b & \mu_a & -(\mu_a + \mu_b) \end{vmatrix}$$

Отсюда можно записать систему линейных уравнений, описывающую стационарное состояние объекта:

$$-(\lambda_a + \lambda_b) P_0 + \mu_a P_1 + \mu_b P_2 = 0; \tag{1.12}$$

$$\begin{aligned}\lambda_a P_0 - (\lambda_b + \mu_a) P_1 + \mu_b P_3 &= 0; \\ \lambda_b P_0 - (\lambda_a + \mu_b) P_2 + \mu_a P_3 &= 0; \\ \lambda_b P_1 + \lambda_a P_2 - (\mu_a + \mu_b) P_3 &= 0\end{aligned}$$

Одно из уравнений следует заменить уравнением

$$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = 1.$$

Нетрудно получить решение представленной системы уравнений

$$\begin{aligned}P_0 &= \mu_a \mu_b / (\lambda_a + \mu_a) (\lambda_b + \mu_b) = K_{га} K_{гб}; \\ P_1 &= \lambda_a \mu_b / (\lambda_a + \mu_a) (\lambda_b + \mu_b) = K_{на} K_{гб}; \\ P_2 &= \lambda_b \mu_a / (\lambda_a + \mu_a) (\lambda_b + \mu_b) = K_{га} K_{нб}; \\ P_3 &= \lambda_a \lambda_b / (\lambda_a + \mu_a) (\lambda_b + \mu_b) = K_{на} K_{нб},\end{aligned}$$

где  $K_{гi}, K_{ни}$  - соответственно коэффициенты готовности и неготовности элемента  $i$ .

Уравнение  $i$  системы (1.10) можно записать в виде

$$\sum_{j \neq i} P_i(t) \lambda_{ij} = \sum_{j \neq i} P_j(t) \lambda_{ji} \quad (1.13)$$

Произведение  $f_{ij} = P_i(t) \lambda_{ij}$  можно трактовать как частоту перехода от события к событию  $j$  [9, 11]. Отсюда выражение

$$\sum_{j \neq i} P_i(t) \lambda_{ij} = \sum_{j \neq i} P_j(t) \lambda_{ji} \quad (1.13)$$

определяет баланс частот в узле  $i$ :  $\sum_{j \neq i} f_{ij} = \sum_{j \neq i} f_{ji}$  (частота исхода из узла равна

частоте захода в узел). Это соотношение может быть весьма полезным при практическом построении систем уравнений (1.10). Так, в рассмотренном примере баланс частот в узле 1 (состояние  $\bar{a}b$ ) имеет вид  $f_{10} + f_{13} = f_{01} + f_{31}$ , что равноценно  $P_1(\lambda_{10} + \lambda_{13}) = P_0\lambda_{01} + P_3\lambda_{31}$  или  $P_1(\mu_a + \lambda_b) = P_0\lambda_a + P_3\mu_b$ , а это совпадает со вторым уравнением системы (1.12).

Большой интерес представляет частный случай — радиальная диаграмма состояний, связанная с появлением событий в заданной последовательности (рис. 1.6).

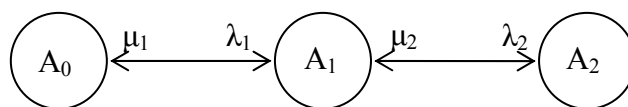


Рис. 1.6. Радиальная диаграмма состояний

Для трех состояний имеем следующую систему алгебраических уравнений, характеризующую стационарный процесс:

$$P_0 + P_1 + P_2 = 1;$$

$$\lambda_1 P_0 = \mu_1 P_1;$$

$$\mu_2 P_2 = \lambda_2 P_1.$$

Из последнего уравнения нетрудно получить

$$P_2 = (\lambda_2 / \mu_2) P_1 = \gamma_2 P_1.$$

Из второго уравнения следует

$$P_1 = \gamma_1 P_0.$$

Обобщая, получаем

$$P_j = \gamma_j P_{j-1}.$$

Таким образом, вероятность  $P_j$  каждого последующего события определяется произведением вероятности предшествующего события на параметр

$$\gamma_j = \lambda_j / \mu_j = K_{ij} / K_{ej}, \quad (1.14)$$

определяемый показателями надежности элемента  $j$ . Данный вывод не означает, что  $P_j$  не зависит от надежности последующих элементов. От вероятностных параметров составных событий зависит вероятность головного события, поскольку  $\sum P_j = 1$ , а, следовательно, и вероятности каждого из состояний системы:

$$P_j = P_0 \prod_{k=1}^j \gamma_k = \frac{\prod_{k=1}^j \gamma_k}{1 + \sum_{s=1}^n \prod_{k=1}^s \gamma_k}$$

### 1.2.2 Частота и продолжительность состояний

По аналогии с понятием частоты и продолжительности отказов вводится понятие частоты и длительности отдельных состояний системы. Частота  $f_i$  появления системы в состоянии  $i$  определяется как ожидаемое число пребывания системы в состоянии  $i$  в единицу времени при достаточно длительных наблюдениях.

Процесс функционирования системы может рассматриваться как альтернирующий — пребывание системы в состоянии  $i$  и вне этого состояния.

Такой процесс является циклическим со средним временем цикла  $T_u$ . Принимая во внимание, что вероятность  $P_i$  состояния  $i$  определяется как отношение средней длительности состояния к длительности цикла  $P_i = T_i/T_u$ , а частота  $f_i = 1/T_u$ , получаем

$$f_i = P_i/T_u.$$

В то же время частоту  $f_i$  можно представить как сумму частот перехода системы из рассматриваемого состояния  $i$  в иные состояния,  $f_i = \sum_{j \neq i} f_{ij}$ .

Принимая во внимание, что  $f_{ij} = \lambda_{ij}P_i, \forall j$ , получаем  $f_i = \sum f_{ij} = P_i \sum \lambda_{ij}$ .

Отсюда нетрудно представить выражение для математического ожидания длительности  $T_i$  состояния  $i$

$$T_i = P_i / f_i = T_u = P_i / f_i = 1 / \sum_{j \neq i} \lambda_{ij},$$

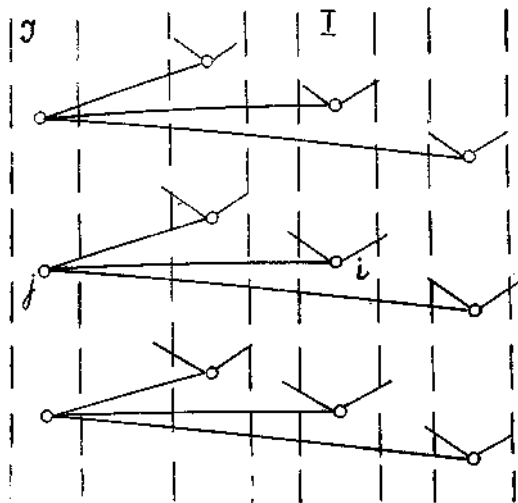


Рис. 1.7. Обобщенная диаграмма состояний

т. е. средняя продолжительность пребывания системы в данном состоянии равна обратной величине суммарной интенсивности выходов из этого состояния.

### Объединение состояний

В электротехнических задачах отказ, как правило, идентифицируется с некоторым множеством состояний, поэтому для определения показателей, характеризующих отказ, следует рассмотреть расчет показателей надежности объединенного состояния. Рассмотрим схему рис. 1.7, в которой несколько состояний объединены в одно совокупное состояние  $J$ . Вероятность этого состояния равна сумме вероятностей всех составляющих событий (все события считаются независимыми):

Частота появления объединенного состояния  $J$  равна сумме частот перехода из состояний  $j \in J$  в любые другие состояния, не принадлежащие множеству  $J$ :

$$f_J = \sum_{j \in J} \sum_{i \notin J} f_{ji} = \sum_{j \in J} P_j \sum_{i \notin J} \lambda_{ji}.$$

Рассмотрим связь объединенного состояния  $J$  с любым состоянием  $i$ , не принадлежащим  $J$ . Интенсивность переходов  $\lambda_{iJ}$  можно вычислить исходя из того, что частота переходов из состояния  $i$  в объединенное состояние должна быть такой же, как суммарная частота переходов от  $i$  ко всем состояниям  $j \in J$  до их объединения, и аналогично — для переходов от  $J$  к  $i$ . Эти требования можно представить как

$$f_{iJ} = P_i \lambda_{iJ} = \sum_{j \in J} f_{ij} = P_i \sum_{j \in J} \lambda_{ij};$$

$$f_{Ji} = P_J \lambda_{Ji} = \sum_{j \in J} f_{ji} = \sum_{j \in J} P_j \lambda_{ji}.$$

Из данных соотношений можно получить эквивалентные интенсивности переходов

$$\lambda_{iJ} = \sum_{j \in J} \lambda_{ij}; \quad (1.15)$$

$$\lambda_{Ji} = \left( \sum_{j \in J} P_j \lambda_{ji} \right) / \sum_{j \in J} P_j. \quad (1.16)$$

Таким образом, интенсивность перехода из отдельного состояния в объединенное равна сумме интенсивностей перехода из данного состояния в состояния, входящие в объединение. Интенсивность перехода из объединенного состояния в некоторое отдельное — средневзвешенной интенсивности, где весовыми коэффициентами являются вероятности состояний.

Обобщая рассмотренный случай связи множества и отдельного состояния на случай связи двух множеств, имеем

$$\lambda_{IJ} = f_{IJ} / P_I = \left( \sum_{i \in I} f_{iJ} \right) / P_I = \left( \sum_{i \in I} P_i \sum_{j \in J} \lambda_{ij} \right) / \sum_{i \in I} P_i;$$

$$\lambda_{JI} = f_{JI} / P_J = \left( \sum_{j \in J} f_{ji} \right) / P_J = \left( \sum_{j \in J} P_j \sum_{i \in I} \lambda_{ji} \right) / \sum_{j \in J} P_j$$

Эти формулы по своей структуре совпадают с (1.15), (1.16), однако здесь вместо отдельного состояния записано объединенное.

Представленные формулы позволяют выполнять объединение состояний с указанием показателей переходов между объединенными состояниями.

### 1.2.3 Последовательное соединение элементов

Радиальной схеме электроснабжения (последовательное соединение элементов, рис. 1.8) соответствуют следующие логико-функциональные состояния:

$A_0$  – все элементы исправны и находятся в работоспособном состоянии ИИ;  $A_i$  – отказ элемента  $i$ ,  $i = 1, \dots, n$  (отключение элемента с разрывом последовательной цепи), остальные элементы при этом находятся в исправном состоянии, т. е. восстановление элемента приводит к готовности всей цепи.

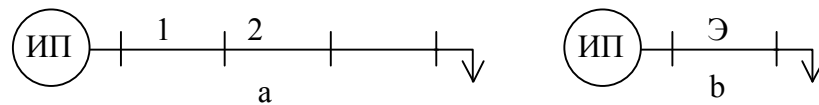


Рис. 1.8. Радиальная электрическая схема

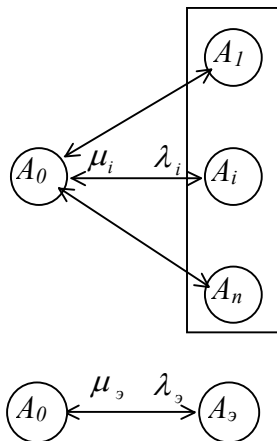


Рис. 1.9. Последовательное соединение элементов

Одновременный отказ нескольких элементов считается невозможным событием. Таким образом, для последовательной цепи можно указать  $n + 1$  функциональных состояний (рис. 1.9). Считая процессы отказа и восстановления простейшими, для стационарного состояния последовательной цепи можно записать следующую систему алгебраических уравнений:

$$P_i = \gamma_i P_0, \quad i = 1, \dots, n; \quad P_0 + \sum P_i = 1,$$

где  $\gamma_i = \lambda_i / \mu_i = \lambda_i \tau_i$  — относительная длительность состояния отказа элемента. Отсюда следует

$$P_0 = K_2 = 1 / \left( 1 + \sum_{i=1}^n \gamma_i \right); \quad P_j = \gamma_j / \left( 1 + \sum_{i=1}^n \gamma_i \right), \quad j = 1, \dots, n.$$

При замене последовательной цепи одним эквивалентным элементом с простейшими процессами отказа и восстановления соответствующие показатели имеют вид:

$$P_0 = 1 / (1 + \gamma_s); \quad P_s = \gamma_s / (1 + \gamma_s).$$

Из эквивалентности преобразования следует тождественность вероятностей работоспособного состояния для исходной и эквивалентной схем. Отсюда,

$$1/(1 + \gamma_{\vartheta}) = 1/\left(1 + \sum_{i=1}^n \gamma_i\right)$$

или

$$\gamma_{\vartheta} = \sum_{i=1}^n \gamma_i. \quad (1.17)$$

К несколько иному результату приводит подход, основанный на использовании коэффициентов готовности. Известно, что коэффициент готовности элемента определяется вероятностью застать элемент в произвольный момент времени в исправном состоянии. О готовности цепи из последовательно соединенных элементов говорят, если в состоянии готовности находится каждый ее элемент. При отождествлении коэффициентов готовности и вероятности безотказной работы коэффициент готовности всей цепи определяется произведением коэффициентов готовности отдельных элементов. Так, для цепи из двух элементов

$$K_c = K_{ca}K_{cb} = \frac{1}{(1 + \gamma_a)(1 + \gamma_b)} = \frac{1}{(1 + \gamma_{\vartheta})} \quad (1.18)$$

что приводит к соотношению

$$\gamma_{\vartheta} = \gamma_a + \gamma_b + \gamma_a\gamma_b$$

Данная формула отличается от ранее выведенной (1.17) членом  $\gamma_a\gamma_b$ . Отличие объясняется тем, что при выводе последнего выражения неявно допускается состояние, связанное с одновременным отказом нескольких элементов. Задача эквивалентирования последовательной цепи одним элементом, отключение которого непременно приводит к разрыву всей цепи, требует исключения совместных отказов, поэтому при эквивалентировании следует пользоваться формулой (1.17). Однако часто бывает удобно оперировать вероятностями отказов элементов. Ошибка при использовании формулы (1.18) незначительна, поскольку реально  $\gamma \ll 1$ .

Состояния  $A_i, i = 1, \dots, n$  одинаковы по своим функциональным последствиям — они приводят к разрыву цепи, поэтому, объединяя указанные события в эквивалентное состояние отказа, в соответствии с методом пространства состояния можно записать

$$\lambda_{\text{э}} = \sum_{i=1}^n \lambda_i. \quad (1.19)$$

Подставляя в формулу (1.17) значения  $\gamma_i$ , выраженные через  $\lambda_i$  и  $\tau_i$ , а также используя формулу (1.19) эквивалентной интенсивности, получаем выражение для эквивалентного времени восстановления последовательной цепи:

$$\tau_{\text{э}} = \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i \tau_i \right) / \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i \right).$$

Таким образом, эквивалентная длительность восстановления является средневзвешенной от  $\tau_i$  с весами  $\lambda_i$ , что хорошо согласуется с физическими представлениями.

Частота состояния отказа радиальной схемы электроснабжения равна сумме частот отказов составных элементов.

$$f_{\text{э}} = P_0 \sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n f_i.$$

В качестве примера рассмотрим эквивалентирование схемы из трех последовательных элементов (линия электропередач с двумя выключателями) с исходными данными, представленными в табл. 1.5. Здесь же показано вычисление ряда промежуточных и эквивалентных параметров. Результирующая интенсивность отказов, как и показатель  $\gamma_{\text{э}}$ , вычисляется через сумму составных элементов:  $\lambda_{\text{э}} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ ,  $\gamma_{\text{э}} = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ ; длительность восстановления -  $\tau_{\text{э}} = \tau_{\text{э}} / \lambda_{\text{э}}$ ; интенсивность восстановления  $\mu_{\text{э}} = 1 / \tau_{\text{э}}$ ; эквивалентный коэффициент готовности определяется через  $\gamma_{\text{э}}$ :  $K_{\text{э}} = 1 / (1 + \gamma_{\text{э}})$ , хотя достаточно точно этот показатель вычисляется через произведение  $K_{\text{э}} = K_{\text{э}1} K_{\text{э}2} K_{\text{э}3}$ .



Таблица 1.4

Элемент	$\lambda$ , 1/год	$\tau$ , лет/отказ	$\mu=1/\tau$ , 1/год	$\gamma=\lambda\tau$ , о.е.	$K_r=1/(1+\gamma)$ , о.е.
1 (ЛЭП)	1	$10^{-3}$	$10^3$	$10^{-3}$	0,999
2 (Выкл-ль.)	0,1	$3 \cdot 10^{-3}$	$(1/3) 10^3$	$0,3 \cdot 10^{-3}$	0,9997
3 (Выкл-ль.)	0,1	$3 \cdot 10^{-3}$	$(1/3) 10^3$	$0,3 \cdot 10^{-3}$	0,9997
Эквивалент	1,2	$1,33 \cdot 10^{-3}$	$0,752 10^3$	$1,6 \cdot 10^{-3}$	0,9984

### 1.2.4 Параллельное соединение элементов

Рассмотрим применение метода пространства состояний для случая  $n$  параллельно соединенных элементов. Отказ электроснабжения по такой схеме возможен лишь в том случае, когда происходит отказ всех элементов (логическая схема конъюнкции).

Диаграмма состояний из двух параллельных элементов была рассмотрена в п. 1.2.1. Там же показано, что вероятность одновременного отказа элементов определяется произведением коэффициентов неготовности элементов.

Полученные выводы распространяются и на случай произвольного числа элементов

$$K_{нз} = \prod_{i=1}^n K_{ni}. \quad (1.20)$$

Диаграмма состояний для схемы из  $n$  элементов представлена на рис. 1.10, где состояние 0 соответствует готовности всех элементов, состояние  $f$  - отказу всей схемы, состояние  $\bar{i}$  - отказу элемента  $i$  при исправном состоянии всех остальных элементов, состояние  $i$  - готовности элемента  $i$  при отказе всех остальных элементов.

Частота отказов схемы определяется произведением вероятности состояния  $f$  на сумму интенсивностей восстановления составных элементов (эквивалентная интенсивность восстановления)

$$f_n = \prod_{i=1}^n K_{ni} \sum_{i=1}^n \mu_i.$$

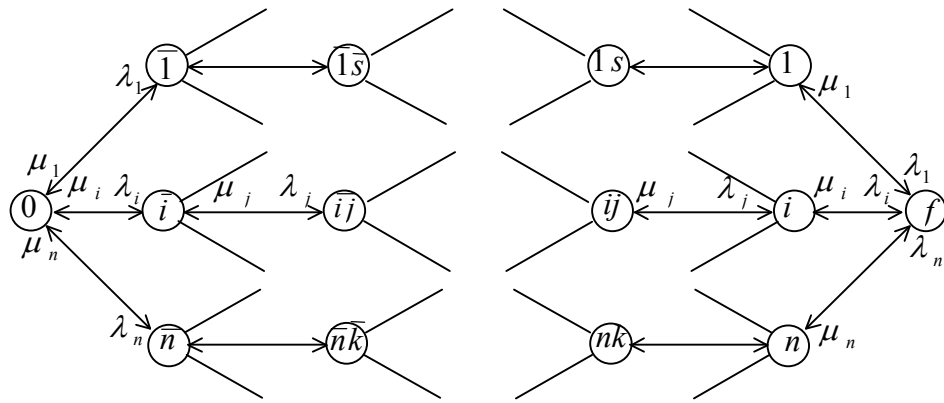


Рис. 1.10. Диаграмма состояний параллельного соединения элементов

Согласно (1.16) интенсивность отказов  $\lambda_{zn}$  определяется как средне-взвешенная от интенсивностей перехода в состояние отказа с весами вероятностей исходных событий

$$\lambda_{zn} = \left( \sum_{j \neq f} P_j \lambda_{jf} \right) / \sum_{j \neq f} P_j = \frac{\sum_{j \neq f} K_{zj} \lambda_j P K_{nj}}{\sum_{j \neq f} P_j}.$$

Более простым является частотный подход, при котором

$$(P_z \lambda_{zn} = K_z \lambda_{zn}) = (P_n \lambda_{nz} = K_n \lambda_{nz}).$$

Отсюда

$$\lambda_{zn} = \frac{K_n}{K_z} \sum \mu_i = \gamma_{\vartheta} \sum \mu_i,$$

При эквивалентировании последовательно соединенных элементов было получено довольно простое выражение (1.17) для параметра  $\gamma_{\vartheta}$ . Нетрудно получить соотношение эквивалентирования для данного параметра при параллельном соединении двух элементов. При большом числе параллельных элементов операция эквивалентирования двух элементов повторяется многократно. Принимая во внимание формулу (1.20) для системы из элементов  $a$  и  $b$ , получаем

$$K_{nz} = \frac{\gamma_{\vartheta}}{1 + \gamma_{\vartheta}} = \frac{\gamma_a}{1 + \gamma_a} \frac{\gamma_b}{1 + \gamma_b}$$

или

$$\frac{1}{1+1/\gamma_3} = \frac{1}{(1+1/\gamma_a)(1+1/\gamma_b)}$$

Отсюда следует

$$1/\gamma_3 = 1/\gamma_a + 1/\gamma_b + 1/\gamma_a\gamma_b$$

Таким образом,

$$\gamma_3 = \frac{\gamma_a\gamma_b}{1+\gamma_a+\gamma_b}$$

При  $\gamma \ll 1$  получаем приближенное соотношение, которое можно использовать в практических расчетах:

$$\gamma_3 = \gamma_a\gamma_b$$

Учитывая, что интенсивность восстановления системы определяется как сумма интенсивностей восстановления элементов (в соответствии с методом пространства состояний),  $\mu_3 = \sum \mu_i$ , получаем выражение для математического ожидания длительности отказа параллельной структуры

$$\tau_3 = 1/\mu_3 = 1/\sum \mu_i$$

В качестве примера рассмотрено эквивалентирование схемы из двух параллельных элементов с исходными данными, представленными в табл. 1.6. Здесь же показано вычисление ряда промежуточных параметров. Эквивалентный коэффициент неготовности вычисляется через произведение  $K_{н3} = K_{н1}K_{н2}$ ; интенсивность восстановления - через сумму  $\mu_3 = \mu_1 + \mu_2$ ; длительность восстановления обратно пропорциональна интенсивности восстановления  $\tau_3 = 1/\mu_3$ ; показатель  $\gamma_3 = K_{н3}/(1-K_{н3})$ ; интенсивность отказов лучше определять через  $\gamma_3$ :  $\lambda_3 = \gamma_3/\tau_3$ .

Таблица 1.5

Элемент	$\lambda$ , (1/год)	$\tau$ , лет/отказ	$\mu=1/\tau$ ,(1/год)	$\gamma=\lambda\tau$ , о.е.	$K_n=\gamma/(1+\gamma)$ , о.е.
1	1	$10^{-3}$	$10^3$	$10^{-3}$	$0,999 \cdot 10^{-3}$
2	0,5	$10^{-3}$	$10^3$	$0,5 \cdot 10^{-3}$	$0,49975 \cdot 10^{-3}$
Эквивалент	$0,9985 \cdot 10^{-3}$	$0,5 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^3$	$0,49925 \cdot 10^{-3}$	$0,49925 \cdot 10^{-3}$

Замечательным математическим аппаратом, позволяющим получать удовлетворительные результаты на первых этапах исследования объекта или системы, является статистическое моделирование (метод Монте-Карло). Основное достоинство этого метода - возможность моделировать динамические состояния системы, случайные процессы, а также такие функциональные свойства объектов и систем, которые пока еще мало изучены и не описаны аналитически. Например, если мы не знаем, какой функцией распределения описывается дефицит мощности в энергосистеме, но знаем вероятности нагрузки и отказа генераторов, то интересующую нас функцию можно получить достаточно точно с помощью большого числа испытаний, в каждом из которых моделируются состояния генераторов и величина нагрузки.

Основная идея метода статистических испытаний (МСИ) заключается в том, что многократно на ЭВМ с помощью генератора равномерно распределенных псевдослучайных чисел проигрывается ситуация, которая с той или иной вероятностью может произойти. При этом вычисляются статистические оценки вероятностных показателей или параметров анализируемых случайных событий или процессов. Метод может быть использован для моделирования

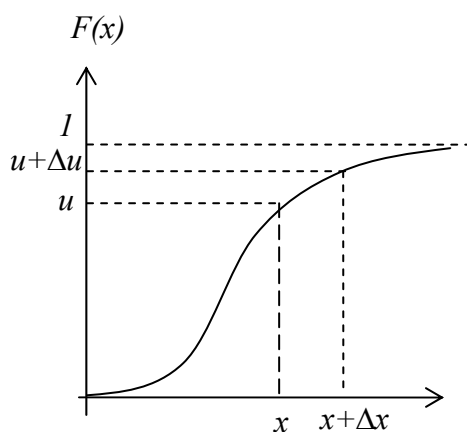


Рис. 2.1. Соответствие переменных

не только равномерно распределенных случайных величин, но и любых других распределений. Для этого достаточно знать аналитическое представление функции распределения.

Рассмотрим случайную переменную  $X$ , имеющую функцию распределения  $F(x)$  - рис. 2.1. Поставим в соответствие каждому значению  $x$  величину  $u=F(x)$ .

По определению функции распределения

$$P(x < X \leq x + \Delta u) = P(u < U \leq u + \Delta u) = \Delta u .$$

Отсюда случайная величина  $U$  распределена равномерно на отрезке  $[0,1]$ , что дает возможность получать реализации случайной величины, распределенной по заданному закону. При генерации псевдослучайного числа  $0 \leq u \leq 1$  моделируемая величина  $x^*$  определяется как квантиль вероятности:  $F(x^*)=u$ .

Наиболее эффективно метод Монте-Карло используется в том случае, когда математическое ожидание некоторой многомерной случайной величины

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, x_2, \dots, x_N) d\Phi(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

представляется в виде выборочного среднего значения

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_N^{(k)} \right),$$

где  $(x_1, x_2, \dots, x_N)$  - некоторая  $N$ -мерная случайная величина с известной функцией распределения  $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_N)$ . В частности, одномерный интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) d\Phi(x)$$

оценивается с помощью среднего

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi \left( x^{(k)} \right).$$

Дисперсия этой оценки по случайной выборке  $\left( x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)} \right)$

$$D\bar{\varphi} = \frac{1}{n} D\varphi(x)$$

стремится к нулю по мере увеличения  $n$ . При этом ошибка оценки, выражаемая через среднее квадратичное отклонение, убывает только как  $1/\sqrt{n}$ .

## 2.1 Число испытаний

Для достижения требуемой точности моделирования  $\varepsilon$  необходимо, чтобы  $n$  было достаточно велико. Но насколько велико? Ответить на этот вопрос позволяет **интегральная предельная теорема Муавра-Лапласа**: Если в последовательности независимых испытаний вероятность события  $A$  равна  $p$ ,  $0 < p < 1$ , то вероятность того, что число  $m$  появления события  $A$  в  $n$  испытаниях удовлетворяет неравенствам

$$a \leq \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \leq b \quad (2.1)$$

при больших  $n$  близка к

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad (2.2)$$

т.е. распределение  $m$  при достаточно больших  $n$  описывается нормальным распределением с МО  $M=np$  и дисперсией  $D=npq$ ,  $q=1-p$ .

Для обеспечения заданной точности моделирования необходимо выполнение условия  $|\bar{p} - p| \leq \delta$ , или иначе  $(-\delta) \leq \frac{m}{n} - p \leq \delta$ . Данное неравенство можно привести к виду (2.1)

$$-\frac{\delta n}{\sqrt{npq}} \leq \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{\delta n}{\sqrt{npq}}.$$

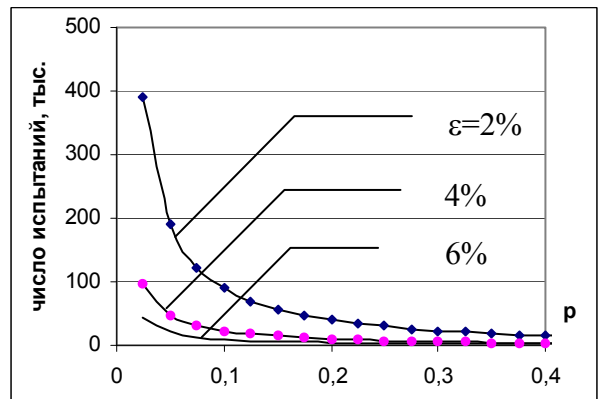
При заданной вероятности  $P$  (достаточно большое число) обеспечения точности моделирования нетрудно определить симметричные пределы  $\pm(k = \delta n / \sqrt{npq})$  в интеграле (2.2), что позволяет найти требуемую величину  $n = \frac{k^2}{\delta^2} pq$ .

В качестве примера определим сколько требуется испытаний, чтобы расчетная средняя величина с вероятностью  $P=0,96$  (критерий  $2\sigma$ ,  $k=2$ ) не отличалась от теоретической величины  $p$  более, чем на  $\varepsilon = 5\%$ . При указанных условиях

$$n \geq \frac{k^2}{(\varepsilon p)^2} pq = \frac{k^2}{\varepsilon^2 p} (1 - p). \quad (2.3)$$

В частности, при  $p=0,04$  (отказ генератора)

$n \geq 4 * 0,95 / (0,05^2 * 0,04) = 380000$  испытаний. На рис. 2.2 представлено семейство кривых, определяющих необходимое число испытаний в зависимости



сти от точности моделирования  $\varepsilon$  и вероятности события  $p$ . Нетрудно видеть,

что с уменьшением вероятности моделируемой величины число испытаний увеличивается обратно пропорционально вероятности.

Рис. 2.2. Зависимость числа испытаний от вероятности события и точности расчетов

Интересно заметить, что среднее число появления редкого события  $m = np \approx k^2 / \varepsilon^2$  мало зависит от  $p$ , и это свойство можно использовать в качестве критерия окончания процесса моделирования.

Приведенные оценки числа испытаний носят, скорее, теоретическую, нежели практическую направленность, поскольку наперед не задана истинная вероятность моделируемой величины. В то же время, если известна минимальная оценка анализируемой величины,  $p^* \leq p$ , то необходимое число испытаний можно определить по формуле (2.3) при замене  $p$  на  $p^*$ .

Другим путем определения необходимого числа испытаний является использование критериев сходимости анализируемой величины к своему пределу, например изменение рассматриваемого параметра после следующих  $k$  испытаний не должно превышать допустимую величину. При этом число  $k$  должно быть таким, чтобы рассматриваемое событие при  $k$  испытаниях обязательно произошло хотя бы один раз. Последнее замечание особенно актуально при моделировании редких событий.

Проблема реализации редких событий является самостоятельным направлением статистического моделирования. Рассмотрим один из методов, пригодных для оценивания параметра при малой вероятности его появления.

## 2.2 Метод взвешенных испытаний

Пусть моделируется редкое событие  $X \in B$  с вероятностью

$$p = \int_B f(x)dx = \int \delta_B(x)f(x)dx = E\delta_B(X),$$

где  $\delta_B(x)$  - индикаторная функция,  $\delta_B(x) = 1, x \in B$  и  $\delta_B(x) = 0, x \notin B$ ;  $E$  - знак математического ожидания. Как было отмечено выше, относительная погрешность оценки  $\bar{p} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_B(x^k)$  неограниченно возрастает с уменьшением  $p$  (в статистической модели при очень малых  $p$  событие практически не реализуется). Если  $v(x) \neq 0$  - некоторая дополнительная функция распределения, то очевидно

$$p = \int \delta_B(x) \frac{f(x)}{v(x)} v(x)dx = \int g(x)v(x)dx = Eg(\zeta).$$

Отсюда  $\bar{p} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g(y^{(k)})$  ( $y^{(k)}$  представляют независимые реализации случайного вектора  $\zeta$  с плотностью распределения  $v(x)$ ) также является несмещенной оценкой вероятности  $p$ . При определенном выборе функции  $v(x)$  событие  $\zeta$  не является редким и его реализация методом статистических испытаний становится возможной.

Простейшим примером выбора функции является масштабное увеличение плотности распределения  $f(x)$  в некоторой области  $B \subset B^*$ . Если известна вероятность  $p^*$  области  $B^*$ , то функция  $v(x) = f(x)/p^*$  при  $x \in B^*$  и  $v(x) = 0$  при  $x \notin B^*$  будет плотностью распределения некоторой случайной величины (интеграл от данной функции по всей области равен единице). При статистическом моделировании по  $v(x)$  каждое испытание будет связано с  $x \in B^*$ . По-



сколькx  $B \subset B^*$  существует вероятность принадлежности  $x$  области  $B$ . При этом вероятность  $x \in B$  существенно выше, нежели при моделировании по  $f(x)$ , поскольку  $p^* < 1$  и

$$P\{X \in B\} = \int_{x \in B} v(x) dx = \frac{1}{P^*} \int_{x \in B} f(x) dx.$$

Статистическое моделирование выполняется по следующему сценарию. Строится новая функция распределения  $F^*(x)$ , соответствующая плотности распределения  $v(x) = f(x)/p^*$  (интервал длиной  $p^*$ , соответствующий событию  $B^*$ , растягивается до единичного). Генерируется псевдослучайное число и по функции  $F^*(x)$  определяется моделируемая величина  $y$ , которая затем проверяется на принадлежность области  $B$ . В зависимости от результата происходит накопление частичной суммы  $\sum_{k=1}^n \delta_B(y^k)$ . После заданного числа испытаний вычисляется искомая оценка  $\bar{p} = \frac{P^*}{n} \sum_{k=1}^n \delta_B(y^k)$ .

Недостатком данного подхода является необходимость знания вероятности  $p^*$  и области принадлежности  $B^*$ . В практических расчетах следует учитывать специфику рассматриваемой проблемы при выборе плотности распределения  $v(x)$ .

### 2.3 Чувствительность идентификации

При моделировании случайной величины по некоторому закону распределения в силу нелинейности функции распределения разные диапазоны имеют различающуюся вероятность, а, следовательно, и чувствительность идентификации. Действительно, если в биномиальном распределении ( $n=4$ ,  $q=0,04$ , табл.1.2) на интервал вероятности (0-0,85) приходится одна реализация случайной величины ( $k=0$ ), то на оставшийся интервал – четыре. Степень распознавания событий  $k=3$  и  $k=4$  крайне низка.

Мерой чувствительности идентификации может служить вероятность события или плотность распределения случайной величины. Отсюда возника-

ет проблема, как увеличить чувствительность идентификации маловероятных событий.

С целью анализа точности статистического моделирования был выполнен вычислительный эксперимент, где рассматривалась задача определения гистограммы для группы генераторов. Число отключенных генераторов подчиняется биномиальному распределению. Для системы из 20 генераторов с вероятностью отказа отдельного генератора  $q = 0,05$  выполнено 100 000 испытаний. В данной серии испытаний события  $k > 7$  практически не идентифицируются. Отсюда, если интерес представляет именно этот диапазон числа отключенных генераторов (дефицит мощности в энергосистеме), то стандартный подход статистического моделирования не может быть использован.

Одним из путей решения данной проблемы является аппроксимация плотности распределения, например, логарифмической функцией  $f^*(k) = -\ln(f(k))$ .

Поскольку идентификация события осуществляется по функции распределения, то на рассматриваемом интервале аппроксимации методами численного интегрирования определяется интегральная (кумулятивная) функция распределения  $F^*(k)$ .

В результате испытаний формируется гистограмма, отражающая статистические вероятности  $f_u^*(k)$  моделируемых событий. Однако полученная гистограмма отражает не вероятности, а выбранную функцию от вероятности. Отсюда следует обратное функциональное преобразование  $f_{np}(k) = \exp(-f_u^*(k))$ .

Необходимо отметить, что у рассматриваемого метода есть один недостаток – сумма  $\sum f_{np}(k)$  всех элементов гистограммы не равна единице. Отсюда требуется, например, пропорциональная коррекция ряда.

Описанный подход позволил оценить (идентифицировать) случайные величины с вероятностью порядка  $10^{-26}$ .

Функция  $f^*(k)$  имеет возрастающий характер. Отсюда с возрастанием  $k$  увеличивается чувствительность идентификации с одновременным снижением погрешности оценки моделирования. При использовании простого статистического моделирования с увеличением  $k$  и сопутствующим уменьшением

вероятности погрешность частоты события уходит в бесконечность. При функциональной аппроксимации в рассматриваемом эксперименте максимальная погрешность не превысила 85%.

Нетрудно понять, что аппроксимация функции распределения вносит дополнительную погрешность в области событий с относительно большой вероятностью. Для решения отмеченной проблемы можно предложить комбинированный метод, совмещающий достоинства и недостатки □одернизированного и обычного методов. Его идея заключается в том, что область допустимых значений рассматриваемой случайной величины разбивается на две подобласти – малых и значимых вероятностей. В первой подобласти моделирование осуществляется с использованием аппарата аппроксимации, а во второй – простым моделированием. В результате в проведенном эксперименте максимальная погрешность моделирования снизилась до 50%, что вполне удовлетворительно для большинства задач электроэнергетики.

## 2.4 Проклятие многомерности

Необходимое для обеспечения требуемой точности моделирования число испытаний растет не только по мере уменьшения вероятности, но и с увеличением размерности вектора состояний (проклятие многомерности). Действительно, если оценивается вероятность одновременного наступления двух независимых событий  $\{x_1 \in \Theta_1\}$  и  $\{x_2 \in \Theta_2\}$  с вероятностями соответственно  $p_1$  и  $p_2$ , то результирующая вероятность определяется произведением  $p_c = p_1 p_2$  и именно эта вероятность должна стоять в знаменателе формулы (2.3).

Резюмируя, необходимо отметить, что основной недостаток метода статистических испытаний состоит в том, что для обеспечения нужной точности расчетов требуется большое число испытаний, а следовательно, и большие затраты машинного времени. Вызывает сомнение встречающееся в литературе утверждение, что в практических расчетах балансовой надежности реальных ЭЭС достаточно 1000 испытаний. По нашим оценкам это сотни тысяч. Дан-

ный недостаток существенно ограничивает сферу практического использования метода.

В задачах перспективного развития ЭЭС длительность расчетов не является определяющим фактором, поэтому здесь метод статистических испытаний находит применение. В то же время в задачах эксплуатации ЭЭС его использование ограничено. Расчет балансовой надежности ЭЭС входит как в ту, так и другую группы задач. Модули расчета БН блочно входят, например, в состав программных комплексов планирования и коррекции резервов мощности и графиков капитальных ремонтов основного оборудования ЭЭС [12, 35-37]. Здесь, в силу многовариантности расчетов, предъявляются более жесткие требования к длительности работы блока и использование МСИ нежелательно.

## **2.5 Распределение дефицита мощности**

Для решения задачи БН ЭЭС используются два направления статистического моделирования: моделирование случайных состояний [1, 13, 43, 44], и моделирование случайных процессов [45].

В первом случае при каждом испытании с помощью генератора псевдослучайных чисел определяется случайное состояние каждого элемента – генератор работоспособен или нет, линия электропередачи включена или отключена, нагрузка узла принимает то или иное дискретное состояние и др.

Во втором случае моделируется длительность того или иного состояния каждого элемента ЭЭС, и если известно исходное состояние, то нетрудно получить состояние каждого элемента в произвольный момент времени. Здесь результирующие вероятностные характеристики вычисляются как интегральные на бесконечно большом временном интервале.

В том и другом случаях при состоянии дефицита (нагрузка больше генерации) для определения глубины ограничения потребителя требуется решить вспомогательную задачу – как суммарный дефицит мощности распреде-

ляется между энергосистемами, входящими в состав объединения. Эта задача известна как «распределение дефицита мощности (РДМ)».

В качестве критерия оптимальности, как правило, принимается минимум суммарного ущерба от недоотпуска электроэнергии потребителям. Область допустимых значений определяется балансами мощности в узлах и ограничениями по пропускной способности межсистемных связей. Конкретная форма функционала зависит от принятой стратегии ограничения нагрузки [13].

Существует несколько видов таких стратегий. Одной из них является пропорциональное ограничение – глубина отключения пропорциональна потребляемой мощности. Эта стратегия является отражением регулирующего эффекта нагрузки. При появлении дефицита мощности снижается частота, а вместе с ней и мощность нагрузки.

В чистом виде рассматриваемая стратегия может использоваться только при относительно небольших дефицитах мощности, когда частота снижается в пределах, допустимых ГОСТом на качество электроэнергии, и перетоки мощности по межсистемным электропередачам не превышают предельно допустимые. Если же эти условия не выполняются, то производится регулируемое управление ограничением нагрузки.

К числу регулируемых воздействий относится аварийная частотная разгрузка энергосистемы (АЧР), локализация отдельной части энергосистемы путем диспетчерского или автоматического отключения межсистемных связей (при перегрузке линий, асинхронном режиме, опасности нарушения статической или динамической устойчивости и др.), принудительное диспетчерское отключение потребителей.

В условиях территориальной и экономической дезинтеграции определенный интерес представляют стратегии договорных взаимоотношений [13, 46, 47], “локального эгоизма”, при которой подсистема оказывает помощь лишь при наличии необходимого резерва генерирующей мощности, и др.

Новые экономические принципы входят в противоречие с теми существующими процедурами определения показателей балансовой надежности ЭЭС, которые основаны на оптимизации централизованного распределения резервов и дефицитов мощности в ОЭЭС. Отсюда расчетные процедуры должны быть адаптированы к существующему механизму экономических взаимоотношений.

При любой стратегии ограничения нагрузки требуется проверка допустимости перетока мощности по межсистемным связям с ограниченной пропускной способностью.

### 3.1 Свертка вероятностей

Наиболее признанным как в отечественной, так и зарубежной практике описания функций распределения небаланса мощности является метод вероятностных рядов [1, 6, 8, 11, 13, 30, 32 и др.]. Прежде всего это связано с преимуществами табличной формы представления в ЭВМ нелинейных и дискретных функций распределения. Во-вторых, ВР позволяет записать любое нестандартное распределение вероятностей. В-третьих, технология работы с ВР позволяет достаточно легко реализовать свертку функций распределения при суммировании случайных величин с отличающимися законами распределения. Кроме того, с помощью ВР довольно просто вычисляется широкий спектр вероятностных характеристик (моменты распределения и др.).

Вероятностный ряд представляет совокупность пар (или структур)

$$\left\{ p_j; G_j, j = 1, \dots, J, \sum_{j=1}^J p_j = 1 \right\},$$

где  $p_j$  – вероятность состояния  $j$ , а  $G_j$  – параметр состояния, например, мощность аварийно отключенных генераторов. В общем случае  $G_j$  может представлять вектор параметров состояния.

Функциональное объединение вероятностных рядов при анализе  $\square$ тключенной мощности нескольких генераторных групп сводится к перекрестному произведению вероятностей состояний рассматриваемых рядов и некоторой операции с параметрами. В частности, состояние системы, связанное с отключением мощности  $G_j^1$  (вероятность события  $p_j^1$ ) в первой группе агрегатов и мощности  $G_s^2$  (вероятность  $p_s^2$ ) во второй группе при независимости событий характеризуется парой  $\{ p_j^1 \cdot p_s^2; G_j^1 + G_s^2 \}$ .

При использовании прикладного математического обеспечения, например пакетов Excel, MatLab и др., часто бывает полезна матричная запись произ-

ведения ВР. Представляя компоненты ВР в виде векторов-столбцов  $\vec{p}_1; \vec{p}_2; \vec{G}_1; \vec{G}_2$ , получаем результирующие матрицы

$$P = \vec{p}_1 \vec{p}_2^T; \quad G = \vec{G}_1 \vec{E}_2^T + \vec{E}_1 \vec{G}_2^T,$$

где  $\vec{E}_1, \vec{E}_2$  - векторы из единиц, имеющие ту же размерность, что и соответствующие им векторы  $\vec{G}_1; \vec{G}_2$ .

Далее матрицы преобразуются в векторы и объединяются в ВР. Результирующая совокупность пар упорядочивается и группируется, например, по величине отключенной мощности. В табл. 3.1 приведен пример перемножения двух вероятностных рядов генерации.

Таблица 3.1

Произведение вероятностных рядов

Генератор 1			Генератор 2			Произведение рядов			Результирующий ряд		
Состояние	G <sub>j</sub> , МВт	p, о.е.	Состояние	G <sub>j</sub> , МВт	p, о.е.	Состояние	G, МВт	p, о.е.	№ п.п.	G, МВт	p, о.е.
(0)	0	0,95	(0)	0	0,97	(0,0)	0	0,9215	0	0	0,9215
(1)	5	0,05	(1)	5	0,03	(0,1)	5	0,028	1	5	0,077
						(1,0)	5	0,048	2	10	0,0015
						(1,1)	10	0,0015			
						Сумма		1	Сумма		1

### 3.2 Свертка частот

Для адекватного описания отказов и показателей надежности, в частности для определения ущерба от недоотпуска электроэнергии потребителям, мало вычислить вероятности отдельных состояний, связанных с дефицитом мощности, необходимо знать, насколько часто происходит такая ситуация, какова ее средняя продолжительность. Ответы на эти вопросы дает расчетная процедура "Frequency and duration" (частота и продолжительность) [6 и др. работы авторов Allan R.N., Billinton R., Garver L.L., Hall J.D., Ringlee R.J., Wood A.J.], где в качестве основного используется метод пространства состояний системы.



В расчетах анализируется многомерная таблица интенсивностей переходов из одного состояния в другое [6,11]. В результате определяются область отказа (дефицитного состояния ЭЭС), вероятности и частоты отдельных состояний и выделенных множеств, эквивалентные интенсивности перехода между объединенными состояниями и др. Такой анализ, как отмечают сами авторы, практически не реализуем даже для относительно небольшого числа отличающихся групп генераторов. Именно поэтому метод пространства состояний в основном используется как локальный при обосновании тех или иных расчетных выражений, но не используется в инженерных расчетах надежности сложных систем.

Радиальная структурная схема биномиального распределения позволяет формализовать метод пространства состояний применительно к частотам. С этой целью в вероятностные ряды дополнительно вводятся: частота отказа  $f_j^+ = p_j \lambda_{js}$ ,  $s > j$  (частота перехода в состояние с большей отключенной мощностью); частота восстановления  $f_j^- = p_j \mu_{jk}$ ,  $k < j$  (частота перехода в состояние с меньшей отключенной мощностью); частота состояния

$$f_j = f_j^+ + f_j^- = p_j (\lambda_{js} + \mu_{jk}), \quad s > j, k < j.$$

При этом ВР имеет вид массива структур

$$\{p_j; G_j, f_j, f_j^+, f_j^-, j = 1, \dots, J\}, \quad \sum_{j=1}^J p_j = 1$$

и для определенности может быть назван как частотно-вероятностный ряд (ЧВР).

### 3.2.1 Частота состояний биномиального распределения

Рассмотрим группу однотипных генераторов с характеристиками:  $\lambda$  - интенсивность отказа,  $\mu$  - интенсивность восстановления,  $q = \lambda / (\lambda + \mu)$  - вероятность состояния отказа. Известно, что число отключенных генераторов описывается биномиальным распределением. Диаграмма состояний имеет радиальную структуру (рис. 3.1), где объединенное состояние  $j$  связано с отключением  $j$  генераторов.

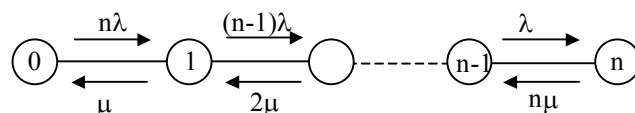


Рис. 3.1. Диаграмма состояний биномиального распределения

Состояние  $j$  представляет собой  $C_n^j$  равновероятных элементарных событий, отличающихся лишь комбинацией отключенных агрегатов. Из каждого элементарного события возможно  $n-j$  переходов направо (отказы) и  $j$  переходов налево (восстановления). Отсюда в силу равновероятности элементарных событий (отказ одного генератора) эквивалентная интенсивность отказов в состоянии  $j$  равна  $(n-j)\lambda$ , а восстановления-  $j\mu$ . Частота состояния  $j$  по определению равна  $f_j = P_j / ((n-j)\lambda + j\mu)$ . В табл. 3.2 приведен пример построения частотного ряда для группы из трех генераторов мощностью 10 МВт с интенсивностью отказа  $\lambda = 0,6$  и интенсивностью восстановления  $\mu = 9,4$ . Последний столбец является также произведением столбца  $\lambda + \mu$  на вероятность соответствующего события.

Таблица 3.2

m	$P_{откл}$	Вероятность	$\lambda$	$\mu$	$\lambda + \mu$	$f^+$	$f^-$	$f = f^+ + f^-$
0	0	0,830584	1,8	0	1,8	1,49505	0	1,4950512
1	10	0,159048	1,2	9,4	10,6	0,19086	1,49505	1,6859088
2	20	0,010152	0,6	18,8	19,4	0,00609	0,19086	0,1969488
3	30	0,000216	0	28,2	28,2	0	0,00609	0,0060912

### Произведение частотно-вероятностных рядов

Как ранее было отмечено, в процессе перемножения двух вероятностных рядов рассматривается композиционное объединение состояния  $i \in I$  из первой группы и состояния  $j \in J$  из второй. В результате образуется новое состояние  $ij$  с вероятностью  $p_{ij} = p_i p_j$ . Для каждого из составных состояний существуют интенсивности переходов  $\lambda_{ik}, i, k \in I$  и  $\lambda_{js}, j, s \in J$  (рис. 3.2). Любой из указанных переходов означает выход из объединенного состояния. Отсюда частота нового состояния

$$f_{ij} = p_i p_j \left( \sum_{k \in I} \lambda_{ik} + \sum_{s \in J} \lambda_{js} \right) = f_i p_j + p_i f_j \quad (3.1)$$

Интенсивности переходов можно разделить на два класса: переходы в состояния множества (+) с большей и множества (-) с меньшей отключенной мощностью. В этом случае выражение (3.1) трансформируется к виду

$$f_{ij} = p_i p_j \left( \left( \sum_{k \in I^+} \lambda_{ik} + \sum_{k \in I^-} \lambda_{ik} \right) + \left( \sum_{s \in J^+} \lambda_{js} + \sum_{s \in J^-} \lambda_{js} \right) \right) = f_i^+ p_j + p_i f_j^+ + f_i^- p_j + p_i f_j^-.$$

Отсюда

$$f_{ij}^+ = f_i^+ p_j + p_i f_j^+; \quad f_{ij}^- = f_i^- p_j + p_i f_j^-.$$

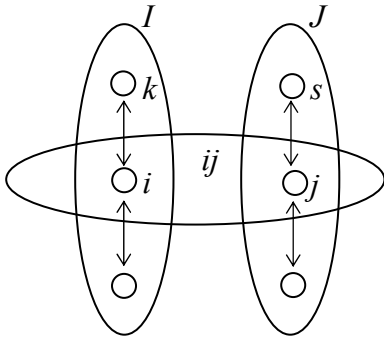


Рис. 3.2. Свертка ВР

Если составляющие ВР рассматривать как векторы-столбцы  $\vec{p}; \vec{f}; \vec{f}^+; \vec{f}^-$ , то матрицы частот, независимо от вида частоты (отказов -  $\{f_{ij}^+\}$ , восстановлений -  $\{f_{ij}^-\}$ , суммарная -  $\{f_{ij}\}$  (обобщенный параметр  $\{II_{ij}\}$ )), имеют одинаковую расчетную структуру

$$\{II_{ij}\} = \vec{p}_A \vec{P}_B^T + \vec{P}_A \vec{p}_B^T,$$

где индексы А, В означают принадлежность к ВР А или В.

В процессе сжатия результирующего вероятностного ряда (по критерию равенства мощности) происходит аддитивное объединение новых состояний. Между объединяемыми состояниями не существует непосредственных переходов (для перехода из одного нового состояния в другое требуется, по крайней мере, два перехода: один в первой группе генераторов и другой - во второй (рис. 3.3)).

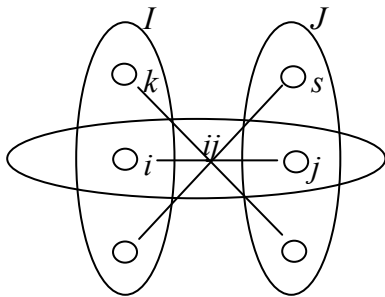


Рис. 3.3. Аддитивное объединение событий

В этом случае вероятность объединения равна сумме вероятностей, а частота (независимо от ее вида) объединения - сумме частот объединяемых состояний.

### 3.2.2 Коррекция ВР при отключении агрегатов

Состав располагаемых для покрытия нагрузки генерирующих агрегатов ЭЭС меняется на рассматриваемом временном интервале в зависимости от состава выведенных в плановый ремонт агрегатов. При этом существует базовый состав, неизменный на всем интервале. С целью экономии машинного времени имеет смысл хранить ВР базового состава. ВР генерации текущего момента формируется путем свертки ВР базового состава с ВР дополнительных агрегатов, включенных только в данный момент.

Другим путем построения текущего ВР является коррекция ВР предыдущего момента. Этот подход более перспективен, поскольку составы включенного оборудования двух смежных моментов отличаются незначительно. Однако здесь появляется проблема коррекции ВР при отключении агрегатов («деление» ВР). Для ее решения может быть использована рекуррентная процедура, основанная на анализе кумулятивных функций (КФ).

#### *Вероятность состояний*

При подключении группы агрегатов с ВР  $\{G_i^{(2)}, p_i^{(2)}, i=1, \dots, n_2\}$  к базовой структуре с ВР  $\{G_i^{(1)}, F_i^{(1)}, i=1, \dots, n_1\}$  новые значения кумулятивной функции определяются по формуле полной суммы

$$F^{(\Sigma)}(x) = \sum_{i=1}^{n_2} p_i^{(2)} F^{(1)}(x - G_i^{(2)}) = p_1^{(2)} F_1^{(1)}(x - G_1^{(2)}) + \sum_{i=2}^{n_2} p_i^{(2)} F^{(1)}(x - G_i^{(2)}),$$

где  $F^{(1)}(z)$  – КФ исходной группы агрегатов. При этом  $F^{(1)}(z) = 0, z < G_1^{(1)}$ .

Для коррекции ВР при отключении группы агрегатов необходимо исходную КФ выразить через новую:

$$F^{(1)}(x - G_1^{(2)}) = \frac{F^{(\Sigma)}(x) - \sum_{i=2}^{n_2} p_i^{(2)} F^{(1)}(x - G_i^{(2)})}{p_1^{(2)}}, \quad x \in \{G_j, j=1, \dots, n_\Sigma\}.$$

В программной реализации анализируемый параметр ограничивается тем минимальным  $x$ , при котором  $F^{(1)}(x - G_1^{(2)}) = 1$ .

В процессе построения результирующего ВР возможны ситуации, когда несколько членов ВР имеют одинаковую КФ. Отсюда результирующий ВР целесообразно сокращать путем отбрасывания членов с одинаковой КФ. Имея кумулятивную функцию, нетрудно получить вероятности дискретных состояний.

### Частота

При свертке двух ЧВР  $\{G_i^{(1)} p_i^{(1)} f_i^{(1)}, i=1, \dots, n_1\}$ ,  $\{G_i^{(2)} p_i^{(2)} f_i^{(2)}, i=1, \dots, n_2\}$  результирующая частота состояний (отказов, восстановлений) определяется выражением

$$f_k^{(\Sigma)} = \sum_{G_i^{(1)} + G_j^{(2)} = G_k^{(\Sigma)}} f_{ij}^{(\Sigma)} = \sum_{G_i^{(1)} + G_j^{(2)} = G_k^{(\Sigma)}} p_i^{(1)} f_j^{(2)} + p_j^{(2)} f_i^{(1)}, \quad k=1, \dots, K.$$

Рекуррентной процедурой при известных ЧВР  $\{G_k^{(\Sigma)} p_k^{(\Sigma)} f_k^{(\Sigma)}, k=1, \dots, K\}$   $\{G_i^{(2)} p_i^{(2)} f_i^{(2)}, i=1, \dots, n_2\}$  и ВР  $\{G_i^{(1)} p_i^{(1)}, i=1, \dots, n_1\}$  нетрудно определить неизвестные частотные составляющие первого ЧВР. Действительно, первая компонента частотного ряда

$$f_1^{(1)} = \frac{f_1^{(\Sigma)} - p_1^{(1)} f_1^{(2)}}{p_1^{(2)}}. \quad (3.2)$$

В процессе последовательного увеличения индекса результирующего ЧВР встречается не более одной неизвестной составляющей частоты первого ЧВР. Это полностью решает задачу «деления» ЧВР. Расчетное выражение для определения частоты имеет относительно сложную математическую, но не очень сложную алгоритмическую структуру

$$f_{i \max}^{(1)} = \frac{f_k^{(\Sigma)} - \sum_{\substack{G_i^{(1)} + G_j^{(2)} = G_k^{(\Sigma)} \\ i \neq i \max}} p_i^{(1)} f_j^{(2)} + p_j^{(2)} f_i^{(1)} - p_{i \max}^{(1)} f_{j(i \max)}^{(2)}}{p_{j(i \max)}^{(2)}}, \quad k=2, \dots, K,$$

где  $i \max = \max\{i : G_i^{(1)} + G_j^{(2)} = G_k^{(\Sigma)}\}$ ,  $G_{i \max}^{(1)} + G_{j(i \max)}^{(2)} = G_k^{(\Sigma)}$ .

В качестве примера рассмотрим свертку двух ЧВР (табл. 3.3) и последующее «деление» результирующего ЧВР.

В процессе «деления» ВР (отключение группы генераторов, представленных ВР2) КФ  $F^{(l)}(x)$  определяется при изменении  $x \in \{G_i^{(\Sigma)}, i = 1, \dots, 5\}$ :

при  $x=30$ :  $F^{(l)}(30-20=10) = F^{(\Sigma)}(30) / p_1^{(1)} = 0,03 / 0,3 = 0,1$ .

при  $x=40$ :  $F^{(l)}(40-20=20) = [F^{(\Sigma)}(40) - p_2^{(2)} F^{(l)}(40-30)] / p_1^{(1)} = (0,18 - 0,6 \cdot 0,1) / 0,3 = 0,4$ .

при  $x=50$ :  $F^{(l)}(50-20=30) = [F^{(\Sigma)}(50) - p_2^{(2)} F^{(l)}(50-30) - p_3^{(2)} F^{(l)}(50-40)] / p_1^{(1)} = (0,55 - 0,6 \cdot 0,4 - 0,1 \cdot 0,1) / 0,3 = 1$ .

Таблица 3.3

ВР1				ВР2				Результирующий ВР			
$G^{(1)}$	$p^{(1)}$	$f^{(1)}$	$F^{(1)}$	$G^{(2)}$	$p^{(2)}$	$f^{(2)}$	$F^{(2)}$	$G^{(\Sigma)}$	$p^{(\Sigma)}$	$f^{(\Sigma)}$	$F^{(\Sigma)}$
10	0,1	2	0,1	20	0,3	2	0,3	30	0,03	0,8	0,03
20	0,3	3	0,4	30	0,6	2	0,9	40	0,15	2,9	0,18
30	0,6	6	1	40	0,1	5	1	50	0,37	6,1	0,55
								60	0,39	6,6	0,94
								70	0,06	3,6	1

Дальнейшие вычисления лишены смысла. Полученные величины полностью совпадают с КФ ВР1.

Согласно (3.2)

$$f_1^{(1)} = \frac{f_1^{(\Sigma)} - p_1^{(1)} f_1^{(2)}}{p_1^{(2)}} = (0,8 - 0,1 \cdot 2) / 0,3 = 2.$$

В расчетной формуле для  $f^{(\Sigma)}(40)$

$$f^{(\Sigma)}(40) = p^{(1)}(10) f^{(2)}(30) + f^{(1)}(10) p^{(2)}(30) + p^{(1)}(20) f^{(2)}(20) + f^{(1)}(20) p^{(2)}(20)$$

фигурирует единственная неизвестная величина  $f^{(1)}(20)$ , которую следует определить:

$$f^{(1)}(20) = (f^{(\Sigma)}(40) - p^{(1)}(10) f^{(2)}(30) - f^{(1)}(10) p^{(2)}(30) - p^{(1)}(20) f^{(2)}(20)) / p^{(2)}(20) = (2,9 - 0,1 \cdot 2 - 2 \cdot 0,6 - 0,3 \cdot 2) / 0,3 = 3.$$

Аналогично

$$f^{(1)}(30) = (f^{(\Sigma)}(50) - p^{(1)}(10) f^{(2)}(40) - f^{(1)}(10) p^{(2)}(40) - p^{(1)}(20) f^{(2)}(30) - f^{(1)}(20) p^{(2)}(30) - p^{(1)}(30) f^{(2)}(20)) / p^{(2)}(20) = (6,1 - 0,1 \cdot 5 - 2 \cdot 0,1 - 0,3 \cdot 2 - 3 \cdot 0,6 - 0,6 \cdot 2) / 0,3 = 6.$$

Полученные частоты полностью совпадают с частотами ЧВР1.

### 3.2.3 Частота захода

Принцип суммирования частот не может быть применен при сжатии вероятностного ряда по интервальному признаку  $\underline{P} \leq P \leq \bar{P}$ , так как здесь возможны переходы внутри объединения. Поскольку интенсивности переходов между состояниями результирующего ряда неизвестны (отказ от построения диаграммы состояний), то определение частот объединенных состояний на основе анализа интенсивностей перехода не представляется возможным. Решение проблемы видится через использование частот отказа и частот восстановления.

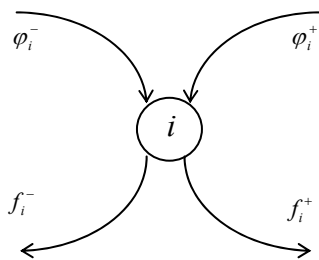


Рис. 3.4. Частоты исхода и захода

Дополнительно к частоте отказа  $f_i^+$  и восстановления  $f_i^-$  (выход из состояния  $i$ ) введем понятие частоты появления состояния  $i$  из-за отказа ( $\varphi_i^-$ ) или восстановления ( $\varphi_i^+$ ) какого-либо агрегата (частота захода, рис. 3.4).

Понятно, что частота состояния равна не только суммарной частоте исхода, но и суммарной частоте захода  $f_i = f_i^+ + f_i^- = \varphi_i^+ + \varphi_i^-$ . Представляет интерес взаимосвязь

частот исхода и захода.

Для стационарного режима состояний системы выполняется баланс частот в каждом узле. В радиальной структуре биномиального распределения (рис. 3.1) отказ в состоянии  $i$  означает переход в состояние  $i+1$ , а восстановление в состоянии  $i+1$  означает переход в состояние  $i$ . Отсюда в радиальной схеме имеет место еще и баланс перехода между соседними состояниями.

В силу разного обозначения одного и того же потока  $f_i^+ = \varphi_{i+1}^-$ ;  $f_{i+1}^- = \varphi_i^+$ . Из баланса частот переходов между соседними состояниями (радиальная структура), а также из только что представленных равенств следует

$$f_i^+ = f_{i+1}^- = \varphi_i^+; \quad \varphi_{i+1}^- = \varphi_i^+ = f_{i+1}^- \quad (3.3)$$

Таким образом, частота исхода из состояния  $i$  в направлении множества  $I^+$  состояний с большей величиной отключенной мощности (исход направо) равна частоте захода из  $I^+$  в рассматриваемое состояние  $f_i^+ = \varphi_i^-$  (заход справа).

Принимая во внимание произвольность символа  $i$ , из последней цепи равенств (3.3) делается симметричный вывод: частота исхода налево равна частоте захода слева.

### Произведение вероятностных рядов

Полученный качественный вывод распространяется не только на одногрупповое биномиальное распределение, но и на более широкий класс ВР. Рассмотрим вероятностный ряд, полученный в результате свертки двух биномиальных распределений.

Выход из состояния  $ij$  в сторону меньшей отключенной мощности (налево) связан с восстановлением одного из агрегатов первой или второй группы (интенсивность перехода зависит от рассматриваемого состояния). Следует отметить, что состояние  $ij$  является не аддитивным объединением двух состояний  $i$  и  $j$ , но качественно новым монолитным состоянием с вероятностью  $p_{ij}$ . Отсюда частота восстановления

$$f_{ij}^- = p_{ij}(\lambda_{i,i-1}^{(1)} + \lambda_{j,j-1}^{(2)}) = p_i p_j (\lambda_{i,i-1}^{(1)} + \lambda_{j,j-1}^{(2)}) = p_i f_{j(2)}^- + p_j f_{i(1)}^-, \quad (3.4)$$

где обозначения  $^{(1)}, ^{(2)}$  определяют группу генераторов.

Появление состояния  $ij$ , при отказе какого-либо агрегата (переход слева) возможно, если в состоянии  $i-1, j$  произошел отказ агрегата первой группы или в состоянии  $i, j-1$  произошел отказ агрегата второй группы (рис. 3.5).

Р откл		2-я группа		
		0	20	40
1-я группа	0	0	20	40
	10	10	30	50
	20	20	40	60
	30	30	50	70

Рис. 3.5. Переходы при свертке ВР

Левая (со стороны меньшей отключенной мощности) частота захода в состояние  $ij$



$$\varphi_{ij}^- = p_{i-1,j} \lambda_{i-1,i}^{(1)} + p_{i,j-1} \lambda_{j-1,j}^{(2)} = p_j f_{i-1,(1)}^+ + p_i f_{j-1,(2)}^+ \quad (3.5)$$

Сравнивая (3.4), (3.5) и принимая во внимание ключевое соотношение (3.3), получаем  $f_{ij}^- = \varphi_{ij}^-$ . Из определения суммарной частоты состояния следует аналогичное соотношение для правых частот  $f_{ij}^+ = \varphi_{ij}^+$ . Отсюда доказано утверждение, которое можно рассматривать как теорему: **В расширенном вероятностном ряде, полученном в результате свертки биномиальных распределений, в любом состоянии частота левого (правого) исхода равна частоте левого (правого) захода.**

Принимая во внимание аддитивность вероятности и частоты, нетрудно убедиться в **равенстве односторонних частот исхода и захода для объединенного** (по критерию равенства отключенной мощности) **состояния.**

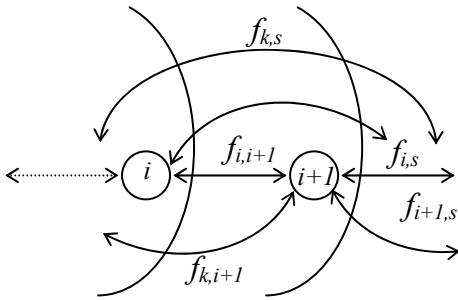


Рис. 3.6. Частота объединения

Методом индукции данное утверждение распространяется на произведение произвольных вероятностных рядов, полученных в результате свертки биномиальных распределений.

### 3.2.4 Частота объединения

Введение понятия частот захода сделано только для того, чтобы обосновать основные расчетные соотношения для частоты объединенного состояния. Как правило, при расчете балансовой надежности интерес представляют не столько произвольные объединения, сколько объединения в конце или начале ВР. Именно этот частный случай объединения мы и рассмотрим. При двух выделенных множествах (начало и конец ВР) частоты каждого из множеств (перехода из одного множества в другое) одинаковы. Для определения численного значения частоты рассмотрим рекуррентную процедуру определения частоты  $\Psi_i^+$  объединения состояний, в которых отключенная генерирующая мощность не больше  $G_i$ .

Считаем, что уже определены частоты отказа и восстановления каждого состояния. Для первого левого состояния ВР  $\Psi_0^+ = f_0 = f_0^+$ . Предположим, что уже получена  $\Psi_i^+$ . Рассмотрим определение  $\Psi_{i+1}^+$ . Величина  $\Psi_i^+$ . Определяется как сумма частот перехода из состояний  $k \in I$  (в том числе и из состояния  $i$ ) в состояние  $i+1$  и в состояния  $s \notin I, s \neq i+1$ :

$$\Psi_i^+ = \sum_{k \in I} f_{k,i+1}^+ + \sum_{k \in I, s \notin I, s \neq i+1} f_{k,s}^+. \quad (3.6)$$

По аналогии частота  $\Psi_{i+1}^+$  объединенного состояния  $I+I$  включает в себя все правые переходы из множества  $I$  в состояния  $s \notin I, s \neq i+1$ . Кроме того, сюда добавляются правые переходы из состояния  $i+1$

$$\Psi_{i+1}^+ = f_{i+1}^+ + \sum_{k \in I, s \notin I, s \neq i+1} f_{k,s}^+.$$

С учетом (3.6) можно записать

$$\Psi_{i+1}^+ = \Psi_i^+ + f_{i+1}^+ - \sum_{k \in I} f_{k,i+1}^+.$$

Вычитаемое является левой частотой захода в состояние  $i+1$

$$\Phi_{i+1}^- = \sum_{k \in I} f_{k,i+1}^+.$$

Согласно теореме при свертке биномиальных распределений левая частота захода  $\Phi_{i+1}^-$  равна левой частоте исхода  $f_{i+1}^-$ . Отсюда рекуррентное соотношение для определения частот объединенных множеств принимает вид

$$\Psi_{i+1}^+ = \Psi_i^+ + f_{i+1}^+ - f_{i+1}^-. \quad (3.7)$$

Полученное соотношение, кстати, показывает, что для определения частот объединенных множеств нет надобности в вычислении и хранении частот захода, необходимы только частоты исхода.

Выражение (3.7) может быть обобщено в аналитическом виде

$$\Psi_i^+ = \sum_{k=1}^i (f_k^+ - f_k^-). \quad (3.8)$$

В рассмотренном подходе объединенное множество расширялось, начиная от состояния с нулевой отключенной мощностью и кончая состоянием пол-

ного отключения всех генераторов. Для определенности частоте объединения при таком подходе присвоен символ +.

При расширении объединяемого множества в обратном порядке рекуррентное соотношение имеет вид

$$\Psi_i^- = \Psi_{i+1}^- + f_{i+1}^- - f_{i+1}^+, \quad (3.9)$$

или

$$\Psi_i^- = \sum_{k=i}^n (f_k^- - f_k^+).$$

Следует обратить внимание на то, что в силу баланса частот  $\Psi_i^+ = \Psi_{i+1}^-$ . Поэтому расчет  $\{\Psi_i^-\}$  по рекуррентному соотношению (3.9) имеет смысл лишь в том случае, если выполняется эквивалентирование правой части рассматриваемого частотно-вероятностного ряда.

В табл. 3.4 приведен пример расчета накопленных частот. В качестве базового рассмотрено биномиальное распределение для группы из трех генераторов по 10 МВт с интенсивностью отказа  $\lambda = 0,6$  и интенсивностью восстановления  $\mu = 9,4$  (табл. 3.1).

Таблица 3.4

№	$P_{откл}$	$p$	$f$	$f^+$	$f^-$	$\Psi^+$	$\Psi^-$	$p_{\Sigma}^+$	$p_{\Sigma}^-$	$\tau = p/f$	$\bar{\tau}^+$ , лет	$\bar{\tau}^-$ , лет
0	0	0,831	1,495	1,495	0,000	1,495	0,000	0,831	1,000	0,556	0,556	8,33E+05
1	10	0,159	1,686	0,191	1,495	0,191	1,495	0,990	0,169	0,094	5,185	0,113
2	20	0,010	0,197	0,006	0,191	0,006	0,191	1,000	0,010	0,052	164,168	0,054
3	30	0,000	0,006	0,000	0,006	0,000	0,006	1,000	0,000	0,035	2,51E+16	0,035

Столбец  $\Psi^+$  вычисляется сверху вниз начиная с  $\Psi_0^+ = f_0^+ = 1,495$ . Последующие величины данного столбца рассчитываются согласно рекуррентному соотношению (3.8). В частности,  $\Psi_1^+ = 1,495 + 0,191 - 1,495 = 0,191$ . Здесь оказалось, что  $\Psi_i^+ = f_i^+$ , и процедура определения накопленных частот не имеет смысла. Это справедливо только для простого биномиального распределения, где переходы

осуществляются только между соседними состояниями. При свертке нескольких распределений такая картина уже не наблюдается.

Столбец  $\Psi^-$  вычисляется снизу вверх начиная с  $\Psi_3^- = f_3^- = 0,006$ . Последующие величины данного столбца рассчитываются согласно рекуррентному соотношению (3.9). В частности,  $\Psi_2^- = 0,006 + 0,191 \cdot 0,006 = 0,191$ .

При объединении независимых событий вероятность объединенного состояния равна сумме вероятностей составных событий. Следующие за накопленной частотой два столбца  $p_\Sigma^+$  и  $p_\Sigma^-$  являются накопленными (соответственно сверху и снизу) вероятностями.

Ранее было сказано, что больший интерес представляют не столько частоты, сколько средние длительности  $\tau = p/f$  состояний. Соответствующий столбец таблицы показывает эти величины. Интересно заметить, что средние длительности монотонно уменьшаются по мере увеличения числа отключенных агрегатов. Последние два столбца показывают средние длительности объединенных состояний:  $\tau^+ = p_\Sigma^+ / \Psi^+$  и  $\tau^- = p_\Sigma^- / \Psi^-$ . Очевидно, что по мере расширения объединенного состояния средняя длительность его возрастает.

### 3.3 Модель нагрузки

Основная задача балансовой надежности заключается в определении вероятностных характеристик небаланса мощности – разности между нагрузкой и генерацией. Одним из основных направлений здесь является адекватное представление нагрузки. Для описания нагрузки, как правило, используются следующие математические модели: детерминированная, простая вероятностная (нормальное распределение), график по продолжительности, вероятностный ряд, структурная схема.

#### *Детерминированная нагрузка*

Представление нагрузки в детерминированном виде используется, в основном, в задачах оперативного управления, где точность прогноза относительно

высока и вариацией нагрузки можно пренебречь. Случайная составляющая небаланса мощности здесь определяется генерирующей составляющей и все результирующие показатели определяются с помощью функции распределения (вероятностного ряда) генерации.

**Пример 3.1.** При задании системы генерации вероятностным рядом (табл. 3.4), считая, что резерв в ЭЭС определяется мощностью одного блока (нагрузка постоянна), определить вероятность, частоту и единичную длительность дефицита мощности.

Согласно табл. 3.4 сразу получаем вероятность дефицита мощности  $P\{N>0\} = p_{\Sigma}^{-}(2) = 0,01$ ; частота дефицита  $f\{N>0\} = \Psi^{-}(2) = 0,006$ ; средняя длительность дефицита  $\tau^{-}(2) = 0,054 \text{ лет} = 19,7 \text{ сут.}$

### 3.3.1 Нагрузка с заданной функцией распределения

Как правило, нагрузка представляется нормальным распределением с заданными математическим ожиданием  $M_L$  и дисперсией  $D_L = \sigma_L^2$ . Ориентация на нормальное распределение частично определяется общепринятым описанием ожидаемого максимума нагрузки концентрированной ЭЭС нормально распределенной случайной величиной [1, 10].

Наиболее эффективное применение данная модель находит в случае, если нормальным распределением описывается не только нагрузка, но и небаланс мощности. Такое допущение правомерно в силу того, что, во-первых, с увеличением числа и разнотипности агрегатов биномиальное распределение аварийно отключенной генерирующей мощности асимптотически приближается к нормальному распределению. Отсюда генерация может быть представлена нормальным распределением. Во-вторых, распределение случайной величины, зависящей от большого числа влияющих факторов (именно такой величиной является НМ), асимптотически приближается к нормальному независимо от того, какие распределения имеют составные факторы и, в-третьих, план капитальных ремон-

тов, а следовательно, и состав основного оборудования ЭЭС часто имеют большую неопределенность.

Отсюда правомерно предположить, что распределение НМ будет мало отличаться от нормального. В этом случае для описания НМ достаточно знать математическое ожидание и дисперсию:

$$M_N = M_L - M_G = M_L - M_{расп} + M_{откл}; \quad D_N = \sigma_N^2 = D_L + D_{откл}.$$

Использование таблиц или функций нормального распределения позволяет определить вероятностные характеристики дефицита мощности.

Модель нормального распределения используется, в основном, для описания максимума нагрузки. Здесь ее правомерность не вызывает сомнения. Кроме того, если расчетный период разбит на интервалы постоянства состава оборудования и нагрузки (задан план капитальных ремонтов основного оборудования и не учитывается конфигурация суточного графика нагрузки), то представление нагрузки на отдельном интервале нормальным распределением также не приводит к большим погрешностям.

**Пример 3.2.** Пусть на некотором интервале постоянства состава агрегатов нагрузка ЭЭС описывается математическим ожиданием и среднеквадратичным отклонением. Для заданного состава агрегатов требуется определить вероятность дефицита мощности.

Исходные данные: состав агрегатов  $10 \cdot 100$  МВт ( $P_{расп} = 1000$  МВт), вероятность отказа (коэффициент неготовности) агрегата  $q = 0,05$ . Параметры нагрузки:  $M_L = 900$  МВт,  $\sigma_L = 50$  МВт.

**Решение.** Математическое ожидание отключенной мощности

$$M_{откл} = nqG = 10 \cdot 0,05 \cdot 100 = 50 \text{ МВт.}$$

Дисперсия отключенной мощности

$$D_{откл} = D_G = nq(1-q)G^2 = 10 \cdot 0,05 \cdot 0,95 \cdot 100^2 = 4750 \text{ МВт}^2.$$

Математическое ожидание небаланса мощности

$$M_N = M_L + M_{откл} - P_{расп} = 900 + 50 - 1000 = -50 \text{ МВт.}$$

Дисперсия небаланса мощности

$$D_N = D_G + D_L = 4750 + 2500 = 7250 \text{ МВт}^2.$$

Среднее квадратичное отклонение небаланса мощности

$$\sigma_N = \sqrt{D_N} = \sqrt{7250} = 85,1 \text{ МВт}.$$

Вероятность дефицита мощности при условии его нормального распределения  $P(N > 0) = 1 - F\left(\frac{0 - (-50)}{85,1}\right) = 1 - F(0,59) = 1 - 0,724 = 0,276$ .

В рассматриваемом примере, несмотря на то, что в системе имеется резерв мощности (один агрегат), существует большой шанс (27,6 %) дефицита мощности.

Представление системы генерации вероятностным рядом позволяет получить более точное значение вероятности появления дефицита мощности. Модель нормального распределения нагрузки и здесь дает возможность получить достаточно простые расчетные выражения. В данном случае функция распределения небаланса мощности  $N$  является смесью НР. Принимая во внимание, что  $N < x$ , если нагрузка  $L < G_i + x$ , получаем

$$F_N(x) = \sum_{i=0}^n p_i F_L(x + G_i),$$

где реализация генерации  $G_i = P_{\text{расп}} - P_{\text{откл}, i}$ .

Для иллюстрации полученных соотношений рассмотрим пример.

**Пример 3.3.** В отличие от примера 3.2 генерация представляется вероятностным рядом  $\{p_i G_{\text{откл}, i}, i = 0, \dots, 10\}$ . Здесь также требуется определить вероятность дефицита мощности.

Искомая вероятность определяется согласно выражению

$$P(N > 0) = \sum_{i=0}^n p_i \left( 1 - F\left(\frac{G_i - M_L}{\sigma_L}\right) \right). \quad (3.10)$$

где  $F(x)$  – функция нормального распределения. Расчеты сведены в табл. 3.5 (состояния 5-9 не показаны, как незначимые).

Более точное представление генерации вероятностным рядом несколько изменило результат в меньшую сторону (25,6%) по сравнению с 27,6 %. В то же

время отличие в результатах первой модели составляет 7,6% , что вполне допустимо для задачи БН. Отсюда нельзя полностью отвергать простейшую модель нормального распределения. Она может быть полезной при экспресс-оценке вероятности дефицита.

Таблица 3.5

$i$	Вероятность $p_i$	$G_{откл\ i}$	$G_i$	$x_i = \left( \frac{G_i - M_L}{\sigma_L} \right)$	$F(x_i)$	$1-F(x_i)$	$p_i (1-F(x_i))$
0	0,598737	0	1000	2	0,97725	0,02275	0,013621
1	0,315125	100	900	0	0,5	0,5	0,157562
2	0,074635	200	800	-2	0,02275	0,97725	0,072937
3	0,010475	300	700	-4	3,17E-05	0,999968	0,010475
4	0,000965	400	600	-6	9,9E-10	1	0,000965
10	9,77E-14	1000	0	-18	0	1	9,77E-14
						Сумма	0,256

Представление нагрузки нормальным распределением не всегда соответствует действительности. Более правильным является использование графика по продолжительности (обычно годовой, но возможно и месячный, недельный, суточный), где по оси абсцисс откладывается время, в течение которого нагрузка больше величины, отложенной по оси ординат.

Если время задано в относительных величинах (отнесено к максимальной продолжительности интервала), то обратный график по продолжительности можно рассматривать как дополнительную функцию распределения нагрузки  $T(L)$ , которая в общем случае отличается от нормального распределения [9]. При заданной мощности генерации  $G$  вероятность дефицита равна  $T(G)$ .

При задании системы генерации вероятностным рядом  $\{p_i G_i\}$  функция распределения небаланса мощности по аналогии с (3.10) имеет вид

$$P(N > 0) = \sum_{i=0}^n p_i T(G_i).$$

Графики по продолжительности используются, как правило, в задачах перспективного планирования, там, где вычисляются интегральные величины



(годовое производство электроэнергии, математическое ожидание недоотпуска электроэнергии потребителю, вероятность дефицита энергии и др.).

Следует быть осторожным при использовании графика по продолжительности для годового интервала. Допущение независимости нагрузки и генерации может привести к существенным погрешностям, поскольку реально рабочая (располагаемая за вычетом ремонтной составляющей) мощность примерно пропорциональна мощности нагрузки [9]. Отсюда между генерацией и нагрузкой наблюдается существенная корреляция, и для описания небаланса мощности требуются более сложные математические модели, учитывающие корреляционные связи.

При описании небаланса мощности  $N=L-G$  вероятностным рядом в совместной модели генерация-нагрузка выполняется свертка двух ВР: нагрузки и генерации. При этом необходимо выделить следующие направления моделирования: нагрузка представлена простым ВР без частоты и частотно-вероятностным рядом, соответствующим некоторой диаграмме состояний.

### ***Простой вероятностный ряд нагрузки***

Дискретизация распределения нагрузки не представляет сложности. Обычно выбирается шаг квантования  $\Delta P$  (например,  $\Delta P = 1, 5, 10$  МВт). Диапазон изменения нагрузки  $(L_{\min}, L_{\max})$  делится на  $K = (L_{\max} - L_{\min}) / \Delta P$ , равных интервалов точками  $k=0, 1, \dots, K$ . Каждому интервалу ставятся в соответствие нагрузка  $L_k = L_{\min} + (k + 0,5)\Delta P$  (середина интервала) и вероятность интервала  $p_k^L$ , определяемая, например, через нормальное распределение или из графика по продолжительности.

Составные ряды  $\{p_k^L; L_k\}$ ,  $k=0, \dots, K$  и  $\{p_j^G; G_j\}$ ,  $j=0, \dots, J$  удобно представлять с одинаковой дискретностью по мощности:  $G_j = j\varepsilon_P$ ,  $L_k = k\varepsilon_P$ . В этом случае небаланс мощности (разность нагрузки и генерации)  $N_s = s\varepsilon_P$ ,  $s = -J, \dots, K$  имеет вероятность, формируемую через составные вероятности по правилу "постоянства суммы индексов" [13, 30, 32]

$$p_s = \sum_{j=0}^J p_j^G p_{s-j}^L.$$

**Пример 3.4.** Дополнительно к условиям примера 3.3 нагрузка представляется вероятностным рядом  $\{(p_i = F_{i+1} - F_i), L_i, i = 0, \dots, K\}$ . Как и ранее, необходимо определить вероятность дефицита мощности.

Результаты расчета приведены в табл.3.6. Вероятностный ряд генерации выбран из табл. 3.5. ВР нагрузки строится поинтервально с шагом 50 МВт. В таблице приведены середины интервала. Вероятности определяются из нормального распределения с математическим ожиданием 900 МВт и средним квадратичным отклонением 50 МВт.

Таблица 3.6

Генерация	G	1000	900	800	700	600	500	400	300
	p	0,599	0,315	0,075	0,0105	0,001	6E-05	3E-06	8E-08
Нагрузка	L	725	775	825	875	925	975	1025	1075
	p	0,001	0,021	0,136	0,3413	0,3413	0,1359	0,0214	0,0013
Небаланс мощности	N	-275	-225	-175	-125	-75	<b>-25</b>	<b>25</b>	75
	F(N)	8E-04	0,014	0,095	0,3065	0,5538	<b>0,7443</b>	<b>0,8749</b>	0,9442

Представляющая интерес часть результирующего ВР небаланса мощности приведена в 5-й – 6-й строках, причем в шестой строке записаны не интервальные, а накопленные вероятности.

Из таблицы видно, что вероятность дефицита мощности составляет  $1 - 0,744 = 0,256$  и совпадает с результатами предыдущего примера. Этого следовало ожидать, поскольку нагрузка задана одним и тем же распределением.

Сопоставляя процедуры расчетов в двух последних примерах, можно видеть, что использование ВР сложнее. Однако не стоит делать скоропалительные выводы о нецелесообразности использования ВР нагрузки, заданного нормальным распределением. Поинтервальный метод, приведенный в примере 3.3, не дает возможности получить математическое ожидание и дисперсию небаланса мощности, в то время как вероятностный ряд позволяет сделать это без труда.

Рассмотренные модели не позволяют учесть реальную цикличность нагрузки, но делают достаточно простой расчетную процедуру. Это обуславливает ее преимущественное применение, поскольку для широкого класса задач (перспективное развитие) погрешность от упрощения модели становится несущественной на фоне большой неопределенности исходных данных.

### 3.3.2 Метод частоты и продолжительности

Суточный цикл нагрузки при ее достаточно широком варьировании определяет относительно небольшую длительность (не более нескольких часов) единичного состояния дефицита мощности в ЭЭС, которая обратно пропорциональна частоте соответствующего состояния системы. Представление нагрузки в виде только функции распределения и ее параметров (математического ожидания и дисперсии) не учитывает частотный эффект, а следовательно, не позволяет использовать зависимость удельного ущерба от глубины и длительности ограничения нагрузки. Для учета частотного эффекта необходимо в математическую модель ввести диаграмму состояний. Математический метод, основанный на использовании диаграммы состояний нагрузки, носит название метода частоты и продолжительности [6, 11].

#### 3.3.2.1 Простая двухуровневая структура

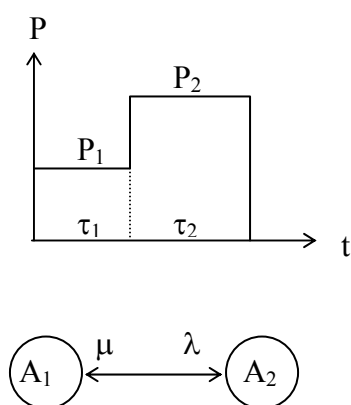


Рис. 3.7. Двухуровневая структурная схема

Простейшей моделью пространства состояния нагрузки является двухуровневая структура (рис. 3.7). Такая модель может быть использована, когда заданы минимальная и максимальная суточные нагрузки и средний коэффициент заполнения (или число часов использования максимума нагрузки) графика нагрузки.

Рассматриваемая совокупность данных одно-

значно определяет средние длительности состояний  $\tau_1$  и  $\tau_2$ . В свою очередь эти величины позволяют определить вероятности состояний, а также интенсивности перехода из состояния минимума в состояние максимума нагрузки и наоборот:  $P_1 = \tau_1 / (\tau_1 + \tau_2)$ ;  $P_2 = \tau_2 / (\tau_1 + \tau_2)$ ;  $\lambda = 1/\tau_1$  и  $\mu = 1/\tau_2$ . Частота событий  $f_1 = f_2 = 1/(\tau_1 + \tau_2)$ .

### 3.3.2.2 Вероятностная двухуровневая структура

Развитием простой двухуровневой структуры является вероятностная двухуровневая структура. Замечено, что в реальных ЭЭС минимальная нагрузка практически неизменна во времени, в то время как максимальная изменяется в довольно широком диапазоне.

Варьирование максимальной мощности может быть описано вероятностным рядом  $\{p_i, L_i^{\max}\}$ . Рассматриваемой модели соответствует структурная схема типа «звезда» (рис. 3.8). Здесь состоянию  $i$  соответствует вероятность  $P_i = \gamma_i P_0 = P_0 \lambda_i / \mu_i$ .

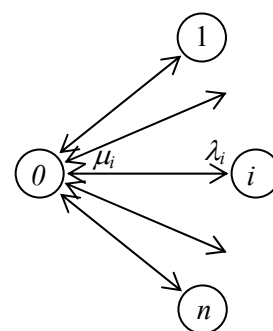


Рис. 3.8. Структурная схема типа «звезда»

Состояния (1- $n$ ) образуют группу с суммарной вероятностью

$P_{\max} = \tau_{\max} / (\tau_{\min} + \tau_{\max})$ , где индексы  $\min$ ,  $\max$  относятся к состояниям минимальной и максимальной нагрузок. Частота объединенного состояния равна частоте состояния минимальной нагрузки  $f_{\max} = f_{\min} = 1 / (\tau_{\min} + \tau_{\max})$  (ранее рассмотренная математическая модель нагрузки).

Принимая во внимание соотношения  $P_{\max} = \sum P_i$ ,  $\sum p_i = 1$ , можно предположить, что  $P_i = p_i P_{\max} = p_i \frac{\tau_{\max}}{\tau_{\min} + \tau_{\max}}$ ,  $f_i = p_i f_{\max} = \frac{p_i}{\tau_{\min} + \tau_{\max}}$ . Рассмотрим получение данных соотношений с помощью интенсивностей.

Длительность состояния максимальной нагрузки неизменна, поэтому интенсивность перехода в состояние минимальной нагрузки одинакова для всех состояний. Разница в вероятностях состояний, отличных от нуля, проявляется в поправочных коэффициентах к интенсивностям  $\lambda_i = p_i \lambda_{\min, \max} = p_i / \tau_{\min}$ ,  $i = 1, \dots, n$ :

$$P_i = \gamma_i P_{\min} = p_i \lambda_{\min, \max} \tau_{\max} P_{\min}.$$

Из условия равенства суммы вероятностей всех состояний единице,  $P_{\min} + \sum P_i = P_{\min} + P_{\min} \sum \gamma_i = 1$  получаем

$$P_{\min} = \frac{1}{1 + \sum \gamma_i} = \frac{1}{1 + \lambda_{\min, \max} \tau_{\max}} = \frac{\tau_{\min}}{\tau_{\min} + \tau_{\max}}.$$

В результате вероятность состояния  $i$

$$P_i = p_i P_{\max} = p_i \frac{\tau_{\max}}{\tau_{\min} + \tau_{\max}},$$

а частота пропорциональна вероятностям максимальной нагрузки

$$f_i = \frac{P_i}{\tau_{\max}} = \frac{p_i}{\tau_{\min} + \tau_{\max}},$$

что и следовало ожидать.

### 3.3.2.3 Многоуровневая структура. Случайная длительность ступеней

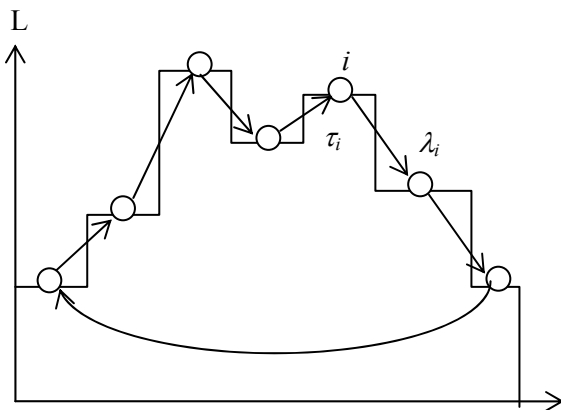


Рис. 3.9. Диаграмма состояний суточного графика нагрузки

Двухуровневая модель нагрузки довольно грубо моделирует процесс ее изменения. Более правильным является представление нагрузки суточными графиками. В этом случае каждая дискретная ступень напряжений может рассматриваться как отдельное состояние (рис. 3.9). Интенсивности переходов при экспоненциальном распределении длительности ступеней  $\lambda_i = 1/\tau_i$ .

Следует обратить внимание на то, что в данной диаграмме нет обратных переходов. В то же время последовательная цепь переходов замкнута (последнее состояние имеет переход в исходное). В силу баланса частот для любого состояния  $i$

$$f_i = \lambda_i P_i = \lambda_{i-1} P_{i-1}, \quad i=1, \dots, n,$$

$$f_0 = \lambda_0 P_0 = \lambda_n P_n.$$

Отсюда

$$P_i = (\lambda_0 / \lambda_i) P_0 = (\tau_i / \tau_0) P_0.$$

Принимая во внимание равенство единице суммы вероятностей получаем вероятность исходного и любого другого состояний

$$P_0 = \frac{\tau_0}{\sum \tau_i}; \quad P_i = \frac{\tau_i}{\sum \tau_j}, \quad i=1, \dots, n.$$

Таким образом, вероятность состояния равна его относительной длительности, что и следовало ожидать.

Частота всех состояний одинакова

$$f_i = P_i \lambda_i = \frac{1}{\sum \tau_j}, \quad i=1, \dots, n.$$

Для суточного интервала  $f_i = 1/24$ , ч<sup>-1</sup> или  $f_i = 1$  сут<sup>-1</sup>, т.е. каждая ступень повторяется один раз в сутки.

Ранее было отмечено, что в частотно-вероятностном ряде важна не только частота события, но и ее составляющие  $f^+$  и  $f^-$ ,  $f = f^+ + f^-$ . Для кольцевой структурной схемы невозможно одновременное присутствие  $f^+$  и  $f^-$ . Полученные частоты  $\{f_j^{(i)}\}$  необходимо идентифицировать по классам  $f^+$ ,  $f^-$  в зависимости от поведения нагрузки при переходе от одной ступени к другой.

Последующая сортировка и группировка частотно-вероятностного ряда могут привести к кратному изменению частот отдельных (повторяющихся) событий и одновременному существованию  $f_i^+$ ,  $f_i^-$ .

### 3.3.2.4 Случайная величина нагрузки на ступени суточного графика

Специфика рассмотренной модели проявляется в вероятностном характере *длительностей* ступеней (экспоненциальное распределение). В то же время более важным с практической точки зрения является вероятностный характер нагрузки на каж-

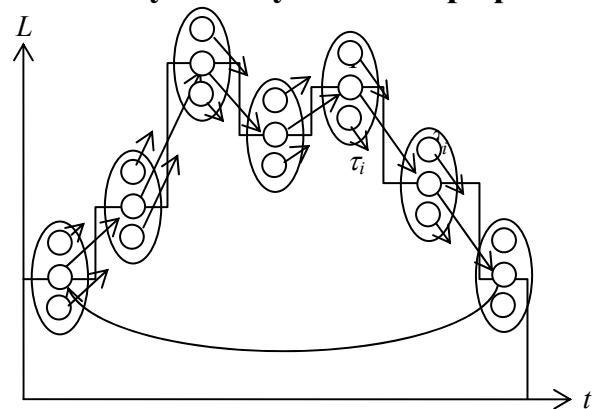


Рис. 3.10. Вероятностный характер нагрузки ступеней

дой ступени (нормальное распределение, вероятностный ряд).

Комбинированный вероятностный характер нагрузки может быть учтен при представлении структурной схемы в виде рис. 3.10. Каждая ступень  $i$  представляется в виде полной вероятностной группы  $I$  возможных реализаций  $\{ij\}$  нагрузки (элементарные события):

$$\sum_{j \in I} p_j^{(i)} = 1.$$

Интенсивность перехода для всех элементарных событий одной группы одинакова  $\lambda_j^{(i)} = 1/\tau_i$ . По аналогии с предыдущей моделью нагрузки вероятность элементарного события равна произведению вероятности группы на вероятность события в группе  $P_j^{(i)} = p_j^{(i)} P_i$ . Отсюда нетрудно определить частоту элементарного события:

$$f_j^{(i)} = \lambda_j^{(i)} P_j^{(i)} = \frac{p_j^{(i)}}{\tau_i} \frac{\tau_i}{\sum \tau_k} = \frac{p_j^{(i)}}{\sum \tau_k} = p_j^{(i)} f_i.$$

Математические выражения для вероятности и частоты группы получены в предыдущем разделе.

При распределении результирующей частоты по составляющим  $f^+$ ,  $f^-$  следует принять во внимание, что в отличие от предыдущей модели на следующей ступени имеется некоторое множество реализаций нагрузки. Отсюда из рассматриваемого состояния возможны переходы как в сторону увеличения, так и в сторону уменьшения нагрузки. В этом случае суммарная частота распределяется пропорционально числу соответствующих направлений.

**Пример 3.5.** Согласно данным, представленным в табл. 3.7, выполнить построение вероятностного ряда для суточного графика нагрузки.

Начальные расчеты частотно-вероятностного ряда представлены также в табл. 3.7. Следует обратить внимание на то, что частота имеет размерность 1/час.

Суммарная частота  $f=0,0104$  состояния 720 МВт второй ступени распределяется между  $f^+$ ,  $f^-$  в соотношении 1:2, поскольку на следующей ступени два состояния имеют мощность меньше и одно больше указанной величины.

Таблица 3.7

Исходные данные				Результаты расчета					
Ступень	$\tau_i$ , час	МО на- грузки	$P_i = \tau_i/24$	L	$p_j^{(i)}$	$P_j^{(i)}$	$f_j^{(i)}$	$f_j^{(i)+}$	$f_j^{(i)-}$
1	8	600	0,33	540	0,25	0,083	0,0104	0,0104	0
				600	0,5	0,167	0,0208	0,0208	0
				660	0,25	0,083	0,0104	0,0104	0
				Сумма	1	0,33	0,0417		
2	10	900	0,42	720	0,25	0,104	0,0104	0,0035	0,0069
				900	0,5	0,208	0,0208	0	0,0208
				1080	0,25	0,104	0,0104	0	0,0104
				Сумма	1	0,42	0,0417		
3	6	720	0,25	660	0,25	0,063	0,0104	0	0,0104
				720	0,5	0,125	0,0208	0	0,0208
				780	0,25	0,063	0,0104	0	0,0104
Сумма	24			Сумма	1	0,25	0,0417		
					Сумма	1,000	0,125	0,042	0,083

Результирующий частотно-вероятностный ряд формируется через сортировку и объединение событий с одинаковыми мощностями (табл. 3.8).

Таблица 3.8

L	540	600	660	720	780	900	1080	Итого
P	0,0833	0,1667	0,1458	0,2292	0,0625	0,2083	0,1042	1,0000
$f^+$ , ч <sup>-1</sup>	0,0104	0,0208	0,0104	0,0035	0	0	0	0,0452
$f$ , ч <sup>-1</sup>	0	0	0,0104	0,0278	0,0104	0,0208	0,0104	0,0798
$f$ , ч <sup>-1</sup>	0,0104	0,0208	0,0208	0,0313	0,0104	0,0208	0,0104	0,1250
$f$ , сут <sup>-1</sup>	0,2496	0,4992	0,4992	0,7512	0,2496	0,4992	0,2496	3
$\tau = p / f$ , ч	8	8	7	7,3333	6	10	10	(8)

Последней строкой в таблице выведена средняя длительность отдельного состояния, определяемая отношением вероятности к частоте. Поскольку состояния L=540, 600, 900, 1080 встречаются лишь однажды, то соответствующая им



средняя длительность равна длительности ступени. Для других состояний длительности являются обратными к интенсивностям исхода, которые, в свою очередь, определяются как средневзвешенные с весами  $p_j^{(i)}$  от интенсивностей исхода состояний, где встречается соответствующая нагрузка.

Последний столбец таблицы показывает число ступеней графика нагрузки (предпоследняя строка) для суммарной частоты при ее приведении к длине интервала (сутки = 24 ч).

### 3.3.2.5 Композиция суточных графиков

При расчетах балансовой надежности ЭЭС суточный период редко рассматривается как расчетный. Чаще всего в качестве расчетного принимается недельный, месячный или годовой. В этом случае рассматриваются характерные суточные графики нагрузки рабочего дня, субботы, воскресенья, праздничных дней для разных сезонов года.

Без нарушения общности цепочечная структура переходов суточного графика нагрузки может быть распространена на любое число суток при соблюдении заданной комбинации характерных графиков. Однако нет надобности в многократных повторах одинаковых циклов состояний. Можно показать, что как вероятности, так и частоты и средние длительности состояний объединенного частотно-вероятностного ряда остаются неизменными.

Действительно, на интервале времени длительностью в  $k$  суток вероятность и частота отдельной суточной реализации нагрузки снижаются в  $k$  раз, но в результирующем частотно-вероятностном ряде рассматриваемая нагрузка повторяется  $k$  раз. Отсюда следует неизменность результирующих вероятностей и частот.

При комбинировании графиков нагрузки кратности графиков учитываются через весовые коэффициенты, показывающие долю данного графика на рассматриваемом периоде времени. Например, на недельном интервале из 7 дней – пять рабочих и два выходных. Отсюда вероятности и частоты рабочего дня умножаются на  $5/7$ , а выходных – на  $2/7$ .

Частотно-вероятностные ряды характерных графиков нагрузки, входящих в состав рассматриваемого периода, объединяются путем простого добавления (с весовым коэффициентом) в результирующий ряд. Далее состояния ряда упорядочиваются и группируются.

Следует крайне осторожно выполнять композицию различных графиков нагрузки, поскольку, как правило, различным графикам нагрузки соответствуют отличающиеся структуры генерации. В частности, на субботу-воскресенье планируют текущие ремонты оборудования (меняется состав оборудования).

### 3.3.3 Частотно-вероятностный ряд небаланса мощности

Специфика частотно-вероятностного ряда небаланса мощности заключается в том, что здесь существенно расширяется диапазон определяющего параметра (небаланс мощности), который изменяется от отрицательной максимальной генерации (нулевая нагрузка) до положительной максимальной нагрузки (нулевая генерация). Математическая структура процедуры свертки остается неизменной.

В качестве примера рассмотрим свертку ЧВР генерации (табл.3.5) и нагрузки (табл. 3.8). Результаты свертки представлены в табл. 3.9, где состояния 3-18 и 22-60 не показаны, чтобы не загромождать таблицу. В таблице приведены полная и частичная ( $N > 0$ ) суммы для вероятности, частоты и произведения небаланса мощности  $N$  на вероятность. В частности, величина  $P_D = 0,134$  делит вероятность дефицитного состояния системы. Математическое ожидание небаланса мощности составляет минус 185 (в среднем избыточная система), а дефицита - плюс 17,71 (именно эта величина участвует при определении ожидаемого ущерба от недоотпуска электроэнергии потребителю). Дополнительно вычислен средний единичный дефицит, равный

$$D_{cp} = \left( \sum_{N_i > 0} p_i N_i \right) / \left( \sum_{N_i > 0} p_i \right) = 17,71 / 0,134 = 131,9 \text{ МВт.}$$

Частота дефицитного состояния является частотой  $f_D = \Psi_{21}^- = \Psi_{20}^+ = 0,509$  перехода из объединенного состояния (21-61) в состояние бездефицитной работы ЭЭС.

Поскольку произведение частоты на длительность определяет вероятность события, то средняя длительность единичного дефицитного состояния ЭЭС вычисляется согласно выражению  $\tau_D = P_D / f_D = 0,134 / 0,509 = 0,264$  ч. Это  $\square$ А $\square$ рая величина, необходимая для определения удельного ущерба.

Таблица 3.9

i	N	p	$f^+, \text{ч}^{-1}$	$f^-, \text{ч}^{-1}$	$f, \text{ч}^{-1}$	$f, \text{сут}^{-1}$	$\tau = p/f, \text{ч}$	F(N)	$\Psi^+$	N·p
1	-460	0,045	0,274	0	0,274	6,572	0,163	0,045	0,274	-20,56
2	-400	0,09	0,551	0	0,551	13,22	0,163	0,135	0,825	-35,98
19	-20	0,006	0,03	0,118	0,148	3,548	0,042	0,794	0,812	-0,124
20	0	0,072	0,387	0,691	1,078	25,88	0,067	0,866	<b>0,509</b>	0
21	20	0,004	0,016	0,109	0,125	3,006	0,031	0,870	0,416	0,077
61	1080	6E-14	0	6E-12	6E-12	1E-10	0,011	1,000	-0,042	0,000
Сумма		1			11,4					-185
N>0		0,134			2,001					17,71

Определение эквивалентных частоты и длительности дефицитного состояния исходя из средних эквивалентов приводит к несколько иному результату. Рассмотрим очевидную цепь равенств

$$\sum_{N_i > 0} p_i N_i = \frac{\sum_{N_i > 0} p_i N_i}{\sum_{N_i > 0} p_i} \sum_{N_i > 0} p_i = D_{cp} \frac{\sum_{N_i > 0} f_i \tau_i}{\sum_{N_i > 0} f_i} \sum_{N_i > 0} f_i = D_{cp} \tau_3 f_3,$$

где эквивалентная частота  $f_3$  является суммой частот дефицитных состояний, а эквивалентная длительность  $\tau_3$  – средневзвешенной по частоте величиной.

$$f_3 = \sum_{N_i > 0} f_i = 2,001; \quad \tau_3 = \frac{\sum_{N_i > 0} f_i \tau_i}{\sum_{N_i > 0} f_i} = 0,067.$$

Причина различия в том, что последний подход соответствует такой □Атематической модели, при которой неизбежен переход из дефицитного состояния в бездефицитное. В этом случае, действительно, частота объединенного состояния дефицита равна сумме частот отдельных состояний. Для адекватного описания удельного ущерба более подходящей является первая модель, поскольку она учитывает переходы из одного дефицитного состояния в другое.

### 3.4 Эквивалентирование вероятностного ряда

При многократной свертке результирующий частотно-вероятностный ряд расширяется (в наихудшем случае число членов результирующего ряда равно произведению числа членов объединяемых рядов), что приводит к резкому возрастанию затрат машинного времени и памяти. Сжатие вероятностного ряда через более грубое квантование шкалы мощностей порождает дополнительные вычислительные погрешности. Часто часть ВР имеет практически нулевую вероятность и не влияет на результат (см. табл. 3.5). Отсюда с возрастанием ЭЭС возрастает актуальность проблемы эквивалентирования.

В условиях вероятностного моделирования внешних возмущений возникает проблема, как хранить и использовать ВР. Запоминать множество реализаций вероятностного ряда или выполнять его построение по мере надобности? В сложной ОЭЭС с большим числом моделируемых состояний ЭЭС в первом случае - это проблема памяти, а во втором - машинного времени.

Широкое применение в расчетной практике находят процедуры эквивалентирования [1, 11, 16], приемлемость которых определяется спецификой исходной и требованиями к результирующей информации. В задачах балансовой надежности ЭЭС из-за существенной неопределенности исходных данных (параметры отказов элементов ЭЭС и др.) эти требования относительно невысоки, что позволяет использовать упрощенные вычислительные процедуры.

В то же время не следует забывать, что всякая аппроксимация вносит в расчеты дополнительную погрешность. Вероятно, в практике должны функционировать как более точные, но и более дорогие, так и упрощенные, но и более

дешевые расчетные процедуры. Пользователь должен иметь право выбора процедуры в зависимости от специфики решаемой задачи.

### 3.4.1 Раздельное представление данных: нагрузка – генерация

Одним из путей увеличения эффективности процедуры расчета небаланса мощности является его описание в виде комбинации случайных величин: нагрузки и генерации. Эффект заключается в том, что результирующий ВР не хранится в виде большого массива, а строится по мере надобности. При этом информация о системе часто ограничивается математическим ожиданием и дисперсией нагрузки и данными о структурах групп однотипных генераторов (число, мощность и вероятность отказа агрегатов).

В упрощенной модели нагрузки, описываемой нормальным распределением, система генерации представляется простым вероятностным рядом (без частотной составляющей):

$$\{(p_i, G_i), i=0, \dots, K\},$$

где  $G_i$  и  $p_i$  - величина генерирующей мощности и вероятность состояния  $i$ . Часто вместо вероятностей используется функция распределения  $\{F_i\}$ , ( $F_0=0, F_K=1, p_i = F_{i+1} - F_i$ ).

При переходе к небалансу мощности генерация учитывается со знаком “минус”, поэтому определяющая функцию распределения НМ  $F_N(x)$  свертка функции распределения  $F_L(x)$  нагрузки (нормальное распределение) с вероятностным рядом генерации ( $G_i > 0$ ) определяется выражением

$$F_N(x) = \sum_{i=1}^r p_i F_L(x + G_i) = \sum_{i=1}^r p_i F(x, M_i, D_L), \quad (3.11)$$

где  $F(x, M, D)$  - функция нормального распределения с математическим  $\square A \square$ данием  $M$  и дисперсией  $D$ , а  $M_i = M_L - G_i$  ( $G_i > 0$ ). Таким образом, свертка распределения нагрузки с ВР генерации сводится к суммированию нормальных распределений. Из выражения (3.11), в частности, следует, что функция распре-

деления НМ является непрерывной, поскольку она определяется взвешенной суммой (распределение смеси) функций нормального распределения.

Известно, что смесь может существенно изменить характер результирующей функции распределения. В частности, смесь нормальных распределений может и не быть нормальным распределением.

Реально в полной совокупности возможных состояний имеется лишь  $\square$ Алое число (все агрегаты работоспособны, аварийно отключен один, наиболее мощный агрегат и др.) со значимой дискретной вероятностью, что, во-первых, предопределяет эквивалентирование остальных агрегатов, во-вторых, позволяет принять для эквивалентной группы непрерывное (например, нормальное) распределение вероятностей и, в-третьих, дает возможность считать итоговое распределение мало отличающимся от нормального.

### 3.4.1.1 Начальные моменты распределения смеси

Для формализации процедуры эквивалентирования рассмотрим определение первого и второго начальных моментов распределения смеси

$$F_{\Sigma}(x) = \sum_{\forall k} p_k F_k(x).$$

*Математическое ожидание* для такого распределения является средневзвешенным от математических ожиданий составляющих

$$M = \int x dF_{\Sigma}(x) = \sum_{\forall k} p_k \int x dF_k(x) = \sum_{\forall k} p_k M_k.$$

Аналогичное заключение можно сделать относительно второго начального момента (ВНМ)

$$\chi = \sum_{\forall k} p_k \chi_k.$$

*Дисперсия* не является средневзвешенной величиной, но, зная математическое ожидание и ВНМ, нетрудно ее получить:

$$D = \chi - M^2 = \sum_{\forall k} p_k (D_k + M_k^2) - \left( \sum_{\forall k} p_k M_k \right)^2,$$

где, напомним,  $M_k = M_L - G_k$ ;  $D_k = D_L$ .

Математическое ожидание небаланса мощности

$$M_N = \sum_{\forall k} p_k (M_L - G_k) = M_L - \sum_{\forall k} p_k G_k = M_L - M_G.$$

Дисперсия небаланса мощности

$$\begin{aligned} D &= \sum_{\forall k} p_k (D_k + M_k^2) - \left( \sum_{\forall k} p_k M_k \right)^2 = \\ &= D_L + \sum_{\forall k} p_k (M_L - G_k)^2 - \left( \sum_{\forall k} p_k (M_L - G_k) \right)^2 = \\ &= D_L + M_L^2 - 2M_L M_G + \sum_{\forall k} p_k G_k^2 - (M_L - M_G)^2 = \\ &= D_L + \sum_{\forall k} p_k G_k^2 - M_G^2 = D_L + D_G. \end{aligned}$$

Получены очевидные соотношения для суммы двух независимых случайных величин (нагрузки и генерации). Математические преобразования здесь служат лишь демонстрацией вероятностных операций с распределением типа «взвесь».

В упрощенной математической модели при представлении как генерации, так и небаланса мощности нормальным распределением задача БН сводится к операциям с математическими ожиданиями и дисперсиями и не содержит вычислительных затруднений. Однако здесь существует погрешность расчетов, вызванная эквивалентированием дискретного ряда генерации непрерывной функцией распределения.

Более точной является другая математическая модель, когда генерация представляется ВР, а нагрузка – нормальным распределением. В то же время при большом числе разнотипных агрегатов ВР генерации становится настолько большим, что возникает вопрос о целесообразности эквивалентирования либо некоторой совокупности агрегатов [1, 5], либо части вероятностного ряда.

В первом случае для учета дискретности можно оставлять не более двух групп наиболее мощных агрегатов, что сводит объем исходных данных, описывающих ЭЭС, до 8-10 групп агрегатов (остальные агрегаты эквивалентированы и

могут рассматриваться либо как эквивалентная группа с заданным числом, мощностью и вероятностью отказа агрегатов, либо как отрицательная нагрузка).

Другой путь решения проблемы размерности ВР заключается в эквивалентировании *не группы генераторов, а некоторой части вероятностного ряда*. Пусть для учета дискретности выделены составляющие вероятностного ряда с индексами  $j \in J \{p_j, M_j, j \in J\}$ . Оставшиеся члены ряда эквивалентируются либо одним состоянием, либо некоторым непрерывным распределением.

### 3.4.2 “Эквивалентная генерация”

Эквивалентируемая часть здесь равноценна остальным членам ВР и представлена параметрами  $\{p_\circ, G_\circ\}$ ,  $p_\circ = \sum_{j \notin J} P_j = 1 - \sum_{j \in J} P_j$ . В качестве критерия формирования выделяемой (дискретно-значимой) группы (множество  $J$ ) может служить, например, неравенство  $p_\circ < \varepsilon$  или  $p_j \geq 1 - \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  - наперед заданное  $\square$ ентаточное малое число.

Результирующая функция распределения небаланса мощности может быть представлена в виде смеси, где одним из элементов является эквивалентная группа

$$F_N(x) = \sum_{k \notin J} p_k F(x, M_k, D_L) + \sum_{j \in J} p_j F(x, M_j, D_L) = p_\circ F(x, M_\circ, D_L) + \sum_{j \in J} p_j F(x, M_j, D_L), \quad (3.12)$$

где  $M_j = M_L - G_j$ . Поскольку

$$M_N = p_\circ M_\circ + \sum_{j \in J} p_j M_j,$$

то

$$M_\circ = (M_N - \sum_{k \in J} p_k M_k) / p_\circ = (M_L - M_G - \sum_{k \in J} p_k (M_L - G_k)) / p_\circ = M_L - (M_G - p_J \sum_{j \in J} p_j^* G_j) / p_\circ, \quad (3.13)$$

где  $p_j^* = p_j / p_J$ . Принимая во внимание, что



$$M_G = \sum_{j \in J} p_j G_j + \sum_{j \notin J} p_j G_j,$$

можно также записать

$$M_{\circ} = M_L - \sum_{k \notin J} p_j^* G_k. \quad (3.14)$$

Приведенные выражения представляют математическое ожидание  $M_{\circ}$  либо через группу  $J$  (3.13), либо через дополняющее множество (3.14). Предпочтение следует отдавать множеству меньшей размерности. Принимая во внимание, что  $M_{\circ} = M_L - G_{\circ}$  получаем

$$G_{\circ} = \sum_{k \notin J} p_j^* G_k = (M_G - p_J \sum_{k \in J} p_j^* G_k) / p_{\circ},$$

т.е. мощность эквивалентного генератора является средневзвешенной генерацией в эквивалентируемой группе. Данное представление эквивалентно очевидному соотношению

$$M_G = p_{\circ} G_{\circ} + p_J G_J,$$

где  $G_J, G_{\circ}$  - средние генерации в соответствующих группах.

Следует отметить, что дисперсия результирующего распределения при рассматриваемом подходе изменяет свою величину. Действительно, при эквивалентировании второй начальный момент всей генераторной группы

$$\chi = \sum_{j \in J} p_j G_j^2 + p_{\circ} G_{\circ}^2 = \sum_{j \in J} p_j G_j^2 + p_{\circ} (\sum_{k \notin J} p_j^* G_k)^2 \neq \sum_{\forall k} p_k G_k^2.$$

Отсюда нет равенства и для дисперсии, поскольку неизменно математическое ожидание генераторной группы. При условии  $p_{\circ} < \varepsilon$  (при надлежащем формировании множества  $J$ ) погрешность дисперсии составляет

$$\begin{aligned} \Delta D = \Delta \chi &= \sum_{k \notin J} p_k G_k^2 - p_{\circ} (\sum_{k \notin J} p_k^* G_k)^2 = G_{\max}^2 [\sum_{k \notin J} p_k G_{k^*}^2 - p_{\circ} (\sum_{k \notin J} p_k^* G_{k^*})^2] \leq \\ &\leq G_{\max}^2 [\sum_{k \notin J} p_k - p_{\circ} (\sum_{k \notin J} p_k^* G_{k^*})^2] \leq \varepsilon G_{\max}^2 [1 - (\sum_{k \notin J} p_k G_{k^*})^2] \leq \varepsilon G_{\max}^2, \end{aligned}$$

где  $G_{\max} = \max \{G_k, k \notin J\}$ ,  $G_{k^*} = G_k / G_{\max}$

Выбрав достаточно малой величину  $\varepsilon$ , ошибку эквивалентирования можно рассматривать как незначимую и использовать данный способ эквивалентирования в практических расчетах.

При описанном эквивалентировании части ВР генерации вектор данных описывается структурой  $\{M_L, D_L, p_\varepsilon, G_\varepsilon, p_j, G_j, j \in J\}$ .

**Пример 3.6** Выполнить эквивалентирование части ВР, полученного в примере 3.3 ( $n=10, G=100$  МВт,  $q=0,05$ ), при условии, что  $p_\varepsilon \leq 0,001$ , и получить вероятность дефицита мощности при нагрузке, заданной нормальным распределением с математическим ожиданием  $M_L=900$  МВт и СКО  $\sigma_L=50$  МВт.

Расчеты приведены в табл. 3.10. Условиям эквивалентирования соответствуют состояния  $k > 3$  (накопленная вероятность для состояния  $k=4$   $p_\varepsilon = 0,001$ ). Пятый столбец характеризует относительные вероятности. Следующий столбец используется для определения эквивалентной генерации  $G_\varepsilon = 593,5$ . Далее по функции нормального распределения для генерации  $G_k, k=0, \dots, 3$  и  $G_\varepsilon$  определена вероятность отсутствия дефицита. Полученные величины умножаются на соответствующие вероятности состояний, и определяется их сумма.

Таблица 3.10

$k$	$p_k$	$G_k$	$1-F(G_k)$	$p_k^*$	$p_k^* G_k$	$F(0, M_k, D_L)$	$pF(0, M_k, D_L)$
0	0,599	1000	1	-	-	0,977	0,585
1	0,315	900	0,401	-	-	0,500	0,158
2	0,075	800	0,086	-	-	0,023	0,002
3	0,01	700	0,012	-	-	3,17E-05	3,32E-07
4	1E-03	600	<b>0,00103</b>	0,938	562,8449	-	-
5	6E-05	500	6,4E-05	0,059	29,62342	-	-
6	3E-06	400	2,8E-06	0,003	1,039418	-	-
7	8E-08	300	8,2E-08	7,8E-05	0,023446	-	-
8	2E-09	200	1,6E-09	1,5E-06	0,000308	-	-
9	2E-11	100	1,9E-11	1,8E-08	1,8E-06	-	-
10	1E-13	0	9,8E-14	9,5E-11	0	-	-
Сумма				1,0E+00	593,5	4,43E-10	4,55E-13
						Сумма	0,744

В результате вероятность дефицита мощности составляет  $1-0,744=0,256$ , как и в примере 3.3. Однако в отличие от упомянутого примера здесь рассматриваются не 11, а только 5 состояний (четыре выделенных и одно эквивалентное).

Дополнительный взгляд на таблицу позволяет сказать, что множество значимых состояний можно смело сократить, по крайней мере, на одно состояние, поскольку вклад  $p_3 F(0, M_3, D_L) = 3,32 \cdot 10^{-7}$  в результирующую вероятность ничтожно мал. Отсюда критерий  $p_3 \leq \varepsilon$  не является единственно возможным. В зависимости от конечной цели могут быть иные критерии ограничения числа состояний.

### 3.4.3 Эквивалентная генерирующая система

Эквивалентируемая часть ВР генерации представляется, например, нормальным распределением. Вероятность и математическое ожидание эквивалентной группы такие же, как и в предыдущем случае. В то же время, дисперсия группы определяется из условия неизменности результирующей дисперсии  $D_N$ . При этом

$$F_N(x) = p_3 F(x, M_3, D_3) + (1 - p_3) \sum_{j \in J} p_j^* F(x, M_j, D_L), \quad (3.15)$$

где  $p_j^* = p_j / p_J$  - относительные вероятности состояний множества  $J$ .

Второй начальный момент

$$\chi_N = \sum_{j \in J} p_j \chi_j + \sum_{k \notin J} p_k \chi_k = \sum_{j \in J} p_j \chi_j + p_3 \chi_3.$$

Отсюда ВНМ является средневзвешенным в группе эквивалентирования:

$$\chi_3 = (\sum_{k \notin J} p_k \chi_k) / p_3 = \sum_{k \notin J} p_k^* \chi_k.$$

Дисперсия эквивалентной группы определяется через ВНМ:

$$\begin{aligned}
D_{\vartheta} &= \chi_{\vartheta} - M_{\vartheta}^2 = \sum_{k \notin J} p_k^* \chi_k - \left( \sum_{k \notin J} p_k^* M_k \right)^2 = \sum_{k \notin J} p_k^* [D_L + (M_L - G_k)^2] - \left( \sum_{k \notin J} p_k^* (M_L - G_k) \right)^2 = \\
&= D_L + M_L^2 - 2M_L \sum_{k \notin J} p_k^* G_k + \sum_{k \notin J} p_k^* G_k^2 - M_L^2 + 2M_L \sum_{k \notin J} p_k^* G_k - \left( \sum_{k \notin J} p_k^* G_k \right)^2 = \\
&= D_L + \sum_{k \notin J} p_k^* G_k^2 - \left( \sum_{k \notin J} p_k^* G_k \right)^2 = D_L + D_{g\vartheta},
\end{aligned}$$

где  $D_{g\vartheta} = \sum_{k \notin J} p_k^* G_k^2 - \left( \sum_{k \notin J} p_k^* G_k \right)^2$  - дисперсия генерирующей мощности эквивалентной группы.

Полученную дисперсию можно также выразить через результирующие параметры и менее многочисленную группу  $J$ . При этом второй начальный момент, через который определяется дисперсия, представляется в виде

$$p_{\vartheta} \chi_{\vartheta} = \chi_N - p_J \chi_J = \chi_N - p_J \sum_{j \in J} p_j^* \chi_j = D_N + M_N^2 - p_J \sum_{j \in J} p_j^* (D_j + M_j^2).$$

Отсюда дисперсия

$$D_{\vartheta} = \chi_{\vartheta} - M_{\vartheta}^2 = \frac{1}{p_{\vartheta}} \left( D_N + M_N^2 - p_J \sum_{j \in J} p_j^* (D_j + M_j^2) \right) - M_{\vartheta}^2.$$

При данном способе эквивалентирования вектор данных, представляющий небаланс мощности ЭЭС, описывается структурой

$$\{M_L, D_L, p_{\vartheta}, M_{\vartheta}, D_{\vartheta}, p_j^*, G_j, j \in J\}.$$

Результирующая функция распределения небаланса мощности строится последовательно. Первоначально строится функция распределения на основе структуры  $\{M_L, D_L, p_j^*, G_j, j \in J\}$ , а затем согласно (3.15) выполняется операция типа «взвесь».

**Пример 3.7** Выполнить расчеты, аналогичные предыдущему примеру, но методом «эквивалентной системы».

Расчеты приведены в табл. 3.11. Условиям эквивалентирования, как и ранее, соответствуют состояния  $k > 3$ . Пятый столбец характеризует относительные вероятности. Здесь следует отметить, что первые четыре строки относятся к суммарной вероятности  $p = 1 - p_{\vartheta} = 1 - 0,00103$ , а остальные – к  $p_{\vartheta} = 0,00103$ . Сле-

дующие два столбца необходимы для расчета математического ожидания  $G_3 = 593,53$  и дисперсии  $D_3 = 3,50 \cdot 10^5 - G_3^2 = 25,73^2$  эквивалентной группы.

Восьмой и девятый столбцы определяют вероятность (нормальное распределение) отсутствия дефицита для выделенной и эквивалентной групп. Полученные величины умножаются на соответствующие вероятности состояний, и определяется их сумма. В результате вероятность дефицита мощности составляет  $1 - 0,74381 = 0,256$ , как и в примере 3.3.

Таблица 3.11

$k$	$p_k$	$G_k$	$F(G_k)$	$p_k^*$	$p_k^* G_k$	$p_k^* G_k^2$	F(0)	$p_k^* F(0)$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,599	1000	1	0,599	-	-	0,97725	0,58537
1	0,315	900	0,401	0,315	-	-	0,5	0,1575
2	0,075	800	0,086	0,075	-	-	0,02275	0,00171
3	0,01	700	0,012	0,010	-	-	3,17E-05	3,2E-07
4	1E-03	600	<b>0,00103</b>	0,938	562,85	337707	Сумма	<b>0,74458</b>
5	6E-05	500	6,4E-05	0,059	29,623	14812	-	-
6	3E-06	400	2,8E-06	0,003	1,039	416	-	-
7	8E-08	300	8,2E-08	0,000	0,023	7	-	-
8	2E-09	200	1,6E-09	0,000	0	0	-	-
9	2E-11	100	1,9E-11	0,000	0	0	-	-
10	1E-13	0	9,8E-14	0,000	0	0	-	-
				Сумма	<b>593,53</b>	3,50E+05	2,52E-08	<b>0,74381</b>

Безусловно, второй способ эквивалентирования точнее первого. Однако разница в точности практически неощутима. В то же время в силу более однородной структуры исходных данных первый способ предпочтительнее в программной реализации.

Критерий отбора группы эквивалентирования  $p_3 < \varepsilon$  может быть недостаточно эффективным при оценке вероятностей маловероятных событий, таких как появление дефицита мощности в избыточной системе. Здесь вероятность события сопоставима с  $\varepsilon$ . Поскольку большинство оцениваемых событий характери-

зуются соотношением  $x=0$  (дефицит положителен, наличие в соседней ЭЭС резерва генерирующей мощности и др.), то в качестве критерия можно рассматривать относительный вклад эквивалентной группы в оцениваемую величину, например,

$$p_g F(0, M_g, D_L) / F_{\Sigma}(0) < \varepsilon .$$

Предлагаемые процедуры эквивалентирования части ВР позволяют существенно сократить его размерность, а следовательно, и затраты машинного времени при последующем использовании ВР и могут быть рекомендованы для практического использования.

### 3.4.4 Эквивалентирование частоты

В представленных выше процедурах эквивалентирования не учитывалась частотная составляющая вероятностного ряда. Это объясняется прежде всего спецификой математических моделей нагрузки.

Представление нагрузки частотно-вероятностным рядом требует частотной составляющей как в системе генерации, так и в результирующем ряде небаланса мощности. Как в том, так и другом случаях, как правило, эквивалентированию подлежит хвостовая (с малыми вероятностями) часть ряда. Тогда частота эквивалентной группы определяется как частота объединения  $\Psi^+$  или  $\Psi^-$  на границе эквивалентной части ряда.

Сопоставляя первый и второй способы эквивалентирования для результирующего ряда более логично отдать предпочтение методу «эквивалентного генератора» (здесь это будет эквивалентный небаланс мощности), поскольку далее эквивалентная часть будет участвовать в определении математического ожидания глубины и длительности дефицита мощности. В данной процедуре используются не интегральные, а дискретные вероятности отдельных событий.

*- Ну, что, мой друг! Все очень просто и читается легко? Вы именно тот, для кого я писал эту книгу. Не все понятно? Вы то же тот, но для более глубокого усвоения материала попробуйте самостоятельно повторить примеры.*

**РАСЧЕТ БАЛАНСОВОЙ НАДЕЖНОСТИ  
В РАДИАЛЬНОМ ОБЪЕДИНЕНИИ ЭНЕРГОСИСТЕМ**

---

Расчет небаланса мощности в концентрированной ЭЭС имеет более теоретическое, нежели прикладное значение. Более актуальной является проблема надежности ЭЭС с межсистемными связями ограниченной пропускной способности. Реально ЭЭС объединены для совместного выполнения основной функции – надежного и экономичного обеспечения потребителей электроэнергией надлежащего качества. Имеется широкий спектр преимуществ параллельной работы энергосистем. В части надежности это, прежде всего, проявляется в снижении за счет взаиморезервирования удельного резерва генерирующей мощности.

Результирующий (с учетом помощи от соседних ЭЭС) небаланс мощности в узле зависит от стратегии взаимопомощи. При централизованной системе управления наиболее рациональна стратегия, определяемая оптимальным распределением дефицита мощности, которая чаще всего сводится к пропорциональному ограничению нагрузки. Эта стратегия положена в основу большинства существующих программ еще и потому, что она является отражением частотного регулирования – дефицит мощности в объединенной ЭЭС (ОЭЭС) приводит к снижению частоты, что, в свою очередь, приводит к снижению мощности нагрузки.

В условиях территориальной и экономической дезинтеграции определенный интерес представляют стратегии рыночных отношений, в частности «договорных поставок», где предусматривается значительный штраф за недопоставку мощности, “локального эгоизма”, при которой подсистема оказывает помощь лишь при наличии необходимого резерва генерирующей мощности, и др. [47].

Новые экономические принципы вносят специфику в существующие математические модели и расчетные процедуры определения ПН ЭЭС. Прежде всего это касается стратегии “локального эгоизма”. Даже при бесконечной пропуск-

ной способности межсистемных связей здесь требуется определение показателей надежности в каждой отдельной ЭЭС и становятся неприемлемыми подходы, присущие концентрированным ЭЭС.

Новый объект – объединенная ЭЭС порождает новые проблемы, одной из которых является ограниченная пропускная способность (ПС) межсистемных связей. Ограничение перетока мощности по электрической связи (линия электропередачи, трансформатор, совокупность элементов электрической сети) определяется условиями статической устойчивости, термической стойкости и требованиями правил технической эксплуатации. В свою очередь, статическая устойчивость зависит от режима работы энергосистем, состава генерирующего оборудования, распределения нагрузки и структуры электрической сети.

Перечисленные факторы определяют вероятностный характер ПС, зависящий от вероятностного состояния, в том числе и режима смежных ЭЭС. Однако в задачах БН зависимостью характеристик ПС от состояния ЭЭС, как правило, пренебрегают. ПС межсистемной связи описывается неизменным вероятностным рядом, отражающим вероятностный характер состава связи.

#### 4.1 Редуцированное распределение

В простейшей постановке небаланс мощности ЭЭС описывается нормальным распределением и задается математическим ожиданием и дисперсией. Для построения математической модели взаимопомощи ЭЭС, работающих в составе объединения, рассмотрим схему из двух ЭЭС, связанных линией электропередачи с ограниченной ПС (рис. 4.1).

Собственные небалансы мощности  $N_a$ ,  $N_b$  в ЭЭС  $A$  и  $B$  при их изолированной работе описываются распределениями  $F_a(x)$ ,  $F_b(x)$  с параметрами соответственно  $(M_a, D_a)$ ,  $(M_b, D_b)$ . Рассмотрим случай, когда пропускная способность связи

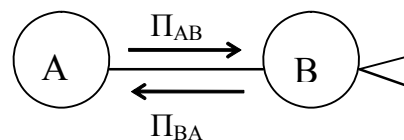


Рис. 4.1 Исключение радиальной ЭЭС

является детерминированной величиной  $\Pi_{AB}$  - в направлении от  $A$  к  $B$  и  $\Pi_{BA}$  -



в обратном направлении. Воздействие ЭЭС  $A$  на ЭЭС  $B$  осуществляется через связь. При наличии в ЭЭС  $B$  избыточных резервов или нагрузки обусловленный воздействием ЭЭС  $A$  переток мощности по связи в направлении от ЭЭС  $B$  к ЭЭС  $A$  (нагрузочный характер воздействия) имеет вид

$$\pi_{BA} = \begin{cases} P_{ba}, & N_a \geq P_{ba}; \\ N_a, & -P_{ab} \leq N_a \leq P_{ba}; \\ -P_{ab}, & N_a \leq -P_{ab} \end{cases}$$

Отрицательная величина перетока соответствует его обратному направлению.

Функция распределения данного перетока

$$F_{\pi}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq P_{ba}; \\ F_a(x), & -P_{ab} \leq N_a < P_{ba}; \\ 0, & x < -P_{ab}. \end{cases}$$

имеет скачки первого рода на границах интервала допустимой ПС  $F_a(-P_{ab})$  и  $1 - F_a(P_{ba})$ . По существу, данное распределение является «обрезанным» распределением НМ ЭЭС  $A$ . Распределения подобного типа мы будем называть редуцированными.

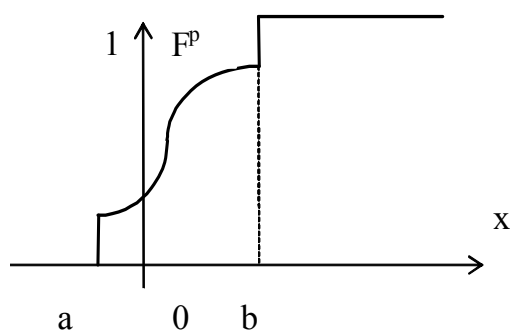


Рис. 4.2. Редуцированная функция распределения

Для произвольного распределения редуцированным интервалом  $(a, b)$  функция редуцированного распределения (рис.4.2) имеет вид

$$F^p(x, a, b) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ F(x), & a \leq x < b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

Следует отметить разницу в определении усеченного (в классическом понимании) и редуцированного распределений. В нашем случае на интервале  $(a, b)$  плотность редуцированного совпадает с плотностью исходного распределения, в то время как плотность усеченного распределения отличается от исходной на нормирующий множитель.

Интегральная функция усеченного распределения не имеет скачков - начинается с нуля на левой и кончается единицей на правой границе области усе-

чения. В частности, при усечении переменной слева,  $x \geq x_0$  плотность и функция усеченного распределения имеют вид:

$$f_y(x) = \frac{1}{1-F(x_0)} f(x); \quad F_y(x) = \frac{F(x)-F(x_0)}{1-F(x_0)}, \quad x \geq x_0.$$

#### 4.1.1 Математическое ожидание редуцированного нормального распределения

Пусть случайная величина, описываемая НР с параметрами  $M, \sigma$ , редуцирована на отрезке  $[a, b]$  и ее ФР имеет вид (см. рис. 4.2). Математическое ожидание и дисперсия редуцированного нормального распределения могут быть представлены через параметры НР и пределы редуцирования.

Математическое ожидание определяется выражением

$$M^P = M(M, D, a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF^P(x) = aF(a) + b \cdot [1 - F(b)] + \int_a^b x dF(x). \quad (4.1)$$

Здесь идентификация  $M(M, D, a, b)$  используется, когда необходимо подчеркнуть границы редуцирования.

Принимая во внимание, что исходное распределение является нормальным, интеграл в правой части может быть записан в виде

$$J = \mu(M, D, a, b) = \int_a^b x dF(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_a^b x \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-M}{\sigma}\right)^2\right\} \cdot dx.$$

После замены переменной  $u=(x-M)/\sigma$  получаем

$$J = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \int_{\alpha}^{\beta} (M + \sigma u) \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} du,$$

где  $\alpha=(a-M)/\sigma$ ,  $\beta=(b-M)/\sigma$ . Отсюда

$$J = \mu(M, D, a, b) = M[\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)] + \sigma[\varphi(\alpha) - \varphi(\beta)], \quad (4.2)$$

где  $\Phi(x)$ ,  $\varphi(x)$  - интегральная функция и плотность нормированного нормального распределения. Суммируя, в итоге получаем

$$M^P = a\Phi(\alpha) + b[1 - \Phi(\beta)] + M[\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)] + \sigma[\varphi(\alpha) - \varphi(\beta)]. \quad (4.3)$$

Это выражение можно распространить на ненормированное нормальное распределение:

$$M^p = aF(a) + b[1 - F(b)] + M[F(b) - F(a)] + \sigma^2[f(a) - f(b)]. \quad (4.4)$$

#### 4.1.2 Дисперсия редуцированного нормального распределения

Дисперсия редуцированного нормального распределения определяется через второй начальный момент:

$$D^p = D^p(M, D, a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_p(x) - M_p^2 = a^2 F(a) + b^2 [1 - F(b)] - M_p^2 + \int_a^b x^2 dF(x).$$

Принимая во внимание, что исходное распределение является нормальным, интеграл в правой части, частично представляющий второй начальный момент, может быть записан в виде

$$J1 = \int_a^b x^2 dF(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_a^b x^2 \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-M}{\sigma}\right)^2\right\} dx.$$

После замены переменной  $u = (x-M)/\sigma$ , получаем:

$$J1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} (M^2 + 2 \cdot M\sigma \cdot u + \sigma^2 u^2) \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} du,$$

где, как и раньше,  $\alpha = (a-M)/\sigma$ ,  $\beta = (b-M)/\sigma$ . Отсюда

$$J = M^2 [\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)] + 2M\sigma [\varphi(\alpha) - \varphi(\beta)] + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \int_{\beta}^{\alpha} \sigma^2 u^2 \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} du.$$

После преобразования (интегрирование по частям)

$$dv = u \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} du, \quad v = -\exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} du, \quad z = u, \quad dz = du,$$

последний в  $J1$  интеграл преобразуется к виду

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} \sigma^2 u^2 \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} du = \sigma^2 [\alpha \varphi(\alpha) - \beta \varphi(\beta) + \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)],$$

В результате

$$J1 = M^2 [\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)] + 2M\sigma [\varphi(\alpha) - \varphi(\beta)] + \sigma^2 [\alpha \cdot \varphi(\alpha) - \beta \varphi(\beta) + \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)].$$

Суммируя, получаем

$$D^p = a^2 F(a) + b^2 [1 - F(b)] - M_p^2 + M^2 [\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)] + \\ + 2M\sigma[\varphi(\alpha) - \varphi(\beta)] + \sigma^2 [\alpha\varphi(\alpha) - \beta\varphi(\beta) + \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)].$$

Данное выражение также можно записать через ненормированное нормальное распределение:

$$D^p = a^2 F(a) + b^2 [1 - F(b)] - M_p^2 + M^2 [F(b) - F(a)] + \\ + 2M\sigma^2 [f(a) - f(b)] + \sigma^2 [(a-M)f(a) - (b-M)f(b)] + \sigma^2 [F(b) - F(a)].$$

Здесь можно выполнить некоторые преобразования, существенно упрощающие расчетную формулу.

$$D^p = a^2 F(a) + b^2 [1 - F(b)] - M_p^2 + (M^2 + \sigma^2) [F(b) - F(a)] + \\ + \sigma^2 [(M + a)f(a) - (M + b)f(b)] \quad (4.5)$$

В практических расчетах также используется ВНМ, который больше (4.5) на величину  $(M^p)^2$

$$\chi(M, D, a, b) = a^2 F(a) + b^2 [1 - F(b)] + (M^2 + \sigma^2) [F(b) - F(a)] + \\ + \sigma^2 [(M + a)f(a) - (M + b)f(b)] \quad (4.6)$$

и интеграл

$$J1 = \int_a^b x^2 dF(x) = (M^2 + \sigma^2) [F(b) - F(a)] + \sigma^2 [(M + a)f(a) - (M + b)f(b)]$$

Переход к исходному распределению позволяет использовать (или, по крайней мере, рассмотреть возможность использования) полученные выражения для более широкого класса ФР, несмотря на то, что в процессе аналитических преобразований было сделано допущение о принадлежности ФР к классу НР.

### 4.1.3 ВР интервала редуцирования

Если ПС связи (интервал редуцирования) представляется вероятностным рядом  $\{p_i, a_i, b_i\}$ , то МО и второй начальный момент (ВНМ) спроса мощности определяются как средневзвешенные с весами, определяемыми вероятностями состояний

$$M_{\Sigma}^p = \sum_i p_i M_i^p(M, D, a_i, b_i), \quad \chi_{\Sigma}^p = \sum_i p_i \chi_i^p(M, D, a_i, b_i),$$

где  $M_i^p(M, D, a_i, b_i), \chi_i^p(M, D, a_i, b_i)$  - МО и ВНМ редуцированного распределения, соответствующие реализации  $(a_i, b_i)$ .

### 4.1.4 Редуцирование комбинированного распределения

Редукция ФР, представленной в виде комбинации ВР и непрерывного распределения (3.11), сводится к редукции аддитивных составляющих.

$$F_{\Sigma}^p(x, a, b) = \sum_{\forall j} p_j \cdot F_j^p(x, a, b).$$

В частности, для модели «ВР генерации – нормальное распределение нагрузки» с эквивалентированием

$$F_N^p(x, a, b) = p_3 F^p(x, M_3, D_3, a, b) + \sum_{j \in J} p_j \cdot F^p(x, M_j, D_L, a, b), \quad (4.7)$$

где  $M_j = M_L - G_j$ .

МО редуцированного распределения типа «взвесь»

$$M_{\Sigma}^p(a, b) = \sum_{\forall j} p_j \cdot M^p(M_j, D_j, a, b). \quad (4.8)$$

Второй начальный момент

$$\chi_{\Sigma}^p(a, b) = \sum_{\forall j} p_j \cdot \chi^p(M_j, D_j, a, b), \quad (4.9)$$

дисперсия

$$D_{\Sigma}^p(a, b) = \chi_{\Sigma}^p(a, b) - (M_{\Sigma}^p(a, b))^2.$$

Объединяя дискретные распределения генерации и ПС связей получаем:

$$M^p = \sum_j \sum_i p_j^2 \cdot p_i^n \cdot M_j^p(M_j, D_j, a_i, b_i),$$

$$\chi^p = \sum_j \sum_i p_j^2 \cdot p_i^n \cdot \chi_j^p(M_j, D_j, a_i, b_i).$$

Символы «г», «л» приведены для идентификации принадлежности вероятности к генерации (распределениям) или линиям (пределам редуцирования).

Наиболее часто редуцированное распределение используется при определении математического ожидания и дисперсии дефицита мощности или воздействия (спрос – предложение) ЭЭС на смежную ЭЭС.

#### 4.2 Математическое ожидание дефицита мощности в концентрированной ЭЭС

Наиболее часто используемое при экспресс–расчетах допущение – нормальное распределение имеет не только нагрузка, но и небаланс мощности. Рассмотрим данный частный случай. Дефицит мощности  $\mathfrak{R}$  можно рассматривать как случайную величину с функцией распределения

$$F_{\mathfrak{R}}(x) = \begin{cases} 0, & N < 0; \\ F_N(x), & N \geq 0. \end{cases}$$

Его математическое ожидание и дисперсия

$$M_{\mathfrak{R}} = \int_0^{\infty} x \cdot dF_N(x) = M^p(M_N, D_N, 0, \infty);$$

$$D_{\mathfrak{R}} = D^p(M_N, D_N, 0, \infty).$$

Если система генерации задается вероятностным рядом  $\{p_i, G_i\}$ , то функция распределения небаланса мощности имеет вид

$$F_N(x) = \sum_{i=0}^n p_i F_L(x + G_i).$$

В этом случае его математическое ожидание

$$M_{\mathfrak{R}} = \int_0^{\infty} x \cdot dF_N(x) = \sum_{i=0}^n p_i \int_0^{\infty} x \cdot dF_L(x + G_i) = \sum_{i=0}^n p_i M^p(M_L - G_i, D_L, 0, \infty).$$

Аналогично второй начальный момент

$$\chi_{\text{зр}} = \sum_{\forall j} p_j \cdot \chi^P(M_L - G_j, D_L, 0, \infty).$$

$$\text{Дисперсия } D_{\text{зр}} = \chi_{\text{зр}} - M_{\text{зр}}^2.$$

**Пример 4.1.** Определить математическое ожидание дефицита мощности концентрированной ЭЭС с ВР генерации ( $n=10$ ,  $G=100$  МВт,  $q=0,05$ ), представленным в таблице расчетов, и нагрузкой с параметрами  $M_L=900$  МВт и СКО  $\sigma_L=50$  МВт (пример 3.6).

### *Простейшая модель*

Математическое ожидание генерации  $M_G = n(1-q)G = 10 \cdot 0,95 \cdot 100 = 950$  МВт.

Дисперсия генерации  $D_G = nq(1-q)G^2 = 10 \cdot 0,05 \cdot 0,95 \cdot 100^2 = 4750$  МВт<sup>2</sup>.

Математическое ожидание НМ  $M_N = M_L - M_G = 900 - 950 = -50$  МВт.

Дисперсия НМ  $D_N = D_G + D_L = 4750 + 2500 = 7250$  МВт<sup>2</sup>.

МО дефицита мощности  $M_{\text{зр}} = M^P(-50, 7250, 0, \infty) = 14,66$  МВт.

Дисперсия дефицита мощности  $D_{\text{зр}} = D^P(-50, 7250, 0, \infty) = 1071$  МВт<sup>2</sup>.

Среднее квадратичное отклонение  $\sigma_{\text{зр}} = 32,7$  МВт.

*Расчеты с ВР генерации* сведены в табл. 4.1. Вероятностный ряд генерации ограничен пятью состояниями, причем последнее является эквивалентным для всей нижней части ВР. Расчет МО и ВНМ редуцированного распределения выполнен с помощью процедур, реализующих (4.4), (4.6). Интересно отметить, что вклад имеющей вероятность 0,001 эквивалентной составляющей в МО дефицита составляет почти 2%. Это заставляет при выборе эквивалентного множества снижать критериальную вероятность, например, до величины 0,0001.

Расчет ВНМ дефицита мощности представлен скорее для демонстрации метода, нежели для практического использования. С его помощью нетрудно вычислить дисперсию и среднее квадратичное отклонение, равное  $\sigma=43,4$ . Полученные МО и дисперсия несколько отличаются от рассчитанных простейшим методом. Однако разница приемлема для практических расчетов по упрощенной модели.

Расчет МО дефицита мощности

k	$P_k$	$G_k$	$M_L - G_k$	$M_k^p$	$P_k M_k^p$	$\chi_k^p$	$P_k \chi_k^p$
0	0,599	1000	-100	0,424542	0,2543	565,13	338,51
1	0,315	900	0	19,94711	6,2833	1250	393,75
2	0,075	800	100	100,4245	7,5318	11935	895,12
3	0,01	700	200	200,0004	2,0000	42497	424,97
4	<b>0,001</b>	593,5	306,5	306,5	0,3157	96442	99,335
				Итого	16,385	Итого	2151,7

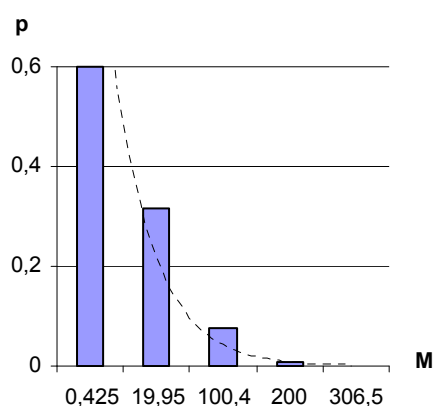


Рис. 4.3. Распределение дефицита мощности

Часто используемый в инженерной практике критерий двух сигм здесь не может быть использован, поскольку  $M_{гр} - 2\sigma = 16,38 - 86,8 \ll 0$ , что не допустимо для положительного дефицита мощности. Данный факт позволяет предположить, что распределение дефицита не является нормальным. И это действительно так. Зависимость  $P_k$  от  $M_k^p$  имеет практически экспоненциальный характер (рис. 4.3, где штриховая линия – экспоненциальный тренд).

На первый взгляд, полученный ожидаемый дефицит мощности  $M_{гр} = 16,38$  МВт, составляющий 1,8%  $M_L$ , незначительно мал. Однако эта незначительность относительна, поскольку именно МО дефицита мощности определяет ожидаемый ущерб от недоотпуска электроэнергии потребителю. В упрощенном представлении ущерб  $U = y_0 T M_{гр}$ , где  $T$  – длительность расчетного периода. Если удельный ущерб  $y_0 = 1 \text{ \$}/\text{кВт} \cdot \text{ч}$ , что недалеко от истины, то при нагрузке, заданной МО и дисперсией, и годовом интервале  $T = 8760$  ч ущерб  $U = 1 \cdot 8760 \cdot 16,38 = 143,5$  млн \\$, что не так уж и мало.



Известно, что удельный ущерб является функцией «глубины» ограничения нагрузки. Отношение  $M_{гр}/M_L = 1,8\%$  не является отражением этой «глубины», поскольку здесь необходимо рассматривать условную величину - дефицит мощности при условии, что в ЭЭС наблюдается состояние, при котором нагрузка больше генерации. Математическое ожидание условной величины равно МО безусловной, деленному на вероятность события мощности. Отсюда ожидаемая «глубина» ограничения нагрузки  $\varepsilon = M_{гр}/M_L/(1-F_N(0)) = 1,8/0,306 = 5,9\%$ .

### 4.3 Объединение двух ЭЭС. Стратегия «локального эгоизма»

Поскольку при указанной стратегии ЭЭС оказывает помощь лишь при наличии избыточного резерва мощности, то возможна ситуация, когда дефицит мощности наблюдается лишь в одной ЭЭС. Отсюда возникает ряд задач, представляющих практический интерес: определение вероятностных показателей дефицита мощности в каждой ЭЭС, в объединении в целом, в отдельной ЭЭС с

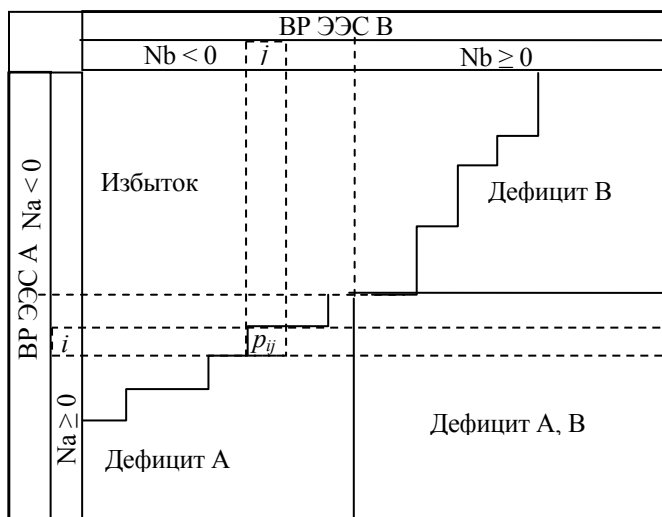


Рис. 4.4. Пространство состояний двух ЭЭС

учетом спроса-предложения от смежных ЭЭС, расчет суммарного воздействия двух ЭЭС на третью и др.

Наиболее простым решением при анализе надежности двух ЭЭС является представление их состояний в двумерном пространстве с координатами, соответствующими атрибутам небалансов мощности ЭЭС (рис. 4.4).

Данный подход эквивалентен методу полного перебора состояний объединенной ЭЭС. Вероятность комбинированного состояния при независимости небалансов мощности ЭЭС  $p_{ij} = p_i p_j$ . Небаланс мощности в каждой ЭЭС определяется собственным НМ и возможностью-

ванного состояния при независимости небалансов мощности ЭЭС  $p_{ij} = p_i p_j$ . Небаланс мощности в каждой ЭЭС определяется собственным НМ и возможностью-

ми соседней ЭЭС в предоставлении дополнительной генерации. При этом переток мощности по связи ограничивается ее пропускной способностью.

В отсутствие межсистемной связи дефицит мощности имеет место, если  $N_i > 0$ . При наличии связи области дефицитной работы каждой ЭЭС сокращаются за счет дополнительной генерации, причем сокращение тем больше, чем больше пропускная способность связи (см. рис. 4.4). Так, в примере [11] вероятность дефицита в одной из ЭЭС снизилась от 0,00411 при отсутствии связи до 0,00055 при бесконечной ПС связи.

Метод полного перебора состояний, обладая несомненным преимуществом в точности, требует значительных затрат машинного времени. Методы вероятностного эквивалентирования позволяют получить решение значительно быстрее без существенной потери точности.

**Нормальное распределение НМ.** Если предположить, что результирующий, с учетом помощи от соседней ЭЭС, НМ описывается нормальным распределением, то для его описания достаточно математического ожидания и дисперсии, которые равны сумме соответствующих величин собственного НМ и перетока мощности по связи. В свою очередь, переток определяется располагаемым НМ соседней ЭЭС, редуцированным ПС связи.

При решении задачи определения дефицита мощности в отдельной ЭЭС, например ЭЭС А, учитывается только генерирующая часть НМ ЭЭС В, поскольку нагрузочная составляющая увеличивает дефицит, а стратегия «локального эгоизма» позволяет избежать этого увеличения. Отсюда

$$M_{A\Sigma} = M_A + M_B^p(M_B, D_B, -P_{BA}, 0); D_{A\Sigma} = D_A + D_B^p(M_B, D_B, -P_{BA}, 0).$$

В данном выражении переток мощности по связи определяется функцией распределения НМ ЭЭС В, редуцированной интервалом отрицательных величин. Такой переток далее идентифицируется как «эквивалентная генерация», или «эквивалентный генератор». По аналогии небаланс мощности, редуцированный областью положительных значений, называется «эквивалентной нагрузкой».

**Пример 4.2.** Оценить вероятностные параметры дефицитного состояния ЭЭС А при наличии межсистемной связи с ЭЭС В.

*Исходные данные.* Генерация:  $q=0,04$ ;  $\lambda=0,4$  год<sup>-1</sup>;  $\mu=9,6$  год<sup>-1</sup>;  $G_A=4*50$  МВт;  $G_B=2*40$  МВт +  $1*80$  МВт. Нагрузка:  $L_{A,max}=150$  МВт;  $L_{B,max}=120$  МВт [11, п. 9.3]. Рассматривается двухуровневая модель нагрузки с вариацией максимума. ВР нагрузки (в % от максимума) имеет вид

L	0%	67%	80%	93%	100%
p	0,5	0,05	0,1	0,25	0,1

Согласно данным вероятностного ряда математическое ожидание нагрузки  $M_L=0,45L_{max}$ . Дисперсия  $D_L=0,2 L_{max}^2$ . Отсюда  $M_{LA}=67$ ,  $D_{LA}=4601$ ,  $M_{LB}=53,6$ ,  $D_{LB}=2944$ .

**ЭЭС А.** МО генерации  $M_{GA} = n(1-q)G = 4 \cdot (1-0,04) \cdot 50 = 192$  МВт.

Дисперсия генерации  $D_{GA} = nq(1-q)G^2 = 4 \cdot 0,04 \cdot (1-0,04) \cdot 50^2 = 384$  МВт<sup>2</sup>.

МО небаланса мощности  $M_{NA} = M_{LA} - M_{GA} = 67 - 192 = -125$  МВт.

Дисперсия небаланса мощности  $D_{NA} = D_{LA} + D_{GA} = 4601 + 384 = 4985$  МВт<sup>2</sup>.

Вероятность дефицита при изолированной работе и нормальном распределении НМ  $P(N_A > 0) = 1 - F_{Na}(0) = 0,0383$ .

МО дефицита при изолированной работе и нормальном распределении НМ  $M(\mathfrak{R}_A) = M^p(M_{NA}, D_{NA}, 0, \infty) = M^p(-125, 4985, 0, \infty) = 1,086$  МВт.

Дисперсия дефицита при изолированной работе и нормальном распределении НМ  $D(\mathfrak{R}_A) = D^p(M_{NA}, D_{NA}, 0, \infty) = D^p(-125, 4985, 0, \infty) = 54,2$  МВт<sup>2</sup>.

СКО  $\sigma(\mathfrak{R}_A) = 7,36$  МВт.

**ЭЭС В. «Эквивалентный генератор».**

МО генерации  $M_{GB} = (1-0,04) \cdot (2 \cdot 40 + 80) = 153,6$  МВт.

Дисперсия генерации  $D_{GB} = 0,04 \cdot (1-0,04) \cdot (2 \cdot 40^2 + 80^2) = 369$  МВт<sup>2</sup>.

МО небаланса мощности  $M_{NB} = M_{LB} - M_{GB} = 53,6 - 153,6 = -100$  МВт.

Дисперсия небаланса мощности  $D_{NB} = D_{LB} + D_{GB} = 2944 + 369 = 3313$  МВт<sup>2</sup>.

Вероятность дефицита при изолированной работе и нормальном распределении НМ  $P(N_B > 0) = 1 - F_{Nb}(0) = 0,0412$ .

МО дефицита при изолированной работе и нормальном распределении НМ  $M(\mathfrak{R}_B) = M^P(M_{NB}, D_{NB}, 0, \infty) = M^P(-100, 3313, 0, \infty) = 1,086$  МВт.

Дисперсия дефицита при изолированной работе и нормальном распределении НМ  $D(\mathfrak{R}_B) = D^P(M_{NB}, D_{NB}, 0, \infty) = D^P(-100, 3313, 0, \infty) = 39,4$  МВт<sup>2</sup>.

СКО  $\sigma(\mathfrak{R}_B) = 6,3$  МВт.

МО «эквивалентного генератора»  $M_e = M_B^P(-100, 3313, -\infty, 0) = -101$  МВт.

Дисперсия «эквивалентного генератора»  $D_e = D_B^P(-100, 3313, -\infty, 0) = 3080$  МВт<sup>2</sup>.

### ***Результирующее распределение ЭЭС А***

МО  $M_{NA\Sigma} = M_{NA} + M_e = -125 - 101 = -226$  МВт.

Дисперсия  $D_{NA\Sigma} = D_{NA} + D_e = 4985 + 3080 = 8065$  МВт<sup>2</sup>.

Вероятность дефицита в ЭЭС А при совместной работе и нормальном распределении результирующего НМ ( $P(N_{A\Sigma} > 0) = 0,0035$ ) уменьшилась на порядок по сравнению с режимом изолированной работы.

МО дефицита в ЭЭС А при совместной работе

$M(\mathfrak{R}_{A\Sigma}) = M^P(M_{A\Sigma}, D_{A\Sigma}, 0, \infty) = M^P(-226, 8065, 0, \infty) = 0,17$  МВт.

Дисперсия дефицита в ЭЭС А при совместной работе

$D(\mathfrak{R}_{A\Sigma}) = D^P(M_{A\Sigma}, D_{A\Sigma}, 0, \infty) = D^P(-226, 8065, 0, \infty) = 9,1$  МВт<sup>2</sup>.

Среднее квадратичное отклонение = 3,02 МВт.

Разность  $M(\mathfrak{R}_{NA}) - M(\mathfrak{R}_{A\Sigma}) = 1,086 - 0,17 = 0,916$  МВт определяет МО небалансного перетока мощности по межсистемной связи в направлении ВА.

Читателю предлагается самостоятельно определить вероятностные показатели дефицитного состояния ЭЭС В с учетом межсистемной связи.

***Редукция вероятностного ряда.*** Допущение о нормальном распределении результирующего НМ возможно для реальных ЭЭС с большим числом разнотипных агрегатов. Для относительно небольших систем с малым числом агрегатов и нагрузкой, заданной ВР (например, двухуровневая модель нагрузки), такое допущение приводит к большим погрешностям. Более точным здесь является метод вероятностных рядов.

Поскольку результирующий НМ является суммой собственного НМ и «эквивалентного генератора связи», то результирующая функция распределения представляет собой свертку ФР составных величин. Следовательно, результирующий ВР является произведением ВР собственного НМ и редуцированного ВР «эквивалентного генератора».

Редукция ВР, по существу, идентична описанному выше эквивалентированию части ВР.

**Пример 4.3** В условиях рассмотренного выше примера выполнить расчеты, используя метод ВР, в том числе редуцированного ВР.

**Решение.** ВР генерации ЭЭС А имеет вид

G	-200	-150	-100	-50	0
p	0,849347	0,141558	0,008847	0,000246	2,56E-06

ВР генерации ЭЭС В имеет вид

G	-160	-120	-80	-40	0
p	0,885	0,0737	0,0384	0,00307	0,000064

ВР нагрузки представлен в исходных данных.

ВР небаланса мощности ЭЭС А и В при их отдельной работе

ЭЭС А		ЭЭС В		
<i>N</i>	<i>p</i>	<i>N</i>	<i>p</i>	<i>1-F(x)</i>
-200	0,4247	-160	0,4424	1,0000
-150	0,0708	-120	0,0369	0,5576
-100	0,0469	-80	0,0634	0,5208
...	...	...	...	...
-10	0,0354	-8	0,0184	0,0466
0	0,014599	<b>0</b>	0,0093	<b>0,0282</b>
20	0,000885	16	0,0038	0,0188
40	0,002212	32	0,0096	0,0150
...	...	...	...	...
140	6,4E-07	112	0,000016	2,24E-05
150	2,56E-07	120	6,4E-06	6,4E-06

В данной таблице большая часть состояний не приведена с целью сокращения объема таблицы (очень надеемся, что читатель с помощью ЭВМ получит все состояния). ВР «эквивалентного генератора» совпадает с ВР ЭЭС В в области отрицательных НМ. Нулю соответствует накопленная вероятность  $p = 0,0282$ .

Результирующий вероятностный ряд, полученный произведением ВР НМ ЭЭС А и «эквивалентного генератора», состоит из 107 элементов (табл. 4.2).

Накопленная вероятность, соответствующая состоянию  $N=2$ ,  $1-F(2)=0,000548$  определяет результирующую вероятность дефицита мощности в ЭЭС А.

Таблица 4.2

<b>k</b>	1	2	...	66	67	68	69	...	106	107
<b>N</b>	-360	-320	...	-4	<b>0</b>	<b>2</b>	6	...	142	150
<b>p</b>	0,188	0,016	...	0,0000	0,0006	0,0002	2,2E-06	...	4,72E-09	7,21E-09
<b>1-F(x)</b>	1,000	0,812	...	0,0012	0,0012	<b>0,000548</b>	0,00035	...	1,19E-08	7,21E-09

Следует отметить абсолютное совпадение данной величины с вероятностью, полученной в [11] методом прямого перебора событий. Этого следовало ожидать, поскольку метод ВР, по существу, является формализованным отражением метода прямого перебора, а процедура редуцирования, существенно сократившая объем расчетов, не повлияла на окончательный результат.

Сравнение результатов двух последних примеров показывает, что в первом случае (нормальное распределение НМ) мы получили вероятность, почти на порядок отличающуюся от точного значения. Это вызывает некоторое недоверие к простейшей модели эквивалентирования НМ нормальным распределением. Однако не стоит полностью отказываться от этой модели. При определенных допущениях, основным из которых является нормальное распределение нагрузки, данная модель обеспечивает достаточно точное решение.

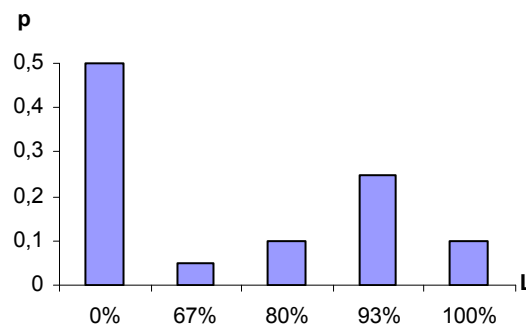


Рис. 4.5. Распределение нагрузки

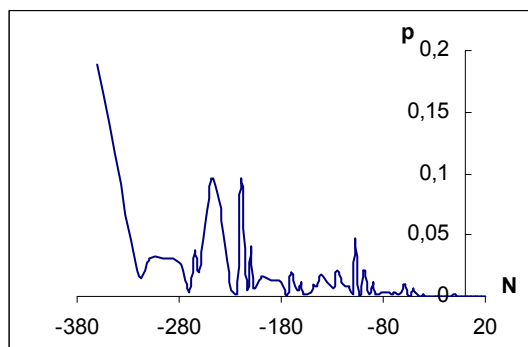


Рис. 4.6. Распределение результирующего НМ

В рассмотренном примере нагрузка имеет дискретное распределение, далекое от нормального (рис. 4.5). Не является нормальным и распределение результирующего НМ (рис. 4.6). Выброс вероятности в области максимальной генерации объясняется большой

вероятностью нулевой нагрузки (см. рис. 4.5). Аналогичная картина имеет место и в том случае, когда минимальная нагрузка не равна нулю, но имеет большую вероятность.

**Пример 4.4.** В условиях примера 4.3 выполнить расчет вероятности дефицита мощности в ЭЭС *A*, приняв пропускную способность связи 50 МВт.

**Решение.** В отличие от предыдущего примера ВР «эквивалентного генератора» определяется путем редуцирования ВР НМ ЭЭС *B* интервалом (-50, 0) МВт. В результате ВР «эквивалентного генератора» имеет вид

N	-48	-40	-24	-8	0
p	0,85233	0,0937	0,0074	0,0184	0,0282

Результирующий ВР получен произведением ВР НМ ЭЭС *A* и «эквивалентного генератора»

k	1	2		43	44	45		80
N	-248	-240		-4	<b>0</b>	<b>2</b>		150
p	0,362	0,0398		6,52E-06	0,00062	0,000765		7,21E-09
1-F(x)	1	0,6380		0,001795	0,00179	<b>0,00117</b>		7,21E-09

Накопленная вероятность, соответствующая состоянию  $N=2$ ,  $1-F(2) = \underline{0,00117}$  определяет результирующую вероятность дефицита мощности в ЭЭС *A*. Это в два раза больше, чем в случае бесконечной ПС связи, где  $1-F(2) = 0,000548$ . Следует отметить, что в реальных ЭЭС, где установленная мощность значительно больше пропускной способности связей, влияние величины ПС на результирующую вероятность дефицита не столь значительно.

#### 4.4 Переток мощности по связи в замкнутой системе

Для оценки взаимопомощи ЭЭС определяются вероятностные параметры перетока мощности по межсистемной связи. В замкнутой системе (объединение только двух ЭЭС) переток мощности по межсистемной связи зависит не только от спроса или предложения одной из систем, но от совместного спроса одной и предложения другой ЭЭС. Переток является дополнительной инъекцией мощно-

сти в узел и проявляется в изменении параметров результирующих «эквивалентного генератора» и «эквивалентной нагрузки».

Можно предположить, что МО и дисперсия перетока мощности определяются разностью соответствующих параметров редуцированного НМ двух режимов работы - при отсутствии и наличии межсистемной связи. Так, для МО перетока в направлении от  $B$  к  $A$

$$M(\pi_{ba}) = M^P(M_a, D_a, 0, \infty) - M^P(M_a + M^P(M_b, D_b, -\Pi_{ba}, 0), D_a + D^P(M_b, D_b, -\Pi_{ba}, 0), 0, \infty) \quad (4.10)$$

Данное предположение основано на известной закономерности, что МО суммы независимых случайных величин (небаланс мощности в ЭЭС и переток мощности по связи) равен сумме МО составных величин. Однако упомянутые случайные величины не являются независимыми, отсюда приведенное выражение может служить лишь предположительной оценкой МО перетока мощности. Для более точного расчета необходимо рассмотреть математическую модель, учитывающую условную связь событий.

#### 4.4.1 Функция распределения перетока мощности

Переток мощности в направлении от  $B$  к  $A$  не меньше  $x$ , если одновременно дефицит мощности в ЭЭС  $A$  и генерация мощности в ЭЭС  $B$  не меньше  $x$ . Вероятность данного события определяется произведением вероятностей составных событий

$$R_{ba}(x) = R_a(x) \cdot V_b(-x), \quad 0 \leq x \leq \Pi_{ba}. \quad (4.11)$$

Аналогично для обратного направления

$$R_{ab}(y) = R_b(y) \cdot V_a(-y), \quad 0 \leq y \leq \Pi_{ab}. \quad (4.12)$$

В отличие от  $F(x)$  введенная здесь функция  $V(x)$  отражает тот факт, что случайная величина  $\xi$  включает правый предел  $V(x) = P\{\xi \leq x\}$ , в то время как  $F(x) = P\{\xi < x\}$ .

Переток мощности можно рассматривать как однородную случайную величину, принимающую положительное значение, если направление мощности



совпадает с заданным в обозначении перетока направлением, и отрицательное, если оно противоположно. В этом случае

$$\pi_{ba}(x) = \pi_{ab}(-x), \quad -\Pi_{ab} \leq x \leq 0.$$

Выражение(4.12) можно преобразовать следующим образом:

$$R_{ab}(y) = P\{\pi_{ab} \geq y\} = P\{\pi_{ba} \leq -y\} = V_{ba}(-y) = R_b(y) \cdot V_a(-y), \quad 0 \leq y \leq \Pi_{ab}.$$

После замены переменных получаем

$$V_{ba}(x) = R_b(-x) \cdot V_a(x), \quad -\Pi_{ab} \leq x \leq 0.$$

Окончательно функция распределения  $\pi_{ba}$  имеет вид

$$F_{ba}(x) = \begin{cases} V_a(x) \cdot R_b(-x), & -\Pi_{ab} \leq x < 0; \\ 1 - R_a(x) \cdot V_b(-x), & 0 \leq x \leq \Pi_{ba}. \end{cases} \quad (4.13)$$

Следует отметить, что в точке  $x=0$  данная функция имеет разрыв первого рода. Действительно, в общем случае

$$V_a(0) \cdot R_b(0) \neq 1 - R_a(0) \cdot V_b(0).$$

Величина дискретного изменения ФР определяет вероятность отсутствия аварийного перетока мощности по межсистемной связи:

$$p_{ba}(0) = 1 - R_a(0) \cdot V_b(0) - V_a(0) \cdot R_b(0).$$

Через дифференциал функции распределения (4.13)

$$dF_{ba}(x) = \begin{cases} R_b(-x) \cdot dF_a(x) + V_a(x) \cdot dF_b(-x), & -\Pi_{ab} \leq x < 0; \\ R_a(x) \cdot dF_b(-x) + V_b(-x) \cdot dF_a(x), & 0 \leq x \leq \Pi_{ba} \end{cases}$$

можно получить представление ВР перетока мощности

$$p_{ba}(x_i) = \begin{cases} p_a(x_i) \cdot R_b(-x_i) + p_b(-x_i) \cdot V_a(x_i), & -\Pi_{ab} \leq x_i < 0; \\ p_a(x_i) \cdot V_b(-x_i) + p_b(-x_i) \cdot R_a(x_i), & 0 \leq x_i \leq \Pi_{ba}. \end{cases} \quad (4.14)$$

Данное выражение можно трактовать как вероятностное представление следующего условного события. Переток мощности в направлении от  $B$  к  $A$  равен  $x_i$ , если реализуется одно из двух событий: в ЭЭС  $A$  наблюдается дефицит мощности  $x_i > 0$  и он покрывается избытком генерирующей мощности в ЭЭС

В,  $N_b \leq -x_i$ , или в ЭЭС В имеет место избыток мощности  $-x_i$  и он покрывается дефицитом мощности в ЭЭС А,  $N_a > x_i$ . Величина  $x$  при этом ограничивается ПС связи. Аналогичные рассуждения можно провести для потока мощности в обратном направлении.

Для того, чтобы подчеркнуть кумулятивный характер функций  $R(x), V(x)$  при работе с ВР, формула (4.14) записывается через суммы, представляющие кумулятивные функции:

$$p_{ba}(x_i) = \begin{cases} p_a(x_i) \cdot \sum_{x_j \geq -x_i} p_b(x_j) + p_b(-x_i) \cdot \sum_{x_j \leq x_i} p_a(x_j), & -\Pi_{ab} \leq x_i < 0; \\ p_a(x_i) \cdot \sum_{x_j \leq -x_i} p_b(x_j) + p_b(-x_i) \cdot \sum_{x_j \geq x_i} p_a(x_j), & 0 \leq x_i \leq \Pi_{ba}. \end{cases}$$

Выражение (4.14) структурно состоит из двух частей: элементы с вероятностями  $p_a$  и  $p_b$  дискретных состояний НМ соответственно ЭЭС А и В. Отсюда расчет ВР перетока мощности можно представить как «сумму  $R_{ba} = \{x_{ba,i}, p_{ba,i}\} = R_a + R_b$  двух ВР, определяемых по однотипной процедуре:

$$R_a = \{x_{ai}, p_{ai}\}; \quad p_{ai} = \begin{cases} p_a(x_{ai}) \cdot R_b(-x_{ai}), & x_{ai} < 0; \\ p_a(x_{ai}) \cdot V_b(-x_{ai}), & x_{ai} \geq 0, \end{cases}$$

$$R_b = \{x_{bi}, p_{bi}\}; \quad p_{bi} = \begin{cases} p_b(-x_{bi}) \cdot V_a(x_{bi}), & x_{bi} < 0; \\ p_b(-x_{bi}) \cdot R_a(x_{bi}), & 0 \leq x_{bi}. \end{cases}$$

Под «суммированием ВР» здесь понимается следующая процедура. Если дискретный параметр  $x_{ai} \in R_a$  ( $x_{bi} \in R_b$ ) является уникальным, т.е. не повторяется в другом ВР, то структура  $\{x_{ai}, p_{ai}\}$  ( $\{x_{bi}, p_{bi}\}$ ) входит в состав объединения  $R_{ba}$  без изменения. В противном случае ( $x_{ai} = x_{bj}$ ) в результирующий ряд входит структура  $\{x_{ai}, (p_{ai} + p_{bj})\}$ . Полученный ВР редуцируется интервалом  $(-\Pi_{ab}, \Pi_{ba})$ .

Универсальное выражение (4.13) состоит из двух отличающихся математических формул в области положительных и отрицательных значений перетока мощности, и алгоритмически расчеты сводятся к выбору того или другого составного выражения. Отсюда во многих практических приложениях перетоки

мощности в разных направлениях желательно рассматривать как разные физические величины. Сверх того, такое разделение часто необходимо, поскольку в технико-экономических расчетах аварийные перетоки оцениваются по-разному, в зависимости от их направления. Специфика описанной выше процедуры построения ВР перетока мощности здесь проявляется лишь в изменении интервала редуцирования.

#### 4.4.2 Вероятность отсутствия перетока мощности по связи

Эффективность функционирования межсистемной связи с позиции надежности ЭЭС может быть в какой-то степени оценена по вероятности отсутствия значимых перетоков мощности в аварийных режимах. Действительно, если эта вероятность близка к нулю, то реально можно пренебречь аварийными перетоками по данной связи и рассматривать ее эффективность только по экономическим критериям (оптимальное распределение нагрузки между параллельно работающими ЭЭС, минимизация потерь мощности и др.).

Упомянутую вероятность можно вычислить через разность пределов ФР потока мощности по связи при стремлении переменной к нулю справа и слева

$p_{ba}(0) = (1 - R_{ba}(0)) - F_{ba}(0)$ . Из (4.13) следует

$$p_{ba}(0) = 1 - R_a(0) \cdot V_b(0) - V_a(0) \cdot R_b(0) = 1 - (1 - V_a(0)) \cdot V_b(0) - V_a(0) \cdot R_b(0) = 1 + V_a(0) \cdot V_b(0) - V_b(0) - V_a(0) \cdot R_b(0) = V_a(0) \cdot V_b(0) + R_b(0) - V_a(0) \cdot R_b(0).$$

Окончательно

$$p_{ba}(0) = V_a(0) \cdot V_b(0) + R_b(0) \cdot R_a(0). \quad (4.15)$$

Таким образом, получено почти очевидное соотношение, определяющее вероятность составного события: аварийный переток мощности по связи отсутствует, если и в той и другой ЭЭС одновременно имеет место либо избыток, либо дефицит генерирующей мощности.

Выражение (4.15) показывает, в частности, что ФР перетока мощности имеет скачок первого рода в точке  $x=0$ . Этот скачок равен нулю лишь в том слу-

чае, когда одна из ЭЭС – чисто генерирующая, а другая – чисто нагрузочная, т.е. поток имеет одностороннюю направленность.

#### 4.4.3 Математическое ожидание перетока мощности

Если имеется ВР некоторой случайной величины (переток мощности), то определение математического ожидания или моментов рассматриваемой величины не представляет затруднений. В частности, для перетока мощности

$$M(\pi_{ba}) = \sum_{\forall i} x_{ba,i} \cdot p_{ba,i} = \sum_{x_{ba,i} < 0} x_{ba,i} \cdot p_{ba,i} + \sum_{x_{ba,i} > 0} x_{ba,i} \cdot p_{ba,i} = M(\pi_{ba}^-) + M(\pi_{ba}^+), \quad (4.16)$$

где  $M(\pi_{ba}^+)$ ,  $M(\pi_{ba}^-)$ - МО перетоков мощности в прямом и обратном направлении.

Аналогичный вывод можно сделать относительно аддитивности второго начального момента.

Выражение (4.16) основано на построении ВР перетока по вероятностным рядам небалансов мощности смежных ЭЭС. При этом не всегда генерация  $N_a = -\pi$  в одной из систем имеет точное соответствие  $N_b = \pi$  в шкале нагрузок другой ЭЭС. Это приводит к усложнению расчетной процедуры. Более простое решение имеет место в случае, когда одна из ЭЭС (например, ЭЭС В) представлена непрерывной ФР. В этом случае

$$M(\pi_{ba}^+) = \left( \sum_{0 \leq x_i \leq \Pi_{ba}} x_i \cdot p_a(x_i) \cdot V_b(-x_i) \right) + \Pi_{ba} \cdot V_b(-\Pi_{ba}) \cdot \sum_{x_i > \Pi_{ba}} p_a(x_i)$$

$$M(\pi_{ba}^-) = \left( \sum_{-\Pi_{ab} \leq x_i < 0} x_i \cdot p_a(x_i) \cdot R_b(-x_i) \right) - \Pi_{ab} \cdot R_b(\Pi_{ab}) \cdot \sum_{x_i < -\Pi_{ab}} p_a(x_i).$$

**Пример 4.5.** Выполнить расчет МО перетока мощности по межсистемной связи с бесконечной пропускной способностью. Исходные данные по ЭЭС А приведены в примере 4.2. Вероятностный ряд НМ этой ЭЭС описан в примере 4.3. НМ ЭЭС В описывается нормальным распределением с математическим ожиданием  $M_{NB} = -100$  МВт и дисперсией НМ  $D_{NB} = 3313$  МВт<sup>2</sup>.

Решение приведено в табл. 4.3, где часть данных опущена для компактно-го представления таблицы. Ожидаемый переток по связи в направлении от В к А составляет 0,078 МВт, а в обратном направлении - 0,133 МВт.

Таблица 4.3

$N_k$	-200	-150	...	-10	0	20	40	...	140	150
$p_k$	0,4247	0,0708	...	0,0354	0,0146	0,0009	0,0022	...	6,4E-07	2,6E-07
$R_b(-N_k)$	9,3E-08	7,06E-06		2,8E-02	$F_b(-N_k)$	0,902	0,856		0,243	0,19
$N_k p_k R_b$	-7,9E-06	-7,5E-05	...	-0,0099	<b>Итого</b>	<b>0,078</b>				
$N_k p_k F_b$				<b>Итого</b>	<b>0,133</b>	0,01624	0,0753	...	2,18E-05	7,4E-06

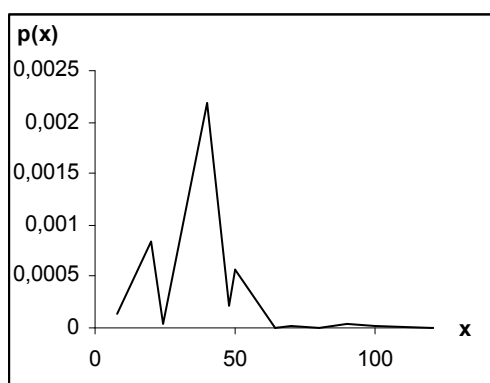


Рис. 4.7. ВР перетока мощности

Решение данной задачи по упрощенной методике приведено в примере 4.2, где разность  $M(\mathfrak{R}_{NA}) - M(\mathfrak{R}_{AS}) = 1,086 - 0,17 = 0,916$  МВт определяет МО небалансного перетока мощности по меж-системной связи в направлении ВА. Полученная в рассматриваемом примере величина перетока  $M(\pi_{ba}^+) = 0,133$  МВт является более точной оценкой межсистемного перетока мощности.

Для сопоставления моделей был выполнен расчет при учете дискретности НМ как системы А, так и системы В. В результате был получен ВР (рис. 4.7) перетока мощности в направлении В-А. Частично данный ряд представлен в таблице:

$x_i$	8	20	24	40	...	150	160	сумма
$p_i$	0,000145	0,00084	4,56E-05	0,00218	...	1,13E-07	0	<b>0,00407</b>
$x_i p_i$	0,00116	0,017	0,00109	0,0873	...	1,7E-05	0	<b>0,151</b>

Сумма произведений перетоков на соответствующие вероятности определяет математическое ожидание  $M(\pi_{ba}^+) = 0,151$  МВт. Эта величина на 13,5% превышает полученную ранее 0,133 МВт. Из данного примера видно, что замена дискретного распределения НМ непрерывным снижает величину МО перетока мощности.

Математические ожидания перетоков (0,151; 0,133; 0,96) включают как событие отсутствие перетока мощности в рассматриваемом направлении. Эти величины обычно участвуют в расчетах интегральных технико-экономических показателей, например ежегодных платежей за аварийный переток мощности. В то же время они малоинформативны при оценке величины возможного аварийного перетока. Для оценки условного (наблюдается аварийный переток) среднего перетока мощности необходимо полученные безусловные МО разделить на вероятность события. В частности безусловному математическому ожиданию  $M(\pi_{ba}^+) = 0,151$  МВт соответствует условное МО  $M(\pi_{ba}^{y+}) = M(\pi_{ba}^+) / P\{\pi_{ba} > 0\} = 0,151/0,00407 = 37,087$  МВт.

Следует отметить, что для сопоставительных расчетов был специально выбран пример, рассмотренный в [11]. Данный пример имеет большую дискретность нагрузки – рассматривается суточный график, где вероятность нулевой нагрузки равна 0,5. На наш взгляд, целесообразно разделять расчетный период (год, месяц, сутки) на интервалы относительно малого изменения нагрузки (день, ночь, час и др.). В этом случае приближенные модели, имея несомненные преимущества в скорости, обеспечивают достаточную точность.

#### 4.5 Эквивалентные преобразования расчетной схемы

Одним из получивших широкое применение методов расчета режимов ЭЭС является эквивалентное преобразование расчетной электрической схемы, где электрическая схема большой размерности преобразуется к схеме с относительно небольшим числом элементов. Данный подход применим и к задачам надежности ЭЭС, в частности, при расчетах структурной надежности ЭЭС [5]. На наш взгляд, преобразование расчетной схемы является перспективным направлением и в расчетах балансовой надежности ЭЭС.

Расчет результирующих вероятностных показателей радиальной структуры может быть организован в зависимости от выбора конечного узла эквивалентных преобразований. Первый подход заключается в том, что **конечным является назначенный узел** (первый, второй и далее до последнего). Процедура

расчета сводится к организации  $n$ -кратного цикла эквивалентных преобразований «от периферии – к центру» (исключение узлов) через исключение узлов первого ранга (число ветвей, примыкающих к данному узлу; в теории графов ранг – степень вершины).

При анализе структурной надежности широко используется двухэтапный расчетный процесс исключение-восстановление узлов схемы. На первом этапе исходная схема преобразуется к простейшей путем последовательного исключения узлов. При этом *отсутствует* предварительный *выбор последнего узла*. Результирующие показатели надежности определяются в обратном порядке на следующем этапе в процессе восстановления ранее исключённых узлов. Такой подход эквивалентных преобразований применим и при расчетах балансовой надежности.

Во многом процедура восстановления узлов аналогична процедуре их исключения. В процессе восстановления узлов считаются известными показатели надежности уже восстановленных узлов. Это возможно лишь в том случае, когда восстановление узлов выполняется в порядке, обратном порядку их исключения. Расчет показателей надежности первого восстанавливаемого узла не представляет сложности (радиальная структура из двух узлов).

Следует отметить, что в процессе «восстановления» узлов, как правило, используются менее точные математические модели (иначе первый подход теряет смысл). В результате выбор того или другого подхода зависит от специфики задачи. При более точных расчетах имеет смысл использовать первый подход, а в экспресс-расчетах – второй. Кроме того, первый подход может служить базой для проверки допустимости второго.

#### 4.5.1 Исключение узлов первого ранга

Здесь обсуждается проблема определения функции распределения  $F_{ba}(x)$  НМ энергосистемы  $B$  с учетом воздействия (спроса-предложения) исключаемой ЭЭС  $A$ , связанной с  $B$  линией ограниченной ПС. В отличие от модели «эквива-

лентного генератора» здесь интерес представляет не только генерирующая, но и нагрузочная часть интервала редуцированного небаланса мощности ЭЭС  $A$ .

Для построения  $F_{b,a}(x)$  необходимо принять во внимание, что определяемый небалансом  $N_a$  переток мощности по межсистемной связи, должен удовлетворять ограничениям по ПС связи  $-P_{ab} \leq \pi_{ba} \leq P_{ba}$ . Как было отмечено ранее, это реализуется отключением избыточной нагрузки при  $N_a > P_{ba}$  или генерации при  $N_a < -P_{ab}$ . Математически данная процедура моделируется путем редуцирования  $F_a(x)$ .

В математической модели замкнутой системы из двух ЭЭС определена ФР перетока мощности по межсистемной связи. Ее дифференциал

$$dF_{\pi}(x) = \begin{cases} F_b(-x) \cdot dF_a^p(x), & x \geq 0, \quad N_b \leq -x, ; \\ R_b(-x) \cdot dF_a^p(x), & x < 0, \quad N_b \geq -x \end{cases}.$$

Результирующий (с учетом воздействия ЭЭС  $A$ ) небаланс мощности в ЭЭС  $B$  определяется суммой собственного НМ  $N_b$  и перетока мощности по связи  $B-A$ . Поскольку функция распределения перетока мощности выражается через  $F_b(x)$ , то случайные величины  $\pi_{ba}$  и  $N_b$  нельзя считать независимыми. ФР результирующего НМ определяется сверткой ФР составных событий, причем одна из этих ФР является условной:

$$\begin{aligned} F_{b,a}(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} F_b^y(z-x) dF_{\pi}(x) = \int_{-\infty}^0 F_b(z-x) (N_b \geq -x) \cdot dF_{\pi}(x) + \int_0^{\infty} F_b(z-x) (N_b < -x) \cdot dF_{\pi}(x) = \\ &= \int_{-\infty}^0 F_b(z-x) (N_b \geq -x) \cdot R_b(-x) \cdot dF_a^p(x) + \int_0^{\infty} F_b(z-x) (N_b < -x) \cdot F_b(-x) \cdot dF_a^p(x). \end{aligned}$$

Здесь  $F(x|R)$  – ФР при условии  $R$ .

Принимая во внимание, что произведение вероятностей  $F(x|R) \cdot P^{\otimes}$  определяет вероятность безусловного события  $N_b < (z-x)$ , получаем

$$F_{b,a}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} F_b(z-x) \cdot dF_a^p(x).$$



Таким образом, суммарная ФР  $F_{b,a}(z)$  является сверткой безусловных ФР  $F_b(x)$ , и  $F_a^p(x)$ . Свертка – отражение операции суммирования случайных величин. Отсюда воздействие радиальной ЭЭС проявляется через суммирование редуцированного НМ первой ЭЭС к НМ смежной ЭЭС.

Процедуру определения ФР, МО и дисперсии редуцированного распределения НМ ЭЭС, например ЭЭС  $A$ , связанной с  $B$ , далее будем обозначать в виде  $A_{ab}^{ba}$ ,  $F_a(x)_{ab}^{ba}$ ,  $(M_a, D_a)_{ab}^{ba}$  в зависимости от того, что рассматривается.

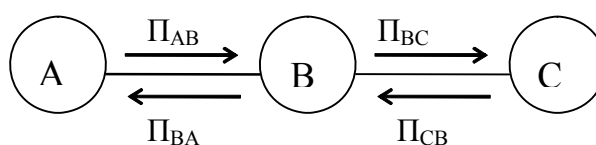


Рис. 4.8. Радиальная структура

При анализе суммарного спроса двух энергосистем воздействие ЭЭС  $A$  через ЭЭС  $B$  на другие ЭЭС ( $C$  и др., рис. 4.8) реализуется через объединение редуцированного НМ ЭЭС  $A$  с НМ ЭЭС  $B$ . Небаланс мощности ЭЭС  $B$  также должен быть редуцирован, поскольку генерация ЭЭС  $B$  не должна превышать  $P_{ba} + P_{bc}$ , а нагрузка -  $(P_{ab} + P_{ca})$ . Таким образом, суммарный НМ ЭЭС  $B$  с добавкой от ЭЭС  $A$  при их совместном воздействии на другие ЭЭС описывается следующей структурной формулой:

$$\{A, B\} = B_{(ba+bc)}^{(ab+cb)} + A_{ab}^{ba} \quad (4.17)$$

В зависимости от точности эквивалентирования процесс преобразования схемы (исключение узлов радиальной цепи) может развиваться в трех направлениях, определяемых представлением суммарного и исходного НМ:

- a) нормальным распределением;
- b) редуцированным распределением;
- c) комбинированным распределением;
- d) вероятностным рядом.

Первое направление не требует дополнительного пояснения. Здесь вычисляются только два параметра МО и дисперсия, которые равны сумме соответствующих параметров редуцированных распределений ЭЭС.

Второе рассматривается, поскольку результатом свертки двух редуцированных распределений  $F_1(x)_a^b$  и  $F_2(x)_c^d$  является также редуцированное распределение, не менее чем с двумя узлами дискретности  $L=a+c$  и  $R=b+d$ , где значения вероятностей составляют соответственно  $F_L=F_1(a)F_2(c)$  и  $F_R=F_1(b)F_2(d)$ . При этом, как и в предыдущем случае, МО и дисперсия результирующего распределения равны сумме МО и дисперсий составных распределений.

Третье направление является аддитивным развитием второго и поэтому рассматривается в процессе изложения теоретических аспектов второго направления.

Наиболее точным является представление функций распределения вероятностными рядами, но это связано с увеличенными затратами машинного времени и памяти ЭВМ.

#### 4.5.2 Однородное редуцированное распределение

С целью однородности вычислительного процесса внутри интервала  $(a+c, b+d)$ , имеющего узлы дискретности, результирующее распределение может быть эквивалентировано кривой нормального распределения с параметрами  $M_3, D_3$ . В результате будет получено редуцированное распределение  $F(x, M_3, D_3, a+c, b+d)$ .

Задача определения параметров НР  $(M_3, D_3)$  в эквивалентном редуцированном распределении при заданных результирующих параметрах  $(M_p, D_p)$  и пределах  $(a, b)$  является обратной по отношению к задаче определения  $(M_p, D_p)$  при заданных  $M_3, D_3, a, b$ . Искомые параметры могут быть найдены решением нелинейной относительно  $(M_3, D_3)$  системы уравнений (4.4), (4.6) Здесь можно выполнить некоторые преобразования, существенно упрощающие расчетную формулу:

$$M_p = L F_L + R [1 - F_R] + M_9 [F_R - F_L] + \sigma_c (f_L - f_R),$$

$$D_p = L^2 F_L + R^2 [1 - F_R] - M_p^2 + M_9^2 [F_R - F_L] +$$

$$+ 2M_9 \sigma_9 [f_L - f_R] + \sigma_9 [(L - M_9)f_L - (R - M_9)f_R] + \sigma_9^2 [F_R - F_L].$$

Применительно к рассматриваемой ситуации исключения радиальных узлов объединенной ЭЭС после исключения ЭЭС  $A$  редуцирование выполняется для объединения  $\{A, B\}$ . Здесь левая ( $L$ ) и правая ( $R$ ) границы:

$$\Pi_{\min} = -(\Pi_{ba} + \Pi_{bc} + \Pi_{ab}); \quad \Pi_{\max} = \Pi_{ab} + \Pi_{cb} + \Pi_{ba},$$

а результирующие параметры

$$(M_{a,b}, D_{a,b}) = (M_b, D_b)_{(ba+bc)}^{(ab+cb)} + (M_a, D_a)_{ab}^{ba}.$$

Последующее редуцирование при анализе влияния объединения  $\{A, B\}$  на ЭЭС  $C$  сводится к корректировке пределов:

$$\Pi_{\min^*} = \max(\Pi_{\min}, -\Pi_{bc}) = -\Pi_{bc}; \quad \Pi_{\max^*} = \min(\Pi_{\max}, \Pi_{cb}) = \Pi_{cb}.$$

Возникает вопрос, нельзя ли изначально в процессе получения эквивалентных  $M_9, D_9$  вместо  $\Pi_{\min}, \Pi_{\max}$  использовать  $\Pi_{\min^*}, \Pi_{\max^*}$ . Ответ отрицателен, поскольку здесь не известны параметры результирующего распределения, поэтому процедура эквивалентирования должна выполняться последовательно, без исключения промежуточных этапов.

**Пример 4.6.** Определить вероятности и МО дефицита каждой из ЭЭС, входящих в состав объединения (рис. 4.8). НМ всех ЭЭС описываются нормальным распределением.

Исходные МО и дисперсии ЭЭС представлены в табл. 4.4. (2-4 столбцы). Пропускные способности обеих связей в обоих направлениях равны 100 МВт. Промежуточные и результирующие данные представлены в табл. 4.4 – табл. 4.6. Вероятность и МО дефицита мощности ЭЭС при их изолированной работе определяются по функции нормального распределения  $P_{\text{деф},i} = 1 - F_i(0)$ ,  $M_{\text{деф},i} = M^P(M_i, D_i, 0, \infty)$ . Определяемое по формуле  $M_{\text{деф},i}^y = M_{\text{деф},i} / P_{\text{деф},i}$  условное МО ЭЭС записано в следующем столбце.

Таблица 4.4

ЭЭС				Изолированная работа			Смежные связи		Результат	
	$M$	$\sigma$	$D$	$P_{\text{деф}}$	$M_{\text{деф}}$	$M_{\text{усл}}$	$M_{\text{ред}}$	$D_{\text{ред}}$	$P_{\text{деф}}$	$M_{\text{деф}}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$A$	-100	100	10000	<b>0,1587</b>	<b>8,332</b>	52,51	-61	3078	<b>0,025</b>	<b>0,93</b>
$B$	-300	125	15625	<b>0,0082</b>	<b>0,340</b>	41,48	-185	1581	<b>0,002</b>	<b>0,12</b>
$C$	-50	100	10000	<b>0,3085</b>	<b>19,78</b>	64,11	-33,2	4534	<b>0,067</b>	<b>2,97</b>

В разделе «Смежные связи» табл. 4.4 представлены МО и дисперсии ЭЭС редуцированные ПС смежных связей:  $A \left| \begin{matrix} P_{ba} \\ -P_{ab} \end{matrix} \right.$ ,  $B \left| \begin{matrix} P_{ab} + P_{cb} \\ -P_{ba} - P_{bc} \end{matrix} \right.$ ,  $C \left| \begin{matrix} P_{bc} \\ -P_{cb} \end{matrix} \right.$ . Эти величины необходимы для учета взаимопомощи ЭЭС. Во втором столбце табл. 4.5 представлены суммы редуцированных МО и дисперсий ЭЭС  $A$  и  $B$ , полученных в табл. 4.4. Данное распределение редуцируется интервалом  $(-P_{bc}, 0)$ , представляя «эквивалентный генератор» ЭЭС  $A$  и  $B$  для ЭЭС  $C$ . В столбце 4 табл. 4.5 записаны МО и дисперсия ЭЭС  $C$  с учетом «эквивалентного генератора». На основе полученных данных вычисляются результирующие вероятность и МО дефицита мощности в ЭЭС  $C$  (табл. 4.4., столбцы 10, 11).

Процедура расчета показателей надежности ЭЭС  $A$  аналогична (столбцы 5-7, табл. 4.5). ЭЭС  $B$  радиально «окружена» ЭЭС  $A$  и  $C$ . Отсюда воздействие этих систем независимо. Каждая из соседних ЭЭС участвует в покрытии дефицита ЭЭС  $B$  «эквивалентными генерациями» (столбцы 2-4, табл. 4.6). Далее расчетная процедура не отличается от описанных выше.

Результаты расчета показывают существенное снижение вероятности дефицита в каждой ЭЭС. Именно в этом состоит эффект объединения ЭЭС на параллельную работу.

При увеличении ПС связей до 200 МВт происходит дальнейшее увеличение надежности электроснабжения потребителей. Вектор вероятностей дефицита мощности здесь имеет вид  $P_{\text{деф}} = \{0,0034, 0,0024, 0,0088\}^T$ . Снижение ПС одной из связей до 50 МВт приводит к заметному увеличению вероятности дефицита в ЭЭС  $C$ ,  $P_{\text{деф}} = \{0,024; 0,002; 0,159\}^T$ . Мы бы рекомендовали ЭЭС  $C$  в этом случае заключить с ЭЭС  $B$  контракт на гарантированную поставку мощности.

Таблица 4.5

Величина	$A_p+B_p$	$(A_p+B_p)p$	$C+(A_p+B_p)p$	$C_p+B_p$	$(C_p+B_p)p$	$A+(C_p+B_p)p$
1	2	3	4	5	6	7
M	-245,9	-99,6	-149,6	-218,13	-97,8	-198
D	4659	17	10017	6115	116	10116

Таблица 4.6

Величина	$A_p$	$C_p$	$A_p+C_p$	$B+A_p+C_p$
1	2	3	4	5
M	-108,3	-69,8	-178,1	-478,1
D	7511	5534	13045	28670

*Если читатель предполагает, что он уже достаточно далеко углубился в лес математики, то он ошибается. Для возвращения в мир реальности нам требуется продолжить путь по математическим дебрям*

**5.1 Функция распределения суммы редуцированных НМ**

В предыдущей главе оперирование с редуцированными ФР сводилось к операциям с МО и дисперсиями, т.е. на каждом последующем шаге редуцирования принимается, что текущее распределение является нормальным или редуцированным двумя пределами. В общем случае, рассмотренном ниже, многократно редуцированная ФР имеет не две, а гораздо больше точек дискретности. Неучет этого фактора может существенно повлиять на вероятность и МО дефицита мощности.

Рассмотрим построение функции распределения объединения ЭЭС  $A$  и  $B$  с собственными ФР, редуцированными на интервалах соответственно  $(L_a, R_a)$ ,  $(L_b, R_b)$ . Применительно к рассматриваемой задаче интеграл свертки, описывающий искомую ФР, имеет вид:

$$F^c(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} F_a^p(z-x) \cdot dF_b^p(x). \quad (5.1)$$

В узлах редуцирования небаланса мощности ЭЭС  $B$

$$dF_b^p(L) = F_b(L_b), \quad dF_b^p(R_b) = \bar{F}_b(R_b) = 1 - F_b(R_b).$$

Отсюда

$$F^c(z) = F_b(L_b) \cdot F_a^p(z-L_b) + \bar{F}_b(R_b) \cdot F_a^p(z-R_b) + \int_{L_b}^{R_b} F_a^p(z-x) \cdot dF_b(x). \quad (5.2)$$

Здесь используется несколько иное обозначение  $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$  дополнительной функции распределения, нежели то, что использовалось ранее -  $R(x) = 1 - F(x)$ . Это сделано, чтобы отличить ФР от правого предела  $R$ . Кстати, обозначение  $\bar{F}(x)$  в литературе используется чаще.

При произвольных  $F_a^p(x), F_b^p(x)$  вычисление на ЭВМ суммарной ФР реально возможно только через численное интегрирование. Данная операция мо-

жет выполняться многократно, например при последовательном исключении узлов в процессе эквивалентирования расчетной схемы. Здесь преобразования (5.2), связанные с сокращением вычислительного процесса, будут оправданы.

### 5.1.1 Неинтегральные составляющие

Согласно условию редуцирования  $F_a^p(x < L_a) = 0$  и  $F_a^p(x \geq R_a) = 1$ . Отсюда *первое слагаемое* неинтегральной составляющей (НС) можно представить в виде

$$F_b(L_b) \cdot F_a^p(z - L_b) = \begin{cases} 0, & z < L_a + L_b; \\ F_b(L_b), & z \geq R_a + L_b; \\ F_b(L_b) \cdot F_a(z - L_b), & L_a + L_b \leq z < R_a + L_b. \end{cases} \quad (5.3)$$

По тем же причинам *второе слагаемое*

$$\bar{F}_b(R_b) \cdot F_a^p(z - R_b) = \begin{cases} 0, & z < L_a + R_b; \\ \bar{F}_b(R_b), & z \geq R_a + R_b; \\ \bar{F}_b(R_b) \cdot F_a(z - R_b), & L_a + R_b \leq z < R_a + R_b. \end{cases} \quad (5.4)$$

Анализируя (5.3), (5.4), можно видеть, что существуют четыре характерные точки  $L_a + L_b$ ,  $L_a + R_b$ ,  $R_a + L_b$  и  $R_a + R_b$ , разделяющие область определения независимой переменной на пять интервалов. Границы интервалов зависят от соотношения величин  $L_a + R_b$ ,  $R_a + L_b$ . При этом анализ результирующей ФР должен предусматривать возможность двух вариантов расположения интервалов, определяемых соотношением характерных точек:

$$\begin{aligned} (L_a + R_b) &\leq (R_a + L_b); \\ (R_a + L_b) &\leq (L_a + R_b). \end{aligned}$$

### 5.1.2 Интегральная составляющая

Рассмотрим структуру *третьего в (5.2), интегрального слагаемого*. Подынтегральная функция  $F_a^p(z - x)$  имеет разрывы первого рода при  $z - x = L_a$  и  $z - x = R_a$ . Следовательно, существует ситуация, когда точки  $x = z - R_a$  и  $x = z - L_a$  разделяют интервал  $(L_b, R_b)$  на области  $(L_b, z - R_a)$ ,  $(z - R_a, z - L_a)$ ,

$(z-L_a, R_b)$ , где  $F_a^p(z-x)$  соответственно равна единице, отлична от единицы и нуля и равна нулю.

**На первом интервале**  $z \in (-\infty, L_a + L_b)$  величина  $z-x \leq z-L_b \leq (L_a + L_b - L_b = L_a)$ , следовательно, на всем интервале изменения  $x$  подынтегральная функция равна нулю.

**На интервале**  $z \in (L_a + L_b, L_a + R_b)$  при  $x = R_b$  соблюдается соотношение  $(z-x = z-R_b) < z-L_b \leq (L_a + L_b - L_b = L_a)$  и функция  $F_a^p(z-x)$  равна нулю. Наибольшая величина, где функция еще не равна нулю, составляет  $x = z - L_a$ . Отсюда верхний предел в интеграле заменяется на  $z - L_a$ .

Точка  $x = L_b$  принадлежит интервалу редуцирования  $(L_a, R_a)$ , поскольку  $(L_a + L_b - L_b = L_a) \leq z - L_b \leq (R_a + L_b - L_b = R_a)$ . Отсюда нижний в интеграле предел остается неизменным.

Аналогичный вывод делается относительно интервала  $(L_a + L_b, R_a + L_b)$  при  $R_a + L_b < L_a + R_b$  (для победы над зевотой читателю рекомендуется попытаться доказать это).

**На интервале**  $z \in (L_a + R_b, R_a + L_b)$  пределы интегрирования не меняются, поскольку  $z - L_b \leq R_a$  и  $z - R_b \geq L_a$ .

**На интервале**  $z \in (R_a + L_b, L_a + R_b)$  при  $R_a + L_b \leq L_a + R_b$  заменяются как верхний, так и нижний пределы интегрирования, поскольку  $z - L_b \geq R_a$  и  $z - R_b \leq L_a$ . В области  $L_b \leq x \leq z - R_a$  подынтегральная функция  $F_a^p(z-x)$  равна единице, поэтому на рассматриваемом подынтервале интеграл равен  $F_b(z-R_a) - F_b(L_b)$ . Таким образом, кроме интеграла здесь появляется дополнительная неинтегральная составляющая.

**На интервале**  $(L_a + R_b, R_b + R_a)$  при  $R_a + L_b \leq L_a + R_b$  или на интервале  $(R_a + L_b, R_a + R_b)$  при  $L_a + R_b \leq R_a + L_b$  меняется только нижний предел интегри-



рования, так как  $z - L_b \geq R_a$  и  $L_a \leq z - R_b \leq R_a$ . Кроме того, здесь так же, как и в предыдущем случае, появляется дополнительная НС  $F_b(z - R_a) - F_b(L_b)$ .

**На последнем интервале**  $(R_a + R_b, \infty)$  левая особая точка выходит за правую границу редуцирования  $z - R_a > R_b$ , подынтегральная функция всюду равна 1, поэтому интеграл преобразуется в разность  $F_b(R_a) - F_b(L_b)$ .

**Результирующее распределение неинтегральных составляющих** по интервалам имеет вид:

- на первом интервале  $-\infty \leq z < L_a + L_b$  НС равна нулю;
- на интервале  $L_a + L_b \leq z < M$ , где  $M = \min(L_a + R_b, R_a + L_b)$  дополнительных составляющих нет, второе слагаемое (5.2) равно нулю, отсюда

$$\text{НС} = F_a(z - L_b) \cdot F_b(L_b), \quad L_a + L_b \leq z < M.$$

В зависимости от соотношения перекрестной суммы левых и правых пределов на интервале  $M \leq z < X$ , где  $X = \max(L_a + R_b, R_a + L_b)$  НС либо не изменяется ( $L_a + R_b \leq z < R_a + L_b$ ), либо при  $R_a + L_b \leq L_a + R_b$  к ней добавляется слагаемое  $F_b(z - R_a) - F_b(L_b)$ . В последнем случае составляющая (5.4) равна нулю, а (5.3) -  $F_b(L_b)$ . При данных условиях  $\text{НС} = F_b(z - R_a)$ . Таким образом, на рассматриваемом интервале

$$\text{НС} = \begin{cases} F_b(L_b) \cdot F_a(z - L_b) + \overline{F_b}(R_b) \cdot F_a(z - R_b), & L_a + R_b \leq z < R_a + L_b; \\ F_b(z - R_a), & R_a + L_b \leq z < L_a + R_b; \end{cases}$$

На двух последних интервалах

$$\text{НС} = \begin{cases} F_b(L_b) + \overline{F_b}(R_b) \cdot F_a(z - R_b) + F_b(z - R_a) - F_b(L_b), & X \leq z < R_a + R_b; \\ F_b(L_b) + \overline{F_b}(R_b) + F_b(z - R_a) - F_b(L_b), & R_a + R_b \leq z. \end{cases}$$

После преобразования на интервале  $L_a + R_b \leq z < R_a + L_b$  рассматриваемого интеграла из (5.2) его расчетное выражение может быть приведено к иному виду:

$$\begin{aligned}
\int_{L_B}^{R_b} F_a^p(z-x) \cdot dF_b(x) &= F_a^p(z-x) \cdot F_b(x) \Big|_{L_b}^{R_b} + \int_{z-L_B}^{z-R_b} F_b(z-x) \cdot dF_a(x) = \\
&= F_a(z-R_b) \cdot F_b(R_b) - F_a(z-L_b) \cdot F_b(L_b) + \int_{z-R_B}^{z-L_b} F_b(z-x) \cdot dF_a(x).
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Суммируя описанные составляющие, получаем:

$$F^c(z) = \begin{cases} 0, & z < L_a + L_b; \\ F_a(z-L_b) \cdot F_b(L_b) + \int_{L_b}^{z-L_a} F_a(z-x) \cdot dF_b(x), & L_a + L_b < z < M; \\ F_a(z-R_b) + \int_{z-R_b}^{z-L_b} F_b(z-x) \cdot dF_a(x), & L_a + R_b < z < R_a + L_b; \\ F_b(z-R_a) + \int_{z-R_a}^{z-L_a} F_a(z-x) \cdot dF_b(x), & R_a + L_b < z < L_a + R_b; \\ \overline{F_b}(R_b) \cdot F_a(z-R_b) + F_b(z-R_a) + \int_{z-R_a}^{R_b} F_a(z-x) \cdot dF_b(x), & X < z < R_a + R_b; \\ 1, & R_a + R_b < z. \end{cases} \tag{5.6}$$

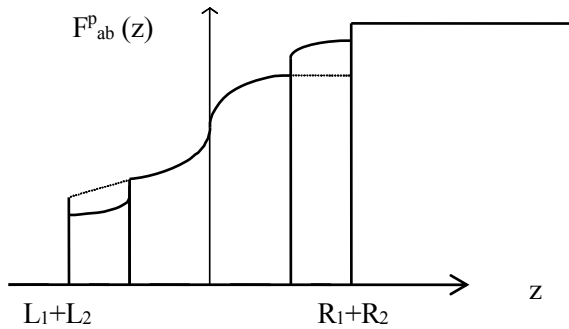


Рис. 5.1 Сумма редуцированных распределений

Нетрудно видеть, что в граничных точках суммарная ФР  $F^c(z)$  имеет скачки первого рода (рис. 5.1)

Величина дискретного изменения ФР  $\Delta F^c(z)$  в этих точках определяется разностью ФР справа и слева:

$$\begin{aligned}
\Delta F^c(L_a + L_b) &= F_a(L_a) \cdot F_b(L_b); \\
\Delta F^c(R_a + L_b) &= \overline{F_a}(R_a) \cdot F_b(L_b); \\
\Delta F^c(L_a + R_b) &= F_a(L_a) \cdot \overline{F_b}(L_b); \\
\Delta F^c(R_a + R_b) &= \overline{F_a}(R_a) \cdot \overline{F_b}(L_b).
\end{aligned}$$

Отсюда, как и ожидалось, во-первых, результирующая ФР редуцирована интервалом  $(L_a + L_b, R_a + R_b)$ , во-вторых, в особых узлах, определяемых сочета-

нием левых и правых пределов, ФР имеет скачки первого рода, величина которых определяется произведением соответствующих вероятностей скачков составных ФР.

**Пример 5.1.** Выполнить свертку двух ВР, построенных на основе редуцированного нормального распределения с параметрами:  $M_a = -100$  МВт,  $\sigma_a = 100$  МВт,  $PC_a = \pm 50$  МВт (двухсторонняя ПС связи с ЭЭС В),  $M_b = -150$  МВт,  $\sigma_b = 200$  МВт,  $PC_b = \pm 100$  МВт (суммарная ПС связей с ЭЭС А и с некоторой третьей ЭЭС). Для ВР принят шаг по мощности  $h = 10$  МВт.

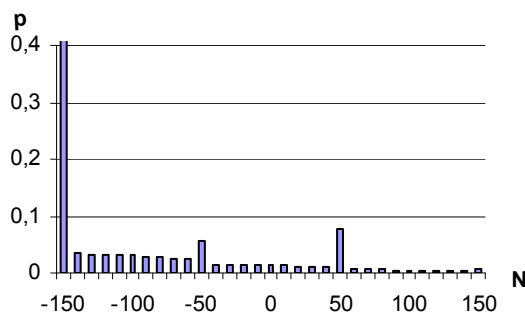


Рис. 5.2 Свертка двух редуцированных ВР

В результате свертки получен ВР, представленный на рис. 5.2, где отчетливо просматриваются узлы дискретности. Следует отметить, что и в промежутках плотность распределения результирующего НМ мало похожа на плотность нормального распределения (рис. 5.3).

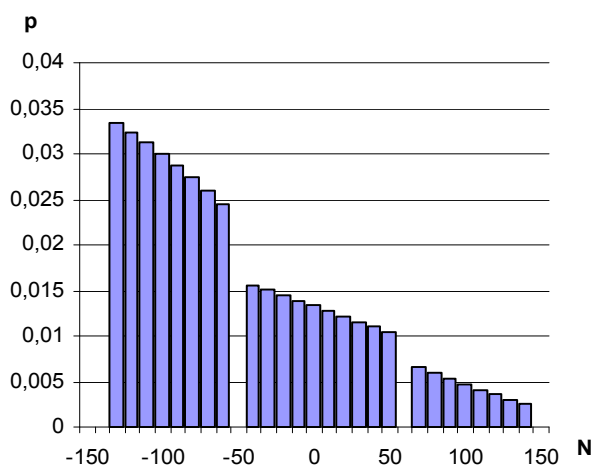


Рис. 5.3 Плотность распределения в промежутках дискретности

Результирующая функция на внутренних интервалах содержит интеграл типа свертки. Возникает вопрос, имеют ли смысл приведенные преобразования, если осталась процедура свертки? Да, имеют, поскольку, во-первых, изменились пределы интегрирования, что дает положительный эффект при численном интегрировании, во-вторых, поинтервальное представление суммарной ФР позволяет более эффективно учесть специфику ФР в заданной области изменения параметра и, наконец, при некоторых допущениях возможно преобразование интеграла к виду, удобному для ручных или машинных оценочных расчетов.

### 5.1.3 Графическая интерпретация

Полученные аналитические выражения графически соответствуют заштрихованной области на рисунках соответственно: интервал  $(L_a + L_b, \min(L_a + R_b, R_a + L_b))$  - рис. 5.4, а; интервал  $(L_a + R_b, R_a + L_b)$  - рис. 5.4, б; интервал  $(R_a + L_b, L_a + R_b)$  - рис. 5.5, а; интервал  $(\max(L_a + R_b, R_a + L_b), R_a + R_b)$  - рис. 5.5, б.

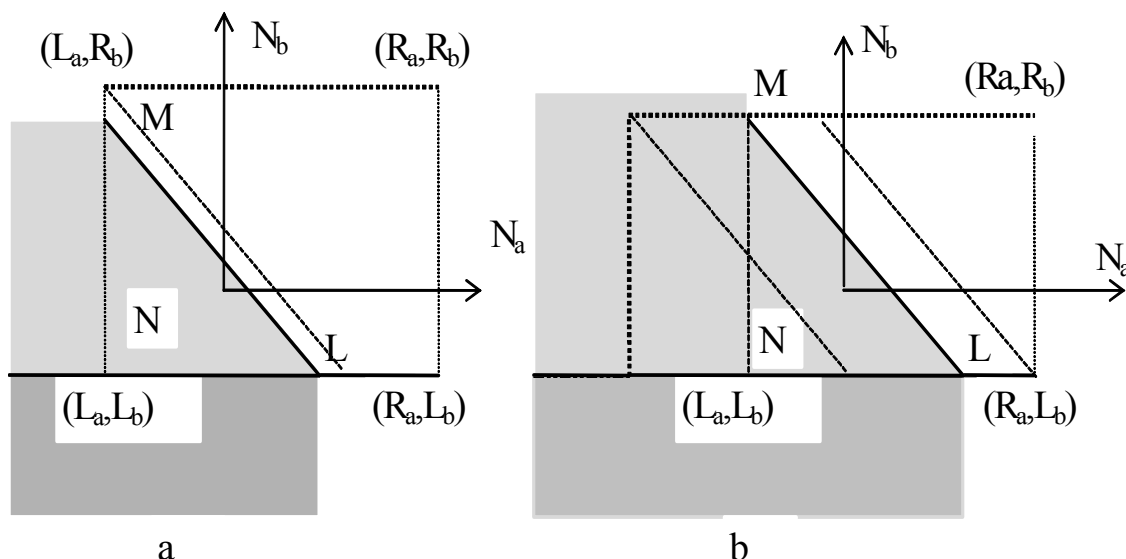


Рис. 5.4. Второй и третий интервалы определения результирующей ФР

Прямая  $ML$  соответствует некоторому параметру  $z = N_a + N_b$ . Прежде всего, следует отметить, что область, соответствующая ФР, лежит слева от прямой  $ML$  и ниже нее. Область изменения параметра  $z$  определяется пределами редуцирования  $(L_a + L_b \leq z \leq R_a + R_b)$ . Ограничение области варьирования параметра  $z$  не означает ограничение области варьирования НМ  $(N_a, N_b)$  прямоугольником, образованным левым и правым пределами редуцирования  $(N_a, N_b)$ , поскольку ФР на левых пределах не равны нулю. В частности, функции распределения  $F_b(L_b)$  соответствует область, лежащая ниже прямой  $N_b = L_b$ .

Сумме вероятностей соответствует объединение, а произведению - пересечение соответствующих им площадей. Так произведение  $F_a(z - L_b) \cdot F_b(L_b)$  представляет на рис. 5.4, а область, расположенную ниже горизонтали  $NL$  и ограниченную вертикалью  $N_a = z - L_b$ . Интеграл  $\int_{L_b}^{z-L_b} F_a(z-x) \cdot dF_b(x)$  представляет об-

ласть, расположенную слева от  $ML$ . Аналогичным образом описываются составляющие результирующей ФР в других интервалах определения ФР.

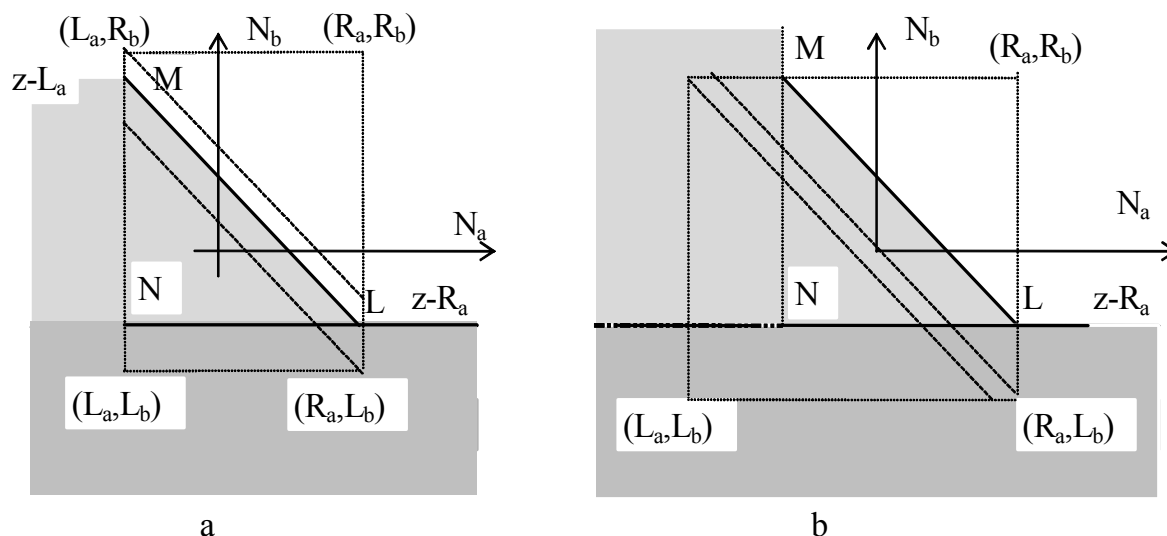


Рис. 5.5. Четвертый и пятый интервалы определения результирующей ФР

Специфика интервалов проявляется в расположении характеризуемой параметром  $z$  прямой  $ML$  в прямоугольнике  $(L_a, L_b) - (L_a, R_b) - (R_a, R_b) - (R_a, L_b)$ . Она может лежать либо ниже, либо между, либо выше главных диагоналей.

Читателю рекомендуется убедиться в правильности расположения представленных на рисунках заштрихованных площадей.

#### 5.1.4 Эквивалентирование интеграла

Из приведенных рисунков нетрудно видеть, что **область интегрирования** может быть разделена на две (рис. 5.6): Первая характеризуется треугольником  $MNL$  с вероятностью  $F_{MNL}(l_a, r_a, l_b, r_b)$ , зависящей от пределов редуцирования. Вероятность второй области определяется выражением  $F_a(l_a) \cdot [F_b(r_b) - F_b(l_b)]$ .

В зависимости от области определения  $z$  координаты  $l_a, l_b, r_a, r_b$  принимают конкретные значения, например  $L_a, L_b, R_a, R_b$ .

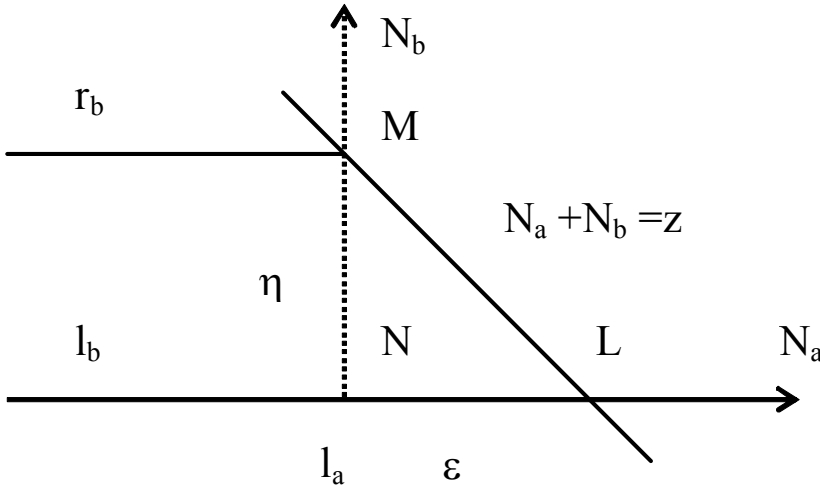


Рис. 5.6 Интегральная зона с выделением области MNL

С учетом специфики области определения обозначенные в (5.6) интегралы сводятся к вычислению вероятности области треугольника:

$$\text{ИС} = \begin{cases} \int_{L_b}^{z-L_a} F_a(z-x) \cdot dF_b(x) = F_a(L_a) \cdot [F_b(z-L_a) - F_b(L_b)] + F_{MNL2}, & L_a + L_b < z < M; \\ \int_{z-R_b}^{z-L_b} F_b(z-x) \cdot dF_a(x) = F_b(L_b) \cdot [F_a(z-L_b) - F_a(z-R_b)] + F_{MNL3}, & L_a + R_b < z < R_a + L_b; \\ \int_{z-R_a}^{z-L_a} F_a(z-x) \cdot dF_b(x) = F_a(L_a) \cdot [F_b(z-L_a) - F_b(z-R_a)] + F_{MNL4}, & R_a + L_b < z < L_a + R_b; \\ \int_{z-R_a}^{R_b} F_a(z-x) \cdot dF_b(x) = F_a(z-R_b) \cdot [F_b(R_b) - F_b(z-R_a)] + F_{MNL5}, & X < z < R_a + R_b, \end{cases} \quad (5.7)$$

где

$$\begin{aligned} F_{MNL2} &= F_{MNL}(L_a, z-L_b, L_b, z-L_a); & F_{MNL3} &= F_{MNL}(z-R_b, z-L_b, L_b, R_b); \\ F_{MNL4} &= F_{MNL}(L_a, R_a, z-R_a, z-L_a); & F_{MNL5} &= F_{MNL}(z-R_b, R_a, z-R_a, R_b). \end{aligned}$$

В результате

$$F^c(z) = \begin{cases} 0, & z < L_a + L_b; \\ F_a(L_a) \cdot (F_b(z-L_a) - F_b(L_b)) + F_b(L_b) \cdot F_a(z-L_b) + F_{MNL2}, & L_a + L_b < z < M; \\ F_b(L_b) \cdot F_a(z-L_b) + F_a(z-R_b) \cdot \bar{F}_b(L_b) + F_{MNL3} & L_a + R_b < z < R_a + L_b; \\ F_a(L_a) \cdot F_b(z-L_a) + F_b(z-R_a) \cdot \bar{F}_a(L_a) + F_{MNL4} & R_a + L_b < z < L_a + R_b; \\ F_a(z-R_b) \cdot \bar{F}_b(z-R_a) + F_b(z-R_a) + F_{MNL5} & X < z < R_a + R_b; \\ 1, & R_a + R_b < z. \end{cases} \quad (5.8)$$

В области треугольника справедливо соотношение  $N_a + N_b < z$ . Возникает заманчивая идея использовать распределение суммы для вычисления вероятности

сти треугольника, поскольку МО и дисперсия суммы равны сумме соответствующих параметров слагаемых. Прямое использование суммы НМ, например в виде:

$$F_{MNL} = \bar{F}_a(l_a) \cdot \bar{F}_b(l_b) \cdot F_{a+b}(z), \quad (5.9)$$

невозможно, поскольку переменные  $N_a, N_b$  связаны рядом ограничивающих условий. В качестве примера, подтверждающего эту мысль, рассмотрим частный случай  $z = l_a + l_b$ . Здесь область треугольника сведена к точке, поэтому  $F_{MNL}$  должна быть равной нулю. В то же время согласно (5.9) она отлична от нуля, поскольку в общем случае не равны нулю  $F_{a+b}(l_a + l_b)$  и единице  $F_a(l_a), F_b(l_b)$ .

Одним из возможных путей решения проблемы является введение новых неотрицательных случайных величин  $\varepsilon, \eta$ , которые удовлетворяют условию  $F_{\varepsilon+\eta}(l_a + l_b) = 0$  и в то же время находятся во взаимно однозначном соответствии с  $N_a, N_b$ , в области  $N_a > l_a, N_b > l_b$ . Такими случайными величинами могут быть отрезки сторон треугольника MNL:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= N_a - l_a, & N_a > l_a; \\ \eta &= N_b - l_b, & N_b > l_b \end{aligned}$$

с распределениями, по конфигурации совпадающими с исходными на интервалах соответственно  $(l_a, \infty), (l_b, \infty)$ . Основная идея введения новых переменных - упрощение процедуры определения вероятности  $F_{MNL}$ . Исходные распределения  $F_a(x), F_b(x)$  являются редуцированными. Однако эффект редуцирования не сказывается на вычислении интеграла, где определяется  $F^c(z)$ , поэтому для представления  $\varepsilon, \eta$  небалансы мощности  $N_a, N_b$  следует рассматривать не редуцированными справа

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ c_\varepsilon \cdot f_a(x + l_a), & x \geq 0, \end{cases} \quad (5.10)$$

$$f_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ c_\eta \cdot f_b(x + l_b), & x \geq 0, \end{cases} \quad (5.11)$$

где нормирующие множители

$$c_\varepsilon = \frac{1}{\overline{F}_a(l_a)}, c_\eta = \frac{1}{\overline{F}_b(l_b)}.$$

Таким образом, случайные величины  $\varepsilon, \eta$  имеют односторонние усеченные (в отличие от редуцированных) на интервалах соответственно  $(l_a, \infty), (l_b, \infty)$  распределения с плотностями распределения (5.10), (5.11).

Представим  $F_{MNL}$  в виде двойного интеграла от плотностей распределения:

$$F_{MNL} = \int_{MNL} \int f_a(x) \cdot f_b(y) \cdot dx \cdot dy = \int_{l_b}^{r_b} f_b(y) \cdot dy \int_{l_a}^{z-y} f_a(x) \cdot dx.$$

Заменяя переменные  $Y = y - l_b, X = x - l_a$ , получаем

$$\begin{aligned} F_{MNL} &= \int_0^{r_b-l_b} f_b(Y + l_b) \cdot dY \int_0^{z-Y-l_a-l_b} f_a(X + l_a) \cdot dX = \\ &= \frac{1}{c_\varepsilon \cdot c_\eta} \cdot \int_0^{r_b-l_b} f_\eta(Y) \cdot dY \int_0^{z-Y-l_a-l_b} f_\varepsilon(X) \cdot dX. \end{aligned}$$

Выполнив замену переменных  $y = Y$  и  $s = z - l_a - l_b$ , получаем

$$F_{MNL} = \frac{1}{c_\varepsilon \cdot c_\eta} \cdot \int_0^{r_b-l_b} F_\varepsilon(s - y) \cdot dF_\eta(y) = \frac{1}{c_\varepsilon \cdot c_\eta} \cdot \int_0^s F_\varepsilon(s - y) \cdot dF_\eta(y).$$

Изменение верхнего предела в интеграле объясняется тем, что  $r_b = z - l_a$ .

Таким образом,

$$F_{MNL} = \frac{1}{c_\varepsilon \cdot c_\eta} \cdot F_{\varepsilon+\eta}(s) = \overline{F}_a(l_a) \cdot \overline{F}_b(l_b) \cdot F_{\varepsilon+\eta}(s). \quad (5.12)$$

Вычисление вероятности в области треугольника свелось к использованию эквивалентного распределения  $F_{\varepsilon+\eta}(s)$ , которое может быть представлено либо в аналитической, либо в табличной форме.



### 5.1.4.1 Нормальное распределение в области треугольника

#### *Математическое ожидание*

Если небалансы  $N_a, N_b$  описываются НР, то, используя аппарат редуцированных распределений, можно получить аналитическое представление МО и дисперсии величины  $\varepsilon$ . Математическое ожидание

$$M_\varepsilon = \int_0^\infty x f_\varepsilon(x) dx = c_\varepsilon \int_0^\infty x f_a(x + l_a) dx = c_\varepsilon \int_{l_a}^\infty (x - l_a) f_a(x) dx.$$

Принимая во внимание представление интеграла в формуле МО редуцированного распределения, получаем

$$\begin{aligned} M_\varepsilon &= -l_a + c_\varepsilon \int_{l_a}^\infty x f_a(x) dx = \\ &= -l_a + c_\varepsilon \left\{ M_a [F_a(\infty) - F_a(l_a)] + \sigma_a^2 [f_a(l_a) - f_a(\infty)] \right\} = M_a - l_a + c_\varepsilon \sigma_a^2 f_a(l_a) \end{aligned}$$

Используя функцию интенсивности  $\lambda_a(l_a) = \frac{f_a(l_a)}{1 - F_a(l_a)}$ , получаем

$$M_\varepsilon = M_a - l_a + \sigma_a^2 \lambda_a(l_a). \quad (5.13)$$

Представление МО и дисперсии через функцию интенсивности используется довольно часто, поэтому следует обратить внимание на вид МО с применением данной функции.

Выражение

$$M^y(M_a, D_a, l_a, \infty) = c_\varepsilon \int_{l_a}^\infty x f_a(x) dx = \frac{1}{\bar{F}_a(l_a)} \int_{l_a}^\infty x f_a(x) dx$$

представляет математическое ожидание усеченного (в отличие от редуцированного) на интервале  $(l_a, \infty)$  НР с плотностью распределения  $f_a(x)$ . Отсюда понятно, что для обеспечения единства шкалы измерения необходимо выполнение соотношения  $M_\varepsilon + l_a = M^y(M_a, D_a, l_a, \infty)$ .

Формулу (5.13) можно представить через МО редуцированного распределения, что бывает полезно при наличии программных модулей определения параметров редуцированного распределения:

$$M_\varepsilon = -l_a + c_\varepsilon \left[ M^p(M_a, D_a, l_a, \infty) - l_a F(l_a) \right] = c_\varepsilon M^p(M_a, D_a, l_a, \infty) - l_a \left( 1 + \frac{F(l_a)}{\bar{F}(l_a)} \right).$$

Окончательно

$$M_\varepsilon = c_\varepsilon \left( M^p(M_a, D_a, l_a, \infty) - l_a \right). \quad (5.14)$$

**Дисперсия  $\varepsilon$ :**

$$\begin{aligned} D_\varepsilon &= -M_\varepsilon^2 + \int_0^\infty x^2 f_\varepsilon(x) dx = -M_\varepsilon^2 + c_\varepsilon \int_0^\infty x^2 f_a(x + l_a) dx = \\ &= -M_\varepsilon^2 + c_\varepsilon \int_{l_a}^\infty (x - l_a)^2 f_a(x) dx = -M_\varepsilon^2 + c_\varepsilon \int_{l_a}^\infty x^2 f_a(x) dx - 2l_a c_\varepsilon \int_{l_a}^\infty x f_a(x) dx + l_a^2. \end{aligned}$$

Согласно (5.13)

$$c_\varepsilon \int_{l_a}^\infty x f_a(x) dx = M_\varepsilon + l_a.$$

Отсюда определяемая через второй начальный момент усеченного распределения дисперсия

$$D_\varepsilon = c_\varepsilon \int_{l_a}^\infty x^2 f_a(x) dx - (M_\varepsilon + l_a)^2.$$

Данная формула может быть представлена через второй начальный момент редуцированного распределения:

$$D_\varepsilon = c_\varepsilon \left[ \chi^p(M_a, D_a, l_a, \infty) - l_a^2 F_a(l_a) \right] - (M_\varepsilon + l_a)^2.$$

При выводе дисперсии редуцированного нормального распределения было получено соотношение

$$\int_a^b x^2 \cdot dF(x) = (M^2 + \sigma^2) \cdot [F(b) - F(a)] + \sigma^2 [(M + a) \cdot f(a) - (M + b) \cdot f(b)].$$

При  $a = l_a, b = \infty, M = M_a, \sigma^2 = \sigma_a^2$  интеграл

$$\int_{l_a}^{\infty} x^2 \cdot dF(x) = (M_a^2 + \sigma_a^2) \cdot \bar{F}(l_a) + \sigma_a^2 (M_a + l_a) \cdot f(l_a).$$

Отсюда

$$D_\varepsilon = c_\varepsilon \left[ \chi^p(M_a, D_a, l_a, \infty) - l_a^2 F_a(l_a) \right] - (M_\varepsilon + l_a)^2 = M_a^2 + \sigma_a^2 + \sigma_a^2 (M_a + l_a) \cdot \lambda(l_a) - (M_\varepsilon + l_a)^2.$$

Но  $M_\varepsilon + l_a = M_a + \sigma_a^2 \lambda_a(l_a)$ , поэтому

$$D_\varepsilon = M_a^2 + \sigma_a^2 + \sigma_a^2 \lambda_a(l_a) (M_a + l_a) - \left[ M_a + \sigma_a^2 \lambda_a(l_a) \right]^2 = \sigma_a^2 \left[ 1 + \lambda_a(l_a) (l_a - M_a - \sigma_a^2 \lambda_a(l_a)) \right].$$

Окончательно

$$D_\varepsilon = \sigma_a^2 \left[ 1 - M_\varepsilon \lambda_a(l_a) \right]. \quad (5.15)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} M_\eta &= M_b - l_b + \sigma_b^2 \lambda_b(l_b); \\ D_\eta &= \sigma_b^2 \cdot \left[ 1 - M_\eta \lambda_b(l_b) \right] \end{aligned} \quad (5.16)$$

Случайные величины  $\varepsilon, \eta$  описываются усеченным на интервале  $(0, \infty)$

НР. Следовательно, ФР суммы  $\varepsilon + \eta$  также является усеченной на этом интервале.

Зная МО и дисперсию результирующего распределения

$$M_{\varepsilon+\eta} = M_\varepsilon + M_\eta, \quad D_{\varepsilon+\eta} = D_\varepsilon + D_\eta,$$

можно определить параметры  $M_\vartheta, D_\vartheta$  эквивалентного исходного нормального распределения. В системе координат  $\{\varepsilon, \eta\}$  они вычисляются решением системы нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} M_{\varepsilon+\eta} = M_\vartheta + D_\vartheta \cdot \lambda_\vartheta(0); \\ D_{\varepsilon+\eta} = D_\vartheta \left[ 1 - M_{\varepsilon+\eta} \lambda_\vartheta(0) \right]. \end{cases}$$

**Пример 5.2.** Определить интервалы изменения параметра «эквивалентного генератора», представляющего две ЭЭС ( $A$  и  $B$ ) в их суммарном воздействии на третью ЭЭС. Вычислить значения результирующей ФР в граничных точках. Выполнить аппроксимацию результирующей ФР нормальным распределением.

Оценить математическое ожидание и дисперсию «эквивалентной генерации». Исходные данные представлены в примере 5.1.

**Решение.** Суммарное воздействие ЭЭС  $A$  и  $B$  на ЭЭС  $C$  ограничивается ПС связи  $BC$ . Для реализации модели «эквивалентного генератора» следует принять  $ПС_{BC}=50$  МВт,  $ПС_{CB}=0$  МВт. Отсюда  $-50 \leq z \leq 0$ ,  $L_b = -100$  МВт,  $R_b = П_{ab} = 50$  МВт.

**Интервал.** Для идентификации интервалов результирующей ФР рассматривается соотношение

$$(L_b + R_a = -100 + 50 = -50) < (L_a + R_b = -50 + 50 = 0).$$

Таким образом, для модели «эквивалентного генератора» следует выбрать четвертый интервал функции (5.8):

$$F^c(z) = F_a(L_a) \cdot F_b(z - L_a) + F_b(z - R_a) \cdot \bar{F}_a(L_a) + F_{MNL 4}.$$

**Граничные значения.** На левой границе интервала значение функции

$$\begin{aligned} F^c(-50) &= F_a(-50) \cdot F_b(0) + F_b(-100) \cdot \bar{F}_a(-50) = \\ &= 0,6915 \cdot 0,7734 + 0,5987 \cdot (1 - 0,6915) = 0,7195. \end{aligned}$$

Значение функции на правой границе интервала может быть определено по той же формуле, с вычислением вероятности в области треугольника. Более простым решением является расчет  $F^c(0)$  по соседнему интервалу  $0 \leq z \leq 100$ , где дается оценка  $F^c(0_+)$  при  $z \rightarrow 0_+$ . В этом случае  $F^c(0) = F^c(0_+) - \Delta F^c(0)$ . Как было отмечено ранее, дискретное приращение ФР  $\Delta F^c(0)$  определяется произведением приращений составных ФР в рассматриваемой точке:

$$\Delta F^c(0) = F_a(L_a) \cdot \bar{F}_b(R_b) = F_a(-50) \cdot (1 - F_b(50)) = 0,6915 \cdot (1 - 0,8413) = 0,11.$$

Согласно (5.8)

$$\begin{aligned} F^c(0_+) &= F_a(z - R_b) \cdot \bar{F}_b(z - R_a) + F_b(z - R_a) + F_{MNL 5} = \\ &= F_a(-50) \cdot \bar{F}_b(-50) + F_b(-50) = 0,6915 \cdot (1 - 0,6915) + 0,6915 = 0,9048. \end{aligned}$$

В результате  $F^c(0) = F^c(0_+) - \Delta F^c(0) = 0,9048 - 0,11 = 0,7948$ .

**Аппроксимация нормальным распределением** функции  $F^c(z)$  на интервале  $-50 \leq z \leq 0$  (интервальная аппроксимация) заключается в поиске эквива-

лентных параметров  $M_3, D_3$ , удовлетворяющих условиям  $F(-50, M_3, D_3) = 0,7195$  и  $F(0, M_3, D_3) = 0,7948$ . Это задача решения систем нелинейных уравнений. Нами была использована процедура «Поиск решения» пакета Excel. В результате были получены параметры  $M_3 = -170,2$  МВт,  $D_3 = 42747$  МВт<sup>2</sup>. Эти величины близки математическому ожиданию и дисперсии суммы нередуцированных распределений НМ ЭЭС А и В  $M_c = M_a + M_b = -250$  МВт,  $D_c = D_a + D_b = 50000$  МВт<sup>2</sup>. Меньшая величина объясняется влиянием редукции.

Можно предположить, что МО и дисперсия эквивалентного распределения будут близки сумме МО и дисперсий редуцированных распределений. С целью сопоставления данных выполнены расчеты МО и дисперсий редуцированных распределений:

$$M^P(M_a = -100, D_a = 10000, L_a = -50, R_a = 50) = -33,2 \text{ МВт};$$

$$D^P(M_a = -100, D_a = 10000, L_a = -50, R_a = 50) = 998 \text{ МВт}^2;$$

$$M^P(M_b = -150, D_b = 40000, L_b = -100, R_b = 50) = -59,4 \text{ МВт};$$

$$D^P(M_b = -150, D_b = 40000, L_b = -100, R_b = 50) = 3527 \text{ МВт}^2.$$

$$\text{В результате } M^P(M_a, D_a, -50, 50) + M^P(M_b, D_b, -100, 50) = -92,6 \text{ МВт};$$

$$D^P(M_a, D_a, -50, 50) + D^P(M_b, D_b, -100, 50) = 4525 \text{ МВт}^2.$$

Это также отличается от полученных эквивалентных параметров, причем существенно для дисперсии. Частичным объяснением является то, что  $M_3, D_3$  – это параметры нередуцированного распределения. Однако формулы, используемые для расчета интервальных значений вероятности, а следовательно и эквивалентных МО и дисперсии, учитывают редукцию ФР ЭЭС А и не учитывают редукцию ФР ЭЭС В. Поэтому следует сопоставить эквивалентные параметры с суммой соответствующих величин для редуцированной ЭЭС А и нередуцированной ЭЭС В (модель  $A|_{ab}^{ba} + B$ ). Здесь

$$M_{31} = M^P(M_a, D_a, -50, 50) + M_b = -33,2 - 150 = -183,2 \approx (M_3 = -170,2) \text{ МВт};$$

$$M_{31} D_{31} = D^P(M_a, D_a, -50, 50) + D_b = 998 + 40000 = 40998 \approx (D_3 = 42747) \text{ МВт}^2.$$

**МО и дисперсия «эквивалентной генерации»**  $M^p(M_g, D_g, -50, 0) = -37,9$  МВт;  
 $D^p(M_g, D_g, -50, 0) = 427$  МВт<sup>2</sup>. Данные результаты хорошо согласуются с аналогичными параметрами, полученными из произведения редуцированных вероятностных рядов (см. пример 5.1):  $M(-50, 0) = -38,6$  МВт,  $D(-50, 0) = 409$  МВт<sup>2</sup>. Несущественная, на наш взгляд, разница объясняется не только погрешностью аппроксимации, но и достаточно грубой на данном интервале дискретностью ВР:  $h = 10$  МВт.

При использовании модели  $A \Big|_{ab}^{ba} + B$  имеем оценку МО и дисперсии не меньшей точности:

$$M^p(M_{g1}, D_{g1}, -50, 0) = M^p(-183,2; 40998, -50; 0) = -39,1 \approx -38,6 \text{ МВт};$$

$$D^p(M_{g1}, D_{g1}, -50, 0) = D^p(-183,2; 40998, -50; 0) = 395,8 \approx 409 \text{ МВт}^2.$$

В реальных расчетах БН «эквивалентная генерация» является относительно небольшой добавкой к собственному НМ рассматриваемой ЭЭС и отмеченная погрешность может рассматриваться как несущественная. Однако при возможности следует отдать предпочтение более точной модели оценки показателей надежности через функции распределения.

### 5.1.4.2 Гамма-распределение

По определению НМ является разностью мощности нагрузки, описываемой НР, и располагаемой мощности, описываемой несимметричным биномиальным распределением. Отсюда в общем случае результирующее распределение НМ является также несимметричным. При увеличении числа и разнотипности генераторов биномиальное распределение асимптотически приближается к нормальному. В связи с этим более правильным является выбор в качестве аппроксимирующего непрерывного несимметричного распределения, которое в качестве предельного также имеет НР. Одним из таких распределений является гамма-распределение (ГР). ГР используется для неотрицательных случайных величин, к числу которых по определению относятся  $\varepsilon$  и  $\eta$ . Их распределения являются усечением исходных для  $N_a, N_b$ . Отсюда для описания как  $\varepsilon, \eta$ , так и их суммы  $\varepsilon + \eta$

может быть использовано гамма-распределение. В качестве аппроксимирующего здесь можно рассматривать гамма-распределение с параметром масштаба и формы

$$\beta = \frac{M_{\varepsilon+\eta}}{\sigma_{\varepsilon+\eta}^2}; \quad \alpha = \frac{M_{\varepsilon+\eta}^2}{\sigma_{\varepsilon+\eta}^2}.$$

При этом плотность ГР

$$f(x) = \frac{\beta(\beta x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta x}.$$

Известно, что ГР при целочисленных аргументах совпадает с распределением Эрланга, оперирование на ЭВМ с которым много проще. Отсюда можно использовать распределение Эрланга для кусочно-линейной или нелинейной аппроксимации функции

$$\bar{F}_{\varepsilon+\eta}(x) = \sum_{r=0}^{a-1} \frac{(\beta x)^r}{r!} e^{-\beta x}.$$

Расчеты показывают, что ГР более эффективно по сравнению с редуцированным нормальным в отношении как длительности, так и погрешности расчетов.

**Пример 5.3.** Выполнить расчет функции распределения суммы редуцированных НМ двух ЭЭС, описанных в примере 5.1. Расчеты ограничить областью  $(L_a + L_b = -150) \leq z < (M = R_a + L_b = -50)$ .

**Решение.** Согласно (5.6), ФР в рассматриваемом интервале определяется выражением

$$\begin{aligned} F^c(z) &= F_a(z - L_b) \cdot F_b(L_b) + \int_{L_b}^{z-L_a} F_a(z-x) \cdot dF_b(x) = \\ &= F_a(z - L_b) \cdot F_b(L_b) + F_a(L_a) \cdot [F_b(z - L_a) - F_b(L_b)] + F_{MNL2}. \end{aligned}$$

ФР  $F_{MNL2}$  определяется пределами  $F_{MNL2} = F_{MNL}(L_a, z - L_b, L_b, z - L_a)$  и аппроксимируется гамма-распределением. Согласно (5.13) - (5.16) математическое ожидание  $M_\varepsilon = M_a - L_a + \sigma_a^2 \lambda_a(L_a) = -100 + 50 + 10^4 \cdot 0,01141 = 64,1$  МВт.

Дисперсия  $D_\varepsilon = \sigma_a^2 [1 - M_\varepsilon \lambda_a(L_a)] = 10^4 \cdot (1 - 64,1 \cdot 0,01141) = 2685$  МВт<sup>2</sup>, где интенсивность  $\lambda_a(L_a) = f_a(L_a) / \bar{F}_a(L_a) = f_a(-50) / \bar{F}_a(-50) = 0,01141$ . Аналогично

$$M_{\eta} = M_b - L_b + \sigma_b^2 \lambda_b(L_b) = 142,7 \text{ МВТ}, D_{\eta} = \sigma_a^2 [1 - M_{\eta} \lambda_b(L_b)] = 1998 \text{ МВТ}^2.$$

Математическое ожидание и дисперсия суммы  $M_{\varepsilon+\eta} = M_{\varepsilon} + M_{\eta} = 64,1 + 142,7 = 206,8 \text{ МВТ}$ ,  $D_{\varepsilon+\eta} = D_{\varepsilon} + D_{\eta} = 2685 + 1998 = 4682 \text{ МВТ}^2$ .

Результирующие данные приведены в табл. 5.1, где составляющие функции распределения  $F_1 = F_a(z - L_b) \cdot F_b(L_b)$ ,  $F_2 = F_a(L_a) \cdot [F_b(z - L_a)]$ .

Таблица 5.1

$z$	$x=z-150$	$F_1$	$F_2$	$F_{MNA}$	$F_c$	$p_c$
-150	0	0,4140	0,0000	0	0,4140	0,0000
-140	10	0,4345	0,0133	8E-10	0,4478	0,0338
-130	20	0,4538	0,0264	3E-07	0,4802	0,0324
-120	30	0,4719	0,0392	8E-06	0,5111	0,0309
-110	40	0,4885	0,0518	8E-05	0,5404	0,0293
-100	50	0,5037	0,0641	0,0004	0,5683	0,0278
-90	60	0,5175	0,0762	0,0014	0,5951	0,0268
-80	70	0,5298	0,0878	0,0039	0,6216	0,0265
-70	80	0,5408	0,0992	0,0091	0,6490	0,0274
-60	90	0,5504	0,1102	0,0182	0,6787	0,0297
-50	100	0,5587	0,1208	0,0326	0,7121	0,0334

Величина  $F_{MNA}$  определена с помощью стандартной функции гамма-распределения (Excel). Последний столбец таблицы является разностью текущего и предшествующего значений ФР. Сопоставление с результатами свертки редуцированных ВР (пример 5.1) показывает, что отличие вероятностей не превышает 3%, что вполне приемлемо для практических расчетов. Результирующая функция распределения на левой границе рассматриваемого интервала имеет дискретное приращение  $\Delta F_c = F_a(L_a) \cdot F_b(L_a) = F_a(-50) \cdot F_b(-100) = 0,692 \cdot 0,599 = 0,414$ .

### 5.1.5 Свертка редуцированного и нередуцированного нормальных распределений

В процессе преобразования расчетных схем часто встречается суммирование случайных величин с редуцированным и нередуцированным распределениями, например воздействие одной из ЭЭС на другую через связь ограниченной пропускной способности. Такая ситуация является частным случаем рассмот-



ренного выше случая двух редуцированных распределений. Пределы редуцирования одной из них, например ЭЭС  $B$ , принимаются равными бесконечности,  $L_b = -\infty, R_b = \infty$ . Это предопределяет выбор интервала функции распределения (5.8). Поскольку  $R_a + L_b = -\infty < L_b + R_b = \infty$ , это четвертый интервал, где ФР не имеет дискретных приращений:

$$F^c(z) = F_a(L_a) \cdot F_b(z - L_a) + F_b(z - R_a) \cdot \bar{F}_a(R_a) + \int_{L_a}^{R_a} F_b(z - x) \cdot dF_a(x). \quad (5.17)$$

Математическое ожидание и дисперсия данной функции

$$M^c = M^p(M_a, D_a, L_a, R_a) + M_b;$$

$$D^c = D^p(M_a, D_a, L_a, R_a) + D_b.$$

Следует заметить, что в общем случае кривая плотности распределения, полученная дифференцированием ФР (5.17), не является симметричной относительно МО. На рис. 5.7 наряду с рассматриваемой (сплошная линия) пред-

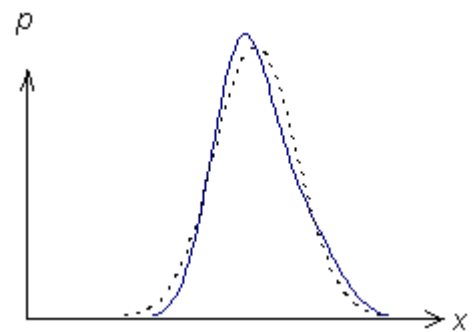


Рис. 5.7. Свертка ФР

ставлена кривая плотности нормального распределения (штриховая линия). Показанная асимметрия заставляет критически относиться к аппроксимации результирующей ФР нормальным распределением. Во многих случаях в качестве аппроксимирующего имеет смысл взять гамма-распределение.

## 5.2 Цепочечные схемы

При расчете ФР НМ узлов в процессе их последовательного исключения цепочечная схема соединений ЭЭС имеет ряд специфических особенностей. Рассмотрим граничные значения  $L_a, R_a, L_b, R_b$  при свертке редуцированных ФР ЭЭС  $A$  и  $B$ :

$$L_a = -\Pi_{ab}, \quad R_a = \Pi_{ba}, \quad L_b = -(\Pi_{ba} + \Pi_{bc}), \quad R_b = \Pi_{ab} + \Pi_{cb} \quad (5.18)$$

При дальнейшем исключении ФР (5.6) объединения ЭЭС  $A$  и  $B$  снова редуцируется значениями ПС связи ВС:  $L_{ab} = -\Pi_{bc} \leq z \leq R_{ab} = \Pi_{cb}$ . Нетрудно видеть (5.18), что

$$L_{ab} = R_a + L_b = -\Pi_{bc}, R_{ab} = L_a + R_b = \Pi_{cb}.$$

Таким образом, из шести интервалов существования результирующей ФР (5.6) при исключении узлов **интерес представляет лишь один** -  $(R_a + L_b, L_a + R_b)$  - рис. 5.5, а. Таким образом,

$$F_{ab}^p(z) = \begin{cases} 0, & z < -\Pi_{bc}; \\ F_b(z - \Pi_{ba}) + \int_{z - \Pi_{ba}}^{z + \Pi_{ab}} F_a(z - x) \cdot dF_b(x), & -\Pi_{bc} \leq z < \Pi_{cb}; \\ 1, & z \geq \Pi_{cb}. \end{cases} \quad (5.19)$$

Следует отметить, что данная функция не зависит от ПС связи ВС. Но если это так, то ПС связи  $BC$  можно считать равной  $\infty$ . В этом случае на интервале непрерывности

$$\begin{aligned} F_{ab}(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} F_b(z - x) \cdot dF_a^p(x) = \\ &= F_a(-\Pi_{ab}) \cdot F_b(z + \Pi_{ab}) + \bar{F}_a(\Pi_{ba}) \cdot F_b(z - \Pi_{ba}) + \int_{-\Pi_{ab}}^{\Pi_{ba}} F_b(z - x) \cdot dF_a(x). \end{aligned}$$

Данная функция может быть представлена также в виде (5.8), удобном для более точного ее вычисления:

$$F_{ab}^p(z) = F_a(-\Pi_{ab})F_b(z + \Pi_{ab}) + F_b(z - \Pi_{ba})\bar{F}_a(-\Pi_{ab}) + F_{MNL4},$$

где треугольник  $MNL4$  ограничен катетами  $l_a = L_a = -\Pi_{ab}$  и  $l_b = z - \Pi_{ba}$ .

Для вычисления вероятности  $F_{MNL4}(z)$  вводятся новые переменные

$$\varepsilon = N_a - l_a = N_a + \Pi_{ab}, \quad \eta = N_b - l_b = N_b + \Pi_{ba} - z.$$

Поскольку  $N_a = \varepsilon - \Pi_{ab}$ ,  $N_b = \eta + z - \Pi_{ba}$ , то условию  $N_a + N_b = z$  удовлетворяет соотношение  $\varepsilon + \eta = \Pi_{ba} + \Pi_{ab}$ . В результате

$$F_{MNL4}(z) = \bar{F}_a(-\Pi_{ab}) \cdot \bar{F}_b(z - \Pi_{ba}) \cdot F_{\varepsilon + \eta}(\Pi_{ba} + \Pi_{ab}). \quad (5.20)$$

На первый взгляд определяемая через переменные  $\varepsilon, \eta$  вероятность  $F_{\varepsilon+\eta}(II_{ba} + II_{ab})$  не зависит от переменного параметра  $z$ . Однако от  $z$  зависят математическое ожидание и дисперсия  $\eta$

$$M_{\eta} = M_b - z + II_{ba} + \sigma_b^2 \lambda_b(z - II_{ba}); \quad D_{\eta} = \sigma_b^2 \cdot [1 - M_{\eta} \lambda_b(z - II_{ba})],$$

поэтому составляющая  $F_{\varepsilon+\eta}(II_{ba} + II_{ab})$  также зависит от  $z$ .

При построении вероятностного ряда на основе рассматриваемой ФР данный фактор является несущественным, поскольку МО, дисперсия и аргумент равноправны как параметры в стандартной процедуре определения вероятности. Однако при определении некоторых интегральных характеристик (например, МО и дисперсия «эквивалентного генератора») возникают затруднения аналитического характера.

Решение проблемы зависимости параметров  $M_{\eta}, D_{\eta}$  от  $z$  при определении вероятности  $F_{MNL4}(z)$  возможно путем расширения области MNL до треугольника MPR с выделением треугольника LQR (рис. 5.8). Здесь катеты выделенных треугольников не зависят от  $z$ . С учетом новых построений

$$F_{ab}^p(z) = F_b(-II_{bc} - II_{ba}) + F_a(-II_{ab})[F_b(z + II_{ab}) - F_b(-II_{bc} - II_{ba})] + \\ + \bar{F}_a(II_{ba})[F_b(z - II_{ba}) - F_b(-II_{bc} - II_{ba})] + F_{MPR}(z) - F_{LQR}(z). \quad (5.21)$$

Для вычисления вероятностей  $F_{MPR}(z), F_{LQR}(z)$  вводятся переменные  $\varepsilon = N_a + II_{ab}, \eta = N_b + II_{ba} + II_{bc}, \xi = N_a - II_{ba}$ . При этом

$$F_{MPR}(z) = \bar{F}_a(-II_{ab})\bar{F}_b(-II_{bc} - II_{ba})F_{\varepsilon+\eta}(z + II_{ba} + II_{ab} + II_{bc}). \\ F_{LQR}(z) = \bar{F}_a(II_{ba})\bar{F}_b(-II_{bc} - II_{ba})F_{\xi+\eta}(z + II_{bc}).$$

Математическое ожидание и дисперсия величин  $\varepsilon, \eta, \chi$  определяются согласно формулам для усеченных распределений:

$$M_{\varepsilon} = M_a + II_{ab} + \sigma_a^2 \lambda_a(-II_{ab}); \quad D_{\varepsilon} = \sigma_a^2 [1 - M_{\varepsilon} \lambda_a(-II_{ab})]; \\ M_{\eta} = M_b + II_{bc} + II_{ba} + \sigma_b^2 \lambda_b(-II_{bc} - II_{ba}); \quad D_{\eta} = \sigma_b^2 [1 - M_{\eta} \lambda_b(-II_{bc} - II_{ba})]; \\ M_{\xi} = M_a - II_{ba} + \sigma_a^2 \lambda_a(II_{ba}); \quad D_{\xi} = \sigma_a^2 [1 - M_{\xi} \lambda_a(II_{ba})]. \quad (5.22)$$

Полученные соотношения позволяют определить параметры распределений неотрицательных случайных величин  $\varepsilon$ ,  $\eta$ ,  $\xi$ , а следовательно, и их сумм  $\varepsilon+\eta$ ,  $\xi+\eta$ . Табулированное или аналитическое представление соответствующих распределений позволяет выполнять многократные расчеты результирующей ФР без процедуры численного интегрирования.

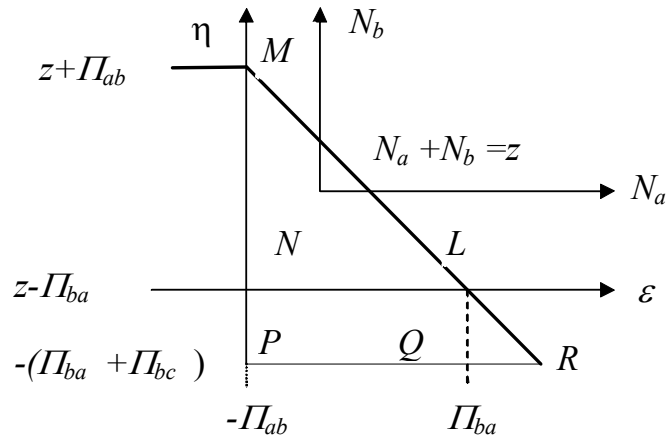


Рис. 5.8. Расширение области треугольника

**Пример 5.4.** Определить вероятность небаланса мощности  $z = -30$  МВт в объединенной редуцированной ЭЭС. Некоторые исходные и промежуточные данные приведены в примере 5.3. Пропускная способность связи  $BC$   $\Pi_{bc} = \Pi_{cb} = 100$  МВт. Остальные параметры:  $M_a = -100$  МВт,  $D_a = 10000$  МВт<sup>2</sup>,  $M_b = -150$  МВт,  $D_b = 40000$  МВт<sup>2</sup>,  $\Pi_{ab} = \Pi_{ba} = 50$  МВт.

**Решение.** Для исходных ПС  $L_a = -50$ ,  $R_a = 50$ ,  $L_b = -150$ ,  $R_b = 150$ . Рассматриваемая величина параметра принадлежит четвертому интервалу  $(R_a + L_b = -100) < z < (L_a + R_b = 100)$ . Согласно (5.21) ФР в рассматриваемом интервале определяется выражением

$$F_{ab}(z) = F_b(-\Pi_{bc} - \Pi_{ba}) + F_a(-\Pi_{ab})[F_b(z + \Pi_{ab}) - F_b(-\Pi_{bc} - \Pi_{ba})] + \bar{F}_a(\Pi_{ba})[F_b(z - \Pi_{ba}) - F_b(-\Pi_{bc} - \Pi_{ba})] + F_{MPR}(z) - F_{LQR}(z).$$

**Математические ожидания и дисперсии** вспомогательных переменных

$$\lambda_a(-\Pi_{ab}) = f_a(-\Pi_{ab}) / \bar{F}_a(-\Pi_{ab}); \lambda_a(-50) = f_a(-50) / \bar{F}_a(-50) = 0,01141;$$

$$M_\varepsilon = M_a + \Pi_{ab} + \sigma_a^2 \lambda_a(-\Pi_{ab}) = -100 + 50 + 10000 \cdot 0,01141 = 64,1 \text{ МВт};$$

$$D_{\varepsilon} = \sigma_a^2 [1 - M_{\varepsilon} \lambda_a (-\Pi_{ab})] = 10000 \cdot (1 - 64,1 \cdot 0,01141) = 2686 \text{ МВт}^2;$$

$$\lambda_b(-150) = f_a(-150) / \bar{F}_a(-150) = 0,00399;$$

$$M_{\eta} = M_b + \Pi_{bc} + \Pi_{ba} + \sigma_b^2 \lambda_b (-\Pi_{bc} - \Pi_{ba}) = -150 + 150 + 40000 \cdot = 159,6 \text{ МВт};$$

$$D_{\eta} = \sigma_b^2 [1 - M_{\eta} \lambda_b (-\Pi_{bc} - \Pi_{ba})] = 40000 \cdot (1 - 159,6 \cdot 0,00399) = 14528 \text{ МВт}^2;$$

$$M_{\varepsilon} + M_{\eta} = 64,1 + 159,6 = 223,7 \text{ МВт}. \quad D_{\varepsilon} + D_{\eta} = 2685 + 14535 = 17220 \text{ МВт}^2;$$

$$M_{\xi} = M_a - \Pi_{ba} + \sigma_a^2 \lambda_a (\Pi_{ba}) = -100 - 50 + 10000 \cdot 0,01939 = 43,9 \text{ МВт};$$

$$D_{\xi} = \sigma_a^2 [1 - M_{\xi} \lambda_a (-\Pi_{ba})] = 10000 \cdot (1 - 43,9 \cdot 0,01939) = 1488 \text{ МВт}^2;$$

$$M_{\xi} + M_{\eta} = 43,9 + 159,6 = 203,5 \text{ МВт}. \quad D_{\xi} + D_{\eta} = 1488 + 14528 = 16016 \text{ МВт}^2.$$

**Коэффициенты масштаба и формы** и функция гамма-распределения

Треугольник MPR:

$$\beta = M_{\varepsilon+\eta} / \sigma_{\varepsilon+\eta}^2 = 223,7 / 17220 = 0,013;$$

$$\alpha = \beta \cdot M_{\varepsilon+\eta} = 0,013 \cdot 223,7 = 2,908;$$

$$F_{\varepsilon+\eta}(z + \Pi_{ba} + \Pi_{ab} + \Pi_{bc}) = G(170; 2,908; 0,013) = 0,403,$$

где  $G(x, \alpha, \beta)$  – функция гамма-распределения.

$$F_{MPR}(z = -30) = \bar{F}_a(-50) \cdot \bar{F}_b(-150) \cdot F_{\varepsilon+\eta}(170) = 0,308 \cdot 0,5 \cdot 0,403 = 0,062.$$

Треугольник LQR:

$$\beta = M_{\xi+\eta} / \sigma_{\xi+\eta}^2 = 203,5 / 16016 = 0,0127;$$

$$\alpha = \beta \cdot M_{\xi+\eta} = 0,0127 \cdot 203,5 = 2,58;$$

$$F_{\xi+\eta}(z + \Pi_{bc}) = G(70; 2,58; 0,0127) = 0,109;$$

$$F_{LQR}(z = -30) = \bar{F}_a(50) \cdot \bar{F}_b(-150) \cdot F_{\xi+\eta}(70) = 0,0668 \cdot 0,5 \cdot 0,109 = 0,0036.$$

Окончательно

$$\begin{aligned} F_{ab}(-30) &= F_b(-150) + F_a(-50) \cdot [F_b(20) - F_b(-150)] + \\ &+ \bar{F}_a(50) \cdot [F_b(-80) - F_b(-150)] + F_{MPR}(-30) - F_{LQR}(-30) = \\ &= 0,5 + 0,692 \cdot (0,802 - 0,5) + 0,308 \cdot (0,6368 - 0,5) + 0,062 - 0,0036 = 0,8095. \end{aligned}$$

При умножении вероятностных рядов, построенных с шагом  $h=10$  МВт, было получено  $F_{ab}(-30) = 0,773$ . Разница 4,5% считается достаточно хорошим

совпадением результатов. При этом погрешность возможна не только из-за аппроксимации функций, но и дискретности ВР. Таким образом, предложенные расчетные выражения могут быть рекомендованы для практического использования.

**Интервальная аппроксимация.** Значения ФР на границах интервала  $-100 \leq z < 100$  определяются по представлению ФР на четвертом и пятом интервалах (аналогичные расчеты приведены в примере 5.2)

На четвертом интервале

$$F_{ab}^p(R_a + L_b) = F_a(L_a) \cdot F_b(z - L_a) + F_b(z - R_a) \cdot \bar{F}_a(L_a).$$

Подставляя численные значения, получаем

$$F_{ab}^p(-100) = F_a(-50) \cdot F_b(-50) + F_b(-150) \cdot \bar{F}_a(-50) = 0,692 \cdot 0,6915 + 0,5 \cdot 0,308 = 0,6325.$$

Значение ФР на правой границе  $z=100$  определяется по формуле пятого интервала с последующим вычитанием дискретного изменения ФР в рассматриваемой точке. На пятом интервале

$$F_{ab}^p(z) = F_a(z - R_b) \cdot \bar{F}_b(z - R_a) + F_b(z - R_a) + F_{MNL5};$$

$$F_{ab}^p(100_+) = F_a(-50) \cdot \bar{F}_b(50) + F_b(50) = 0,692 \cdot (1 - 0,84134) + 0,84134 = 0,9511.$$

Дискретное изменение функции распределения

$$\Delta F_{ab}^p(100) = F_a(-50) \cdot \bar{F}_b(150) = 0,308 \cdot (1 - 0,9332) = 0,0206.$$

Отсюда

$$F_{ab}^p(100) = F_{ab}^p(100_+) - \Delta F_{ab}^p(100) = 0,9511 - 0,0206 = 0,9305.$$

Параметры эквивалентного нормального распределения, определяемые решением системы нелинейных уравнений по критерию равенства ФР в граничных точках (процедура «Поиск решения» пакета Excel),  $M_3 = -159,3$ ;  $\sigma_3 = 175,3$ . Используя нормальное распределение с эквивалентными параметрами, получаем  $F_3(-30) = 0,77$ , что практически совпадает с величиной, полученной с использованием ВР. Это еще раз подтверждает целесообразность использования интервальной аппроксимации.

*Эквивалентирование нормальным распределением по модели  $A|_{ab}^{ba} + B$*

Математическое ожидание и дисперсия эквивалентного распределения

$$M_{\text{с1}} = M^p(M_a, D_a, -50, 50) + M_b = M^p(-100, 10000, -50, 50) - 150 = -183,2 \text{ МВт};$$

$$D_{\text{с1}} = D^p(M_a, D_a, -50, 50) + D_b = D^p(-100, 10000, -50, 50) + 40000 = 40998 \text{ МВт}^2.$$

Значение функции нормального распределения с полученными эквивалентными МО и дисперсией  $F(-30, M_{\text{с1}}, M_{\text{с1}}) = 0,775$ , что почти совпадает с предыдущими результатами.

### 5.3 Вероятностный ряд пропускной способности связи

Комбинаторная структура состояний межсистемных связей позволяет представить результирующее распределение вероятностей в виде ФР типа “взвесь”. Для полной совокупности состояний ПС связей *AB* и *BC* функция распределения может быть записана в виде

$$F_{ab}^p(z) = \sum_j p_j \cdot \begin{cases} 0, & z < -\Pi_{bc}^j, \\ \sum_k p_k F_{ab}(z, \Pi_{ab}^k, \Pi_{ba}^k), & -\Pi_{bc}^j \leq z < \Pi_{cb}^j, \\ 1, & z \geq \Pi_{cb}^j, \end{cases} \quad (5.23)$$

где  $\{p_k, \Pi_{ab}^k, \Pi_{ba}^k, k = 1, \dots, K\}$ ,  $\{p_j, \Pi_{bc}^j, \Pi_{cb}^j, j = 1, \dots, J\}$  - вероятностные ряды ПС межсистемных связей.

Нетрудно видеть, что на интервале  $\max(-\Pi_{bc}^j) \leq z < \min(\Pi_{cb}^j)$  функция  $F_{ab}^p(z)$  совпадает с

$$F_{ab}(z) = \sum_k p_k F_{ab}(z, \Pi_{ab}^k, \Pi_{ba}^k) = \int_{-\infty}^{\infty} F_b(z-x) d\left(\sum_k p_k F_a^p(x, -\Pi_{ab}^k, \Pi_{ba}^k)\right). \quad (5.24)$$

В области  $\min(-\Pi_{bc}^j) \leq z < \max(-\Pi_{bc}^j)$   $F_{ab}^p(z)$  ниже, а в области  $\min(\Pi_{cb}^j) \leq z < \max(\Pi_{cb}^j)$  - выше  $F_{ab}(z)$ . Вне этих областей она равна либо нулю (слева), либо единице (справа). Если во внутренней области структура ФР не изменяется (взвесь НР), то наличие левой ( $\min(-\Pi_{bc}^j) \leq z < \max(-\Pi_{bc}^j)$ ) и правой ( $\min(\Pi_{cb}^j) < z < \max(\Pi_{cb}^j)$ ) зон искажает внутреннее распределение.

### 5.3.1 Взвесь редуцированных распределений

Взвешенная сумма редуцированных распределений

$$F_a^{pc}(x) = \sum_k p_k F_a^p(x, -\Pi_{ab}^k, \Pi_{ba}^k) \quad (5.25)$$

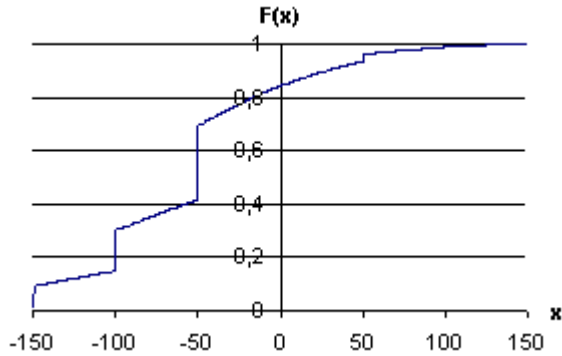


Рис. 5.9. ФР взвеси редуцированных распределений

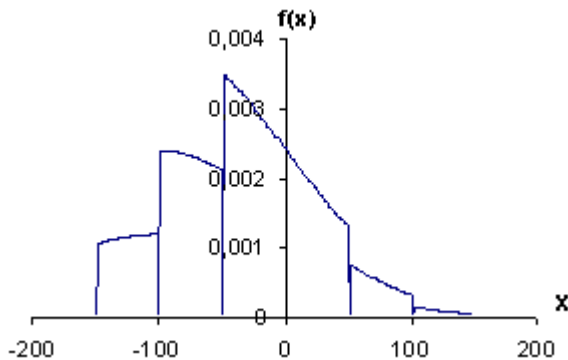


Рис. 5.10. ПР взвеси редуцированных распределений

ством ПС связи  $BC$ .

Величина дискретности может быть определена исходя из сопоставления ФР на двух соседних участках. Пусть интервалы ПС пронумерованы в порядке их вложенности: первый включает второй, второй – третий и т.д.;  $(L_1, R_1) \supset (L_2, R_2) \supset \dots \supset (L_K, R_K)$ . В этом случае каждый последующий интервал содержит дополнительную составляющую ФР. Отсюда приращение ФР в точке  $L_j < 0$  левого квадранта определяется значением ФР новой составляющей в рассматриваемой точке:

имеет скачки первого рода, определяемые точками дискретности ВР пропускной способности связи А-В. На рис. 5.9 показана ФР взвеси редуцированных распределений ЭЭС с параметрами  $M=\sigma=-100$ , ВР ПС в форме  $\{(L_i, R_i, p_i), \forall i\} : \{(-150, 150, 0,3); (-100, 100, 0,3); (-50, 50, 0,4)\}$ . Нетрудно видеть характерные скачки ФР в узлах редуцирования  $-150, -100, \dots, 150$ .

Плотность рассматриваемого распределения представлена на рис. 5.10, где с целью наглядности изъяты точки дискретности ФР. Рассматриваемая плотность  $f(x)$  совпадает с плотностью  $f_a(x)$  с точностью до множителя, разного на разных интервалах.

Аналогичный по структуре вид имеет функция (5.23) после редуцирования семей-



$$\Delta F(L_j) = F(L_{j+}) - F(L_{j-}) = \sum_{k=1}^j p_k F_a(L_j) - \sum_{k=1}^{j-1} p_k F_a(L_j) = p_j F_a(L_j). \quad (5.26)$$

На правой границе каждая составляющая ФР меняется с  $F(R_j)$  до единицы (скачок  $\Delta F = \bar{F}_a(R_j)$ ). Отсюда

$$\Delta F(R_j) = p_j \bar{F}_a(R_j). \quad (5.27)$$

Так, в рассмотренном демонстрационном примере

$$\Delta F(-50) = 0,4 \cdot F(-50, M = -100, \sigma = 100) = 0,4 \cdot 0,691 = 0,2764;$$

$$\Delta F(100) = 0,3 \cdot \bar{F}(100, M = -100, \sigma = 100) = 0,3 \cdot (1 - 0,977) = 0,0069.$$

На каждом интервале непрерывности плотность распределения результирующей ФР совпадает с плотностью распределения  $f_a(x)$  с точностью до множителя. Отсюда в области  $x \leq R_K$

$$F_a^{pc}(x) = \left( \sum_{k:L_k < x} p_k \right) F_a(x). \quad (5.28)$$

Принимая во внимание соотношение (5.27), можно показать, что в области  $x > R_K$

$$F_a^{pc}(x) = F_a(x) + \left( \sum_{k:R_k < x} p_k \right) \bar{F}_a(x) = \sum_{k:R_k < x} p_k + \left( \sum_{k:R_k \geq x} p_k \right) F_a(x) = 1 - \left( \sum_{k:R_k \geq x} p_k \right) \bar{F}_a(x) \text{ или}$$

$$\bar{F}_a^{pc}(x) = \left( \sum_{k:R_k \geq x} p_k \right) \bar{F}_a(x). \quad (5.29)$$

Объединяя (5.28), (5.29), получаем

$$F_a^{pc}(x) = \begin{cases} \left( \sum_{k:L_k < x} p_k \right) F_a(x), & x < R_K; \\ 1 - \left( \sum_{k:R_k \geq x} p_k \right) \bar{F}_a(x) & x \geq R_K. \end{cases} \quad (5.30)$$

Анализ (5.28), (5.29) показывает, что при равных по модулю ПС в разных направлениях для каждого состояния связи (симметрия ПС) имеет место симметрия нормирующего множителя для плотности распределения

$$f_a^{pc}(-x) / (f_a(-x)) = f_a^{pc}(x) / (f_a(x)).$$

В качестве иллюстрации формул ниже приведены ряд значений функции и плотности распределения рассматриваемого примера:

$$F_a^{pc}(-60) = (0,3 + 0,3) \cdot F_a(-60) = 0,6 \cdot 0,6554 = 0,3932;$$

$$F_a^{pc}(0) = 1 \cdot F_a(0) = 0,6554 = 0,8413;$$

$$F_a^{pc}(60) = 1 - (0,3 + 0,3) \cdot \bar{F}_a(60) = 1 - 0,6 \cdot (1 - 0,9452) = 0,96712;$$

$$f_a^{pc}(-60) = (0,3 + 0,3) \cdot f_a(-60) = 0,6 \cdot 0,00368 = 0,00221;$$

$$f_a^{pc}(60) = (0,3 + 0,3) \cdot f_a(60) = 0,6 \cdot 0,0011 = 0,00066.$$

Число параллельных цепей в межсистемной связи, как правило, невелико (часто это одноцепная электропередача). Отсюда вероятность  $p_0$  нулевого состояния существенна. На рис. 5.9 не учтено состояние полного отключения связи. При его наличии в точке  $z=0$   $F_{ab}^y(z)$  имеет скачок, равный  $p_0$ . Следует отметить, что слева и справа от нуля ФР относится к одному событию, поскольку ширина нулевой зоны равна нулю. В частности, при двух дискретных состояниях межсистемной связи (одна линия электропередачи) функция  $F_a^{pc}(z)$  принимает вид

$$F_a^{pc}(z) = \begin{cases} (1 - p_0)F_a(z), & z < 0, \\ p_0 + (1 - p_0)F_a(z), & z \geq 0. \end{cases}$$

### **Математическое ожидание и второй начальный момент взвеси редуцированных распределений**

Математическое ожидание и второй начальный момент взвеси редуцированных распределений равен взвеси редуцированных МО и ВНМ составляющих. Из (5.25) следует

$$M_a^{pc} = \sum_k p_k M^P(M_a, D_a, -\Pi_{ab}^k, \Pi_{ba}^k); \quad (5.31)$$

$$\chi_a^{pc} = \sum_k p_k \chi^P(M_a, D_a, -\Pi_{ab}^k, \Pi_{ba}^k). \quad (5.32)$$

В рассматриваемом демонстрационном примере

$L$	$R$	$p$	$M^p(L^k, R^k)$	$p^k M^p(L^k, R^k)$	$\chi^p(L^k, R^k)$	$p^k \chi^p(L^k, R^k)$
-150	150	0,3	-80,4	-24,1	3569	3569
-100	100	0,3	-61,0	-18,3	2038	2038
-50	50	0,4	-33,2	-13,3	839	839
			Итого	-55,7	Итого	6446

Методом численного интегрирования получено  $M_a^{pc} = -55,3$   $\chi_a^{pc} = 6435$ .

### 5.3.2 Эквивалентирование функции распределения

Реально в пропускной способности связи доминирует максимальная ПС (нет аварийных отключений параллельных связей). Отсюда все промежуточные дискретные приращения ПС мало значимы и при определенных допущениях могут быть исключены с эквивалентированием ФР непрерывным распределением во внутренней области.

Выбор критерия эквивалентирования зависит от способа использования результирующей ФР.

Наиболее точной моделью является представление результирующего небаланса мощности вероятностным рядом, который, несомненно, должен быть построен на основе более точного представления ФР, например в виде (5.30).

В упрощенной модели, при представлении ФР нормальным распределением, достаточно знать эквивалентные МО (5.31) и дисперсию или второй начальный момент (5.32).

Более точной является аппроксимация ФР редуцированным нормальным распределением с интервалом редуцирования  $(L, R)$ , определяемым максимальной ПС связи. Критерием эквивалентирования является также равенство МО и дисперсии исходного и эквивалентного распределений. При этом, как это неоднократно отмечалось, эквивалентные параметры  $M_\vartheta, D_\vartheta$  определяются решением системы нелинейных уравнений

$$\begin{cases} M_a^{pc} = M^p(M_\vartheta, D_\vartheta, L, R); \\ D_a^{pc} = D^p(M_\vartheta, D_\vartheta, L, R). \end{cases}$$

Информация о воздействии рассматриваемой ЭЭС на смежную ЭЭС здесь сводится к хранению структуры  $(M_{\vartheta}, D_{\vartheta}, L, R)$ .

При дальнейшем использовании рассматриваемой функции распределения не интегральными (МО, дисперсия), а функциональными  $(F(x))$  величинами следует отдать предпочтение интервальной аппроксимации. Данная модель особенно актуальна при использовании ФР в области малых вероятностей, где интегральная аппроксимация может дать значительную погрешность.

Ранее было отмечено, что область определения ФР  $F_a^{pc}(x)$  может быть разделена точками  $L_1, L_2, R_2, R_1$  на три области: внутреннюю  $(L_2, R_2)$ , где ФР непрерывна, и две наружные  $(L_1, L_2)$  и  $(R_2, R_1)$ , где ФР имеет скачки первого рода.

Значения  $F_{L1}, F_{L2}, F_{R2}, F_{R1}$  в точках  $L_1, L_2, R_2, R_1$  определяются согласно выражениям:

$$F_{L1} = p_1 F_a(L_1); \quad F_{L2} = F_a(L_2); \quad F_{R1} = F_a(R_1); \quad F_{R2} = 1 - p_1 \bar{F}_a(R_2).$$

Интервальная аппроксимация ФР возможна как в середине, так и в крайних зонах, где ФР можно аппроксимировать, не только нормальным распределением, но и какими-либо другими, например линейными или кусочно-линейными функциями. В последнем случае это соответствует равномерным  $\square$ аспределениям с вероятностями по концам соответственно  $(F_{L1}, F_{L2})$ ,  $(F_{R2}, F_{R1})$ . Плотности этих ФР постоянны и равны  $(F_{L2} - F_{L1}) / (L_2 - L_1)$  и  $(F_{R1} - F_{R2}) / (R_1 - R_2)$ . На интервале  $(L_2, R_2)$  ФР заменяется нормальным распределением, параметры которого  $M_{\vartheta}, D_{\vartheta}$  могут быть найдены при известных  $F_{L2}, F_{R2}$  из нелинейной системы уравнений.

Процедура определения МО и дисперсии при кусочно-интервальной аппроксимации не представляет затруднений. Здесь могут быть использованы основные соотношения, полученные для редуцированных распределений. Однако более целесообразно рассматриваемые параметры рассчитывать по формулам (5.31), (5.32).

## 5.4 Схема звезды

В процессе последовательного исключения ЭЭС встречаются ситуации, когда к некоторой ЭЭС ранга (число смежных связей) больше двух, присоединяется несколько ЭЭС первого ранга (рис. 5.11).

Возникает вопрос: имеет ли значение порядок исключения ЭЭС? Для ответа на этот вопрос рассмотрим процедуру исключения в порядке  $A-B-C$  и  $B-A-C$ .

В первом случае

$$L_a = -\Pi_{ac}; \quad R_a = \Pi_{ca};$$

$$L_c = -(\Pi_{ca} + \Pi_{cb} + \Pi_{cd}); \quad R_c = \Pi_{ac} + \Pi_{bc} + \Pi_{dc}.$$

Отсюда

$$L_{ac} = R_a + L_c = \Pi_{ca} - (\Pi_{ca} + \Pi_{cb} + \Pi_{cd}) = -(\Pi_{cb} + \Pi_{cd});$$

$$R_{ac} = L_a + R_c = -\Pi_{ac} + \Pi_{ac} + \Pi_{bc} + \Pi_{dc} = \Pi_{bc} + \Pi_{dc}.$$

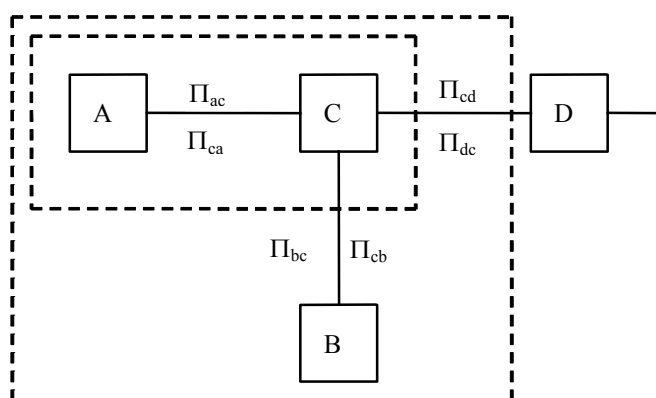


Рис. 5.11. Структурная схема типа “звезды”.

В результате последующего исключения ЭЭС  $B$  имеем

$$L_b = -\Pi_{bc}; \quad R_b = \Pi_{cb};$$

$$L_{abc} = R_b + L_{ac} = \Pi_{cb} - (\Pi_{cb} + \Pi_{cd}) = -\Pi_{cd};$$

$$R_{abc} = L_b + R_{ac} = -\Pi_{bc} + \Pi_{bc} + \Pi_{dc} = \Pi_{dc}.$$

Вновь, как и в случае цепочечной схемы, получено, что результирующий интервал усеченной ФР определяется последним сечением, т.е.  $(-\Pi_{cd}, \Pi_{dc})$ .

Аналогичный результат имеет место при альтернативном порядке исключения ЭЭС:

$$L_b = -\Pi_{bc}; \quad R_b = \Pi_{cb};$$

$$L_c = -(\Pi_{ca} + \Pi_{cb} + \Pi_{cd}); \quad R_c = \Pi_{ac} + \Pi_{bc} + \Pi_{dc}.$$

Отсюда

$$L_{bc} = R_b + L_c = \Pi_{cb} - (\Pi_{ca} + \Pi_{cb} + \Pi_{cd}) = -(\Pi_{ca} + \Pi_{cd});$$

$$R_{bc} = L_b + R_c = -\Pi_{bc} + \Pi_{ac} + \Pi_{bc} + \Pi_{dc} = \Pi_{ac} + \Pi_{dc}.$$

В результате последующего исключения ЭЭС  $A$  имеем

$$L_a = -\Pi_{ac}; \quad R_a = \Pi_{ca};$$

$$L_{abc} = R_a + L_{bc} = \Pi_{ca} - (\Pi_{ca} + \Pi_{cd}) = -\Pi_{cd};$$

$$R_{abc} = L_a + R_{bc} = -\Pi_{ac} + \Pi_{ac} + \Pi_{dc} = \Pi_{dc}.$$

Таким образом, порядок исключения узлов в схеме типа “звезда” значения не имеет.

## 5.5 Вероятностные характеристики отдельных подсистем

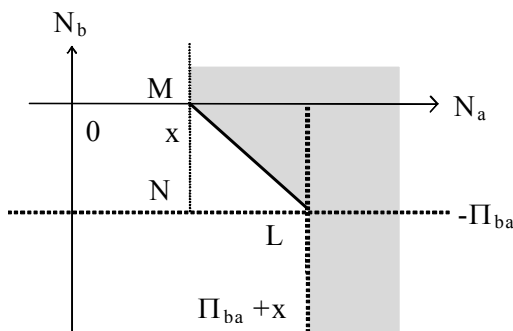


Рис.5.12. Дефицит мощности в ЭЭС  $A$  с учетом помощи от ЭЭС  $B$

Основная задача расчета показателей

БН - анализ состояния каждой ЭЭС, работающей в условиях объединения. Зададимся целью определить вероятность  $\bar{F}_a^*(x)$  того, что с учетом взаимопомощи от подсистемы  $B$  небаланс мощности в подсистеме  $A$  не меньше  $x > 0$ . Нетрудно видеть, что в стратегии локального эгоизма событие  $N_a^* \geq x$  (заштрихованная

на рис. 5.12 область) имеет место, если  $N_a \geq x$  при  $N_b \geq 0$  или  $N_a \geq \Pi_{ba} + x$  при наличии резерва в  $B$  не меньше  $\Pi_{ba}$  либо  $N_a \geq (x + y)$ , где  $-\Pi_{ba} \leq y \leq 0$  - располагаемый для оказания помощи резерв в ЭЭС  $B$ :

$$\begin{aligned}
\overline{F}_a^*(x) &= \overline{F}_a(x) \cdot \overline{F}_b(0) + \overline{F}_a(x + \Pi_{ba}) \cdot F_b(-\Pi_{ba}) + \int_{-\Pi_{ba}}^0 \overline{F}_a(x-y) \cdot dF_b(y) = \\
&= \overline{F}_a(x) + F_a(x) \cdot F_b(0) - F_a(x + \Pi_{ba}) \cdot F_b(-\Pi_{ba}) - \int_{-\Pi_{ba}}^0 F_a(x-y) \cdot dF_b(y).
\end{aligned} \tag{5.33}$$

Точно такой же вид будет иметь формула для  $\overline{F}_a^*(x)$  при концентрированном объединении подсистемы  $A$  и псевдосистемы  $B$  с НМ, заданным функцией распределения:

$$F_b^2(y) = \begin{cases} 0, & y < -\Pi_{ba}; \\ F_b(y), & \Pi_{ba} \leq y < 0; \\ 1, & y \geq 0. \end{cases} \tag{5.34}$$

Действительно, рассмотрим объединение ЭЭС  $B$  с ФР (5.34) с ЭЭС  $A$ .

Суммарная ФР объединения

$$\begin{aligned}
\overline{F}_a^*(x) &= \int_{-\infty}^0 F_a(x-y) \cdot dF_b^2(y) = F_a(x + \Pi_{ba}) \cdot F_b(-\Pi_{ba}) + F_a(x) \cdot \overline{F}_b(0) + \int_{-\Pi_{ba}}^0 F_a(x-y) \cdot dF_b(y) = \\
&= [1 - \overline{F}_a(x + \Pi_{ba})] \cdot F_b(-\Pi_{ba}) + [1 - \overline{F}_a(x)] \cdot \overline{F}_b(0) + F_b(x) \Big|_{-\Pi_{ba}}^0 - \int_{-\Pi_{ba}}^0 \overline{F}_a(x-y) \cdot dF_b(y) = \\
&= 1 - \overline{F}_a(x + \Pi_{ba}) \cdot F_b(-\Pi_{ba}) - \overline{F}_a(x) \cdot \overline{F}_b(0) - \int_{-\Pi_{ba}}^0 \overline{F}_a(x-y) \cdot dF_b(y).
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\overline{F}_a^*(x) = 1 - F_a^*(x) = \overline{F}_a(x + \Pi_{ba}) \cdot F_b(-\Pi_{ba}) + \overline{F}_a(x) \cdot \overline{F}_b(0) + \int_{-\Pi_{ba}}^0 \overline{F}_a(x-y) \cdot dF_b(y),$$

что и требовалось показать.

Расчет искомой вероятности лучше выполнять по формуле (5.33), поскольку здесь под знаком интеграла стоит ФР, для которой уже разработана процедура интегрирования, а не ее дополнение. При этом, как и ранее, для вычисления интеграла рекомендуется ввести новые неотрицательные переменные  $\varepsilon = N_a - x$ ;  $\eta = N_b + \Pi_{ba}$ , позволяющие более просто представить вероятность треугольника  $MNL$  по аналогии с описанной выше процедурой:

$$\overline{F}_a^*(x) = \overline{F}_a(x) - F_b(-\Pi_{ba})[F_a(x + \Pi_{ba}) - F_a(x)] - F_{MNL}.$$

Преобразование (5.34), связанное с изменением ФР смежной подсистемы при учете ее взаимопомощи через линию  $BA$ , условно назовем генераторной редуцицией ФР небаланса мощности подсистемы  $B$  связью  $BA$ . Вероятностный ряд, соответствующий (5.34), часто называется моделью эквивалентного генератора.

Математическое ожидание и дисперсия взаимопомощи от  $B$ :

$$M_{ba}^z = M^p(M_b, D_b, -P_{ba}, 0); \quad D_{ba}^z = D^p(M_b, D_b, -P_{ba}, 0).$$

Математическое ожидание и дисперсия НМ в подсистеме  $A$  с учетом взаимопомощи от подсистемы  $B$

$$M_a^* = M_a + M_{ba}^z; \quad D_a^* = D_a + D_{ba}^z.$$

Реально число ЭЭС, оказывающих помощь рассматриваемой ЭЭС, гораздо больше единицы. Рассмотрим частный случай присоединения типа “звезда”, например, для двух смежных ЭЭС (рис. 5.13).

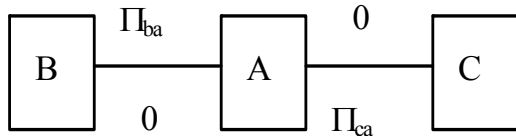


Рис.5.13. Помощь ЭЭС В и С в покрытии дефицита в ЭЭС А.

Суммарная ФР воздействия ЭЭС  $B$  и  $C$  определяется сверткой редуцированных ФР  $B$  и  $C$ . По существу данная процедура аналогична описанной выше при рассмотрении процедуры последовательного исключения

узлов в цепочечной схеме. При свертке двух редуцированных ФР появляются три интервала непрерывности ФР:

$$\begin{aligned} & (-(P_{ba} + P_{ca}), \min(-P_{ba}, -P_{ca})), \\ & (\min(-P_{ba}, -P_{ca}), \max(-P_{ba}, -P_{ca})), \\ & (\max(-P_{ba}, -P_{ca}), 0). \end{aligned}$$

Вид ФР на этих интервалах определяется соотношениями (5.6). Добавление каждой новой ЭЭС, оказывающей помощь ЭЭС  $A$ , вдвое увеличивает число точек, определяющих границы интервалов непрерывности. В то же время МО и дисперсия результирующей дополнительной генерации (ДГ) определяются суммированием соответствующих величин, связанных с ЭЭС  $A$  энергосистем. Отсюда вновь появляется возможность замены в оценочных расчетах ФР ДГ неко-



торым непрерывным распределением, например, редуцированным НР с параметрами

$$M_{\Sigma}^2 = \sum_i M_{ia}^2; \quad D_{\Sigma}^2 = \sum_i D_{ia}^2$$

и нижней границей  $L = \sum - P_{ia}$ . Далее выполняется свертка ФР ДГ с ФР НМ ЭЭС  $A$  и определяется искомая вероятность.

*Если следовать логике Стивена Хокинга, который утверждал, что любая формула, включенная в книгу, уменьшает число читателей вдвое, то, похоже, в конце этой главы автор остался наедине с редактором издательства, о чем он совершенно не жалеет – редактор – очаровательная женщина.*

Современные объединенные электроэнергетические системы, как правило, имеют сложную многоконтурную схему соединения, для которой пока не разработаны достаточно точные математические процедуры расчета показателей балансовой надежности.

В данной главе рассматриваются подходы, позволяющие расширить спектр математических методов и алгоритмов расчета показателей БН объединенных электроэнергетических систем любой конфигурации. Для решения этой задачи предложена процедура исключения узлов ранга два и более, а также математический метод, условно названный “методом хорд”, позволяющий привести схему к радиальному виду и использовать описанные выше процедуры.

Метод исключения узлов представляет интерес, поскольку он позволяет продолжить процесс эквивалентного преобразования схемы и в идеале довести схему до единственного узла, результирующие показатели надежности которого определяются без особых проблем.

Эквивалентные преобразования в расчетах режимов ЭЭС - это отражение процедуры Гауссовского исключения узлов при решении систем линейных уравнений, в частности уравнений узловых напряжений. Критериальными здесь являются условия соблюдения первого и второго законов Кирхгофа. Вполне уместно предположить, что в задаче БН при исключении узлов также можно использовать математические соотношения, применяемые в электрических расчетах, а именно нагрузка, генерация и в целом небаланс мощности исключаемого узла распределяются по смежным узлам пропорционально проводимостям (или ПС) инцидентных ветвей. ПС вновь образуемых эквивалентных связей должны быть пропорциональны произведению проводимостей (или ПС) инцидентных связей.

Однако задача БН имеет свою специфику. В частности, ПС связей определяются не только по критерию статической устойчивости (пропорционально

проводимостям), но и по допустимости отклонения напряжений в узлах, по термической стойкости и согласно технико-финансовой политике ЭЭС (договорные перетоки и др.). Отсюда ПС связей не всегда определяются проводимостями связей, и к ним не могут быть в полной мере применены формулы электрических преобразований.

Отдельная реализация НМ исключаемого узла может быть недопустима по условиям максимальной ПС смежных связей. Производится ограничение (отключение) нагрузки или генерации. Сумма эквивалентных добавок НМ в смежные узлы не равна НМ исключаемого узла, что приводит к несоблюдению первого закона Кирхгофа, а следовательно, и к отрицанию математического инструментария электрических преобразований. Последнее замечание легко учитывается предварительной редукцией НМ узлов, что и рекомендуется делать при расчетах показателей БН сложнотранзитной ЭЭС.

Свойство необязательной пропорциональности ПС проводимостям ветвей делает задачу БН схожей с задачей транспортных потоков со своими законами формирования ПС последовательных и параллельных соединений. Именно в таком виде она, как правило, представляется при использовании методов статистического моделирования. На наш взгляд, оба крайних случая (электрический подход и позиция транспортных потоков) могут рассматриваться как приемлемые при определенных стратегиях распределения мощности, но для большинства реальных ситуаций больше подходит их комбинация.

Задача БН имеет дело с учетом спроса и предложения ЭЭС, входящих в состав энергообъединения, поэтому здесь в качестве одного из критериев эквивалентных преобразований можно рассматривать равенство спроса и предложения в исходной и результирующей (эквивалентной) схемах. С позиции данного критерия при исключении узлов высших рангов становится малоубедительной процедура “электрического эквивалентирования”. Действительно, рассмотрим пример.

Пусть исключаемый узел  $C$  соединен с узлами  $A$  и  $B$  линиями с пропускными способностями 100 и 1000 МВт. Небаланс мощности  $N_C$  в узле  $C$ , приня-

тый равным 1100 МВт, распределяется между  $A$  и  $B$  в соотношении 100 и 1000 МВт. Если следовать правилу эквивалентирования проводимостей, то эквивалентная пропускная способность связи между  $A$  и  $B$  составит 190 МВт. Следовательно, для узла  $A$  кроме инъекции 100 МВт возможна дополнительная нагрузка 190 МВт, что противоречит условию ограничения пропускной способности на участке  $AC$  (100 МВт).

Приведенный пример показывает не столько несостоятельность “электрических” преобразований, сколько необходимость их коррекции с учетом специфики задачи БН. В большей степени это относится к пропускной способности эквивалентных связей. Кроме того, необходимо адекватно соотносить исходные предпосылки с получаемыми результатами. В рассмотренном примере эквивалентная ПС была получена по “электрическому” критерию, а результат оценивался по критерию транспортных потоков. Таким образом, математические модели исключения узлов высших рангов требуют своей детализации.

### **6.1 Исключение узлов второго ранга**

Ранее было отмечено, что в задаче оценки БН ЭЭС важное место занимает стратегия взаимопомощи, которая определяет и математический аппарат исключения узлов. Отражением незаинтересованных отношений является алгоритм пропорционального распределения небалансов мощности. Здесь генерация исключаемого узла распределяется между смежными ЭЭС пропорционально их нагрузкам, а дефицит мощности узла – пропорционально их генерациям.

Данный принцип может не соблюдаться при ограничении ПС смежных связей и при неизвестных НМ смежных узлов. В этом случае распределение НМ исключаемой ЭЭС можно осуществлять пропорционально пропускным способностям смежных связей.

Обобщением отмеченных двух подходов являются распределение НМ пропорционально нагрузкам или генерациям смежных узлов до достижения предела по ПС одной из инцидентных связей и дальнейшая загрузка оставшихся связей (комбинированная стратегия пропорционального распределения).

В результате исключения узла, как и при «электрических» преобразованиях, для обеспечения транзитов НМ должны быть введены эквивалентные связи, соединяющие соседние энергосистемы. ПС этих связей определяются исходя из требований обеспечения максимального эффекта взаимопомощи.

### 6.1.1 Пропорциональное распределение НМ исключаемого узла

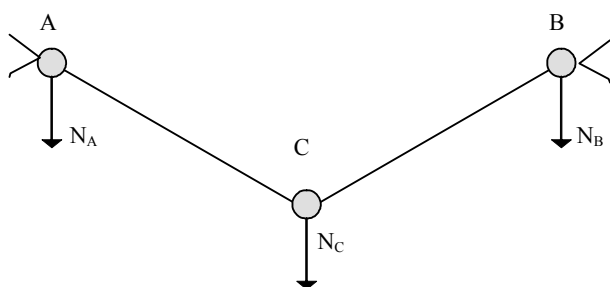


Рис. 6.1. Исключение узла  $C$  ранга 2

Рассмотрим исключение ЭЭС  $C$ , работающей в условиях объединения со смежными энергосистемами  $A$  и  $B$ , без непосредственной связи между узлами  $A$  и  $B$  (рис. 6.1). При исключении узла  $C$  в узлы  $A$  и  $B$  вводятся инъекции  $N_{A(C)}$  и  $N_{B(C)}$ .

Между узлами  $A$  и  $B$  в эквивалентной схеме предполагается эквивалентная связь с ПС  $\Pi_{ab}$ ,  $\Pi_{ba}$  (рис. 6.2).

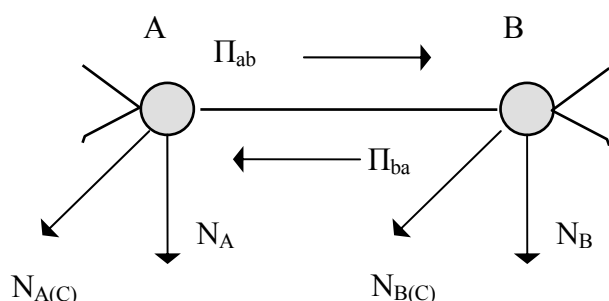


Рис. 6.2. Эквивалентная схема замещения при исключении узла

Как правило, НМ  $N_C$  представлен вероятностным рядом  $\{N_{ci}, p_{ci}\}$ , который можно разделить на два  $\{G_{ci}, p_{ci}\}$ ,  $\{L_{cj}, p_{cj}\}$  в зависимости от характера НМ – генерация или потребление. Разделение необходимо, поскольку в общем случае отличаются ПС связей в разных направлениях и

не одинаковы спрос и предложение соседних ЭЭС.

Небалансы мощности соседних ЭЭС  $N_a$ ,  $N_b$  имеют вероятностный характер и описываются, например, вероятностными рядами  $\{L_{ai}, p_{ai}\}$ ,  $\{G_{ai}, p_{ai}\}$ ,  $\{L_{bi}, p_{bi}\}$ ,  $\{G_{ai}, p_{ai}\}$ .

### 6.1.1.1 «Электрический» эквивалент

Если ПС связей пропорциональны проводимостям, что характерно для системообразующих сетей, где основным критерием пропускной способности является статическая устойчивость, то достаточно точным и простым методом исключения узлов представляются «электрические» преобразования. Здесь мощность исключаемого узла распределяется между смежными узлами пропорционально проводимостям (пропускным способностям) связей.

В силу возможной асимметрии ПС связей нагрузка и генерация исключаемой системы распределяются отдельно. ВР инъекций формируется на базе редуцированного ВР исключаемого узла. При этом вероятности  $P_{a(c),i} = P_{b(c),i} = P_{ci}$ , а мощности

$$L_{a(c),i} = k_a^H L_{ci} = \frac{\Pi_{ac}}{\Pi_{ac} + \Pi_{bc}} L_{ci}; \quad L_{b(c),i} = k_b^H L_{ci} = \frac{\Pi_{bc}}{\Pi_{ac} + \Pi_{bc}} L_{ci};$$

$$G_{a(c),i} = k_a^2 G_{ci} = \frac{\Pi_{ca}}{\Pi_{ca} + \Pi_{cb}} G_{ci}; \quad G_{b(c),i} = k_b^2 G_{ci} = \frac{\Pi_{cb}}{\Pi_{ca} + \Pi_{cb}} G_{ci}.$$

При симметрии ПС межсистемных связей данные формулы распространяются на небалансы мощностей

$$N_{a(c),i} = k_a N_{ci} = \frac{\Pi_{ac}}{\Pi_{ac} + \Pi_{bc}} N_{ci}; \quad N_{b(c),i} = k_b N_{ci} = \frac{\Pi_{bc}}{\Pi_{ac} + \Pi_{bc}} N_{ci},$$

что является отражением структурной формулы для случайных величин  $N_{a(c)} = k_a N_c$ ,  $N_{b(c)} = k_b N_c$ . Отсюда математические ожидания, дисперсии и корреляционный момент инъекций (коэффициент корреляции здесь равен единице)

$$M_{a(c)} = k_a M_c^P, \quad M_{b(c)} = k_b M_c^P, \quad D_{a(c)} = k_a^2 D_c^P, \quad D_{b(c)} = k_b^2 D_c^P, \quad \text{Cov}(a(c), b(c)) = k_a k_b D_c^P.$$

### 6.1.1.2 Динамический коэффициент пропорциональности

При распределении НМ пропорционально спросу и предложению инъекции, как и в случае электрических преобразований, пропорциональны НМ исключаемого узла  $N_{a(c)} = k_a N_c$ ,  $N_{b(c)} = k_b N_c$ . Отличается лишь структура коэффициентов пропорциональности. При ограниченной пропускной способности межсистемных связей вероятностные ряды НМ смежных ЭЭС должны быть редуци-

рованы:  $0 \leq L_{ai} \leq \Pi_{ca}$ ;  $0 \leq L_{bi} \leq \Pi_{cb}$ ;  $0 \leq G_{ai} \leq \Pi_{ca}$ ;  $0 \leq G_{bi} \leq \Pi_{bc}$ . Это означает, что вероятности пределов являются кумулятивными. В рассматриваемых условиях коэффициенты пропорциональности должны зависеть от вероятностного соотношения  $N_a$ ,  $N_b$  и от характера НМ. В частности, для нагрузки  $L_{a(c),i} = k_a^H L_{ci}$ ,  $L_{b(c),i} = k_b^H L_{ci}$ . В свою очередь,  $k_a^H$ ,  $k_b^H$  зависят от реализации генераций ЭЭС  $A$  и  $B$ .

$$k_a^H = \frac{1}{P_{Ga}P_{Gb}} \sum_j \sum_k \frac{G_{aj}}{G_{aj} + G_{bk}} p_{aj} p_{bk} = \sum_j G_{aj} p_{aj}^2 \sum_k \frac{p_{bk}^2}{G_{aj} + G_{bk}}; \quad (6.1)$$

$$k_b^H = 1 - k_a^H = \sum_k G_{bk} p_{bk}^2 \sum_j \frac{p_{aj}^2}{G_{aj} + G_{bk}} \quad (6.2)$$

где  $P_{Ga} = \sum_j p_{aj}$ ;  $P_{Gb} = \sum_k p_{bk}$  - суммарные вероятности генерирующего состояния, а  $p_{aj}^2 = p_{aj} / P_{Ga}$ ;  $p_{bk}^2 = p_{bk} / P_{Gb}$  - относительные вероятности отдельных реализаций генераций соответственно ЭЭС  $A$  и  $B$ .

Аналогичным образом могут быть определены коэффициенты генерации

$$k_a^2 = \frac{1}{P_{La}P_{Lb}} \sum_j \sum_k \frac{L_{aj}}{L_{aj} + L_{bk}} p_{aj} p_{bk} = \sum_j L_{aj} p_{aj}^H \sum_k \frac{p_{bk}^H}{L_{aj} + L_{bk}}; \quad (6.3)$$

$$k_b^2 = 1 - k_a^2 = \sum_k L_{bk} p_{bk}^H \sum_j \frac{p_{aj}^H}{L_{aj} + L_{bk}}. \quad (6.4)$$

**Пример 6.1.** Выполнить расчет коэффициентов пропорциональности  $k_a^2$ ,  $k_b^2$  для распределения генерации ЭЭС  $C$  между ЭЭС  $A$  и  $B$ , небалансы мощности которых описываются нормальным распределением с параметрами  $M_a=40$  МВт;  $\sigma_a=30$  МВт<sup>2</sup>;  $M_b=80$  МВт;  $\sigma_b=20$  МВт<sup>2</sup>. ПС связей одинаковы в разных направлениях и равны 50 МВт.

Решение частично представлено в табл. 6.1, где ВР нагрузки ЭЭС  $A$  описан *столбцами*  $L_a$ ,  $P_a$ , а ВР нагрузки ЭЭС  $B$  – *строками*  $L_b$ ,  $P_b$ . Напомним, что

ВР редуцированы (нагрузке  $L=50$  соответствует вероятность состояния  $L \geq 50$ , а нагрузке  $L=10$  - вероятность состояния  $L < 10$ ).

Таблица 6.1

$L_a/(L_a+L_b)$						$P_a \cdot P_b$					
$L_a$	$L_b$					$P_a$	$P_b$				
	10	20	30	40	50		0,0011	0,0049	0,017	0,044	0,933
10	0,50	0,33	0,25	0,20	0,17	0,09	0,000105	0,000456	0,001552	0,004134	0,087568
20	0,67	0,50	0,40	0,33	0,29	0,12	0,000131	0,000568	0,001934	0,005152	0,109136
30	0,75	0,60	0,50	0,43	0,38	0,13	0,000146	0,000634	0,002159	0,005752	0,121836
40	0,80	0,67	0,57	0,50	0,44	0,13	0,000146	0,000634	0,002159	0,005752	0,121836
50	0,83	0,71	0,63	0,56	0,50	0,37	0,000413	0,001795	0,006111	0,016277	0,344760

В левой части таблицы записаны перекрестные отношения  $L_a/(L_a+L_b)$ , а в правой - перекрестные произведения  $P_a \cdot P_b$ . Так при реализации  $L_a=30$ ,  $L_b=40$ ,  $P_a=0,13$ ,  $P_b=0,044$  отношение  $L_a/(L_a+L_b)=30/(30+40)=0,42857$ , а вероятность этого состояния  $P_a \cdot P_b=0,130 \cdot 0,044=0,00572$ , что и отражено в таблице, где результаты вычислены с повышенной точностью и записаны с округлением.

Сумма произведений соответствующих элементов левой и правой частей таблицы составляет  $S=0,345$ . Вероятность нагрузочного характера НМ ЭЭС А равна 0,84, а ЭЭС В - 0,9998. Отсюда  $k_a^z=0,345/(0,84 \cdot 9998)=0,41$ , а  $k_b^z=1-0,41=0,59$ .

В результате аналогичного расчета для системы генерации ЭЭС А и В можно получить  $k_a^h=0,589$ ,  $k_b^h=0,411$ . Интересный результат - те же коэффициенты, но для противоположных направлений. Является ли это закономерностью? Расчеты показывают, что при варьировании  $M_a$  в диапазоне (-100, 100) разница коэффициентов  $k_a^z$ ,  $k_b^h$  не превышала 4% (рис. 6.3, где  $k_a^z$ ,  $k_b^h$  соответствуют линии с маркером и без маркера). Отсюда в оценочных расчетах с достаточно большой степенью точности их можно считать равными, а расчеты сводятся к определению лишь одного коэффициента.

Структура коэффициентов пропорциональности позволяет предположить, что расчетные формулы могут быть распространены на редуцированные математические ожидания:



$$k_a^z = \frac{M^P(L_a)}{M^P(L_a) + M^P(L_b)} = \frac{M^P(M_a, D_a, 0, \Pi_{ca})}{M^P(M_a, D_a, 0, \Pi_{ca}) + M^P(M_b, D_b, 0, \Pi_{cb})},$$

$$k_a^H = \frac{M^P(G_a)}{M^P(G_a) + M^P(G_b)} = \frac{M^P(M_a, D_a, 0, \Pi_{ca})}{M^P(M_a, D_a, -\Pi_{ac}, 0) + M^P(M_b, D_b, -\Pi_{bc}, 0)},$$

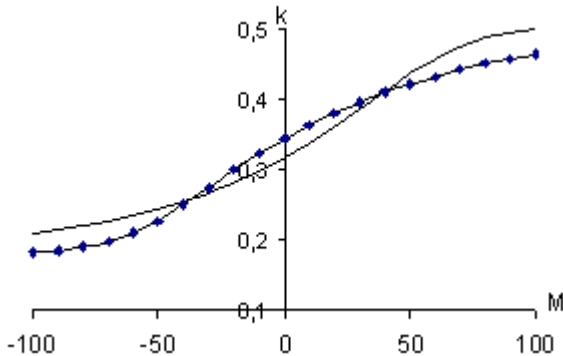


Рис. 6.3 Изменение коэффициентов пропорциональности  $k_a^z$   $k_a^H$

В рассмотренном примере

$$M^P(M_a, D_a, 0, \Pi_{ca}) = M^P(40, 900, 0, 50) = 33,6;$$

$$M^P(M_b, D_b, 0, \Pi_{cb}) = M^P(80, 40, 0, 50) = 49,4.$$

Отсюда коэффициент пропорцио-

нальности для генерации

$$k_a^z = 33,6 / (33,6 + 49,4) = 0,405, \text{ что практически совпадает с полученным ранее из ВР.}$$

Однако при распределении нагрузки МО редуцированных распределений малы:

$$M^P(40, 900, -50, 0) = -1,26; \quad M^P(80, 400, -50, 0) = -0,00014.$$

Ошибка аппроксимации здесь весьма велика ( $k_a^H = 0,9999$  по сравнению с полученным ранее  $k_a^H = 0,589$ ). Данный результат заставляет усомниться в возможности использования МО редуцированных распределений для расчета коэффициентов пропорциональности. Однако если принять упомянутую выше идеологию одного коэффициента, то, выбирая из двух коэффициентов (нагрузка, генерация) в качестве расчетного тот, что ближе к 0,5, можно использовать данный подход для оценочных расчетов.

Представленные формулы расчета коэффициентов пропорциональности не могут быть использованы при одинаковом характере НМ в исключаемом и смежных узлах (знаменатель в одной из формул (6.1)-(6.4) равен нулю), например при распределении генерации  $G_c$ , ( $L_a = L_b = 0$ ). В то же время распределение должно состояться. Согласно стратегии спроса и предложения большую часть генерации следует передать ЭЭС с меньшей генерацией, что соответствует алгоритму расчета коэффициентов нагрузки. Данное положение хорошо согласуется

с выводом о равенстве соотношения коэффициентов пропорциональности нагрузки и генерации  $k_a^z = k_b^H$ .

Случай, когда равна нулю только одна составляющая, например  $L_a=0$ ,  $L_b \neq 0$ , не приводит к математическим противоречиям – вся генерация передается ЭЭС, где нагрузка не равна нулю.

В ситуации, когда и нагрузка, и генерация смежных ЭЭС равны нулю (пассивные узлы), НМ ЭЭС  $C$  распределяется между соседними узлами поровну.

### 6.1.2 Распределение НМ исключаемого узла

Несоответствие коэффициентов пропорциональности соотношению ПС смежных связей предопределяет дополнительные расчеты, связанные с догрузкой незагруженной связи.

Пусть для определенности при распределении генерации ЭЭС  $C$  в первую очередь загружается (насыщается) связь  $CB$  с ПС  $\Pi_{cb}$ , а при распределении нагрузки – связь  $AB$  с ПС  $\Pi_{ab}$ . В этом случае мощности в вероятностных рядах  $\{G_{a(c),i}, P_i\}$ ,  $\{G_{b(c),i}, P_i\}$ ,  $\{L_{b(c),i}, P_i\}$ ,  $\{L_{a(c),i}, P_i\}$  определяются соотношениями

$$G_{a(c),i} = \begin{cases} k_a^z G_i, & G_i \geq -\Pi_{cb} / k_b^z; \\ G_i + \Pi_{cb}; & G_i < -\Pi_{cb} / k_b^z; \end{cases}$$

$$G_{b(c),i} = \begin{cases} k_b^z G_i, & G_i \geq -\Pi_{cb} / k_b^z; \\ -\Pi_{cb}; & G_i < -\Pi_{cb} / k_b^z; \end{cases}$$

$$L_{b(c),i} = \begin{cases} k_b^H L_i, & k_a^H L_i < \Pi_{ac}; \\ L_i - \Pi_{ac}; & k_a^H L_i \geq \Pi_{ac} \end{cases}$$

$$L_{a(c),i} = \begin{cases} k_a^H G_i, & k_a^H L_i < \Pi_{ac}; \\ \Pi_{ac}; & k_a^H L_i \geq \Pi_{ac}. \end{cases}$$

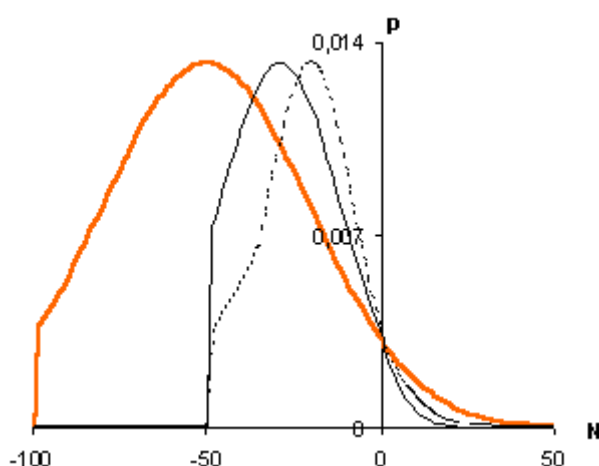


Рис. 6.4. Плотность распределения инъекций при  $M_c=-50$ ,  $\sigma_c=30$

В силу асимметрии спроса и предложения распределения инъекций также несимметричны и сдвинуты относительно друг друга (рис. 6.4, где изъяты дискретные вероятности в узлах  $N=-$

100, -50, кривые представляют: сплошная, толстая – НМ ЭЭС С; сплошная, тонкая – инъекция  $A(C)$ , штриховая - инъекция  $B(C)$  ).

Математические ожидания дисперсии и корреляционный момент инъекций определяются вероятностными рядами. При оценочных расчетах, когда оперируют, в основном, вероятностными параметрами, можно использовать математический аппарат редуцированных распределений.

### *Математические ожидания*

С целью наглядности математических выражений обозначим левый предел НМ исключаемой ЭЭС через  $v_c = -\Pi_{cb} - \Pi_{ca}$ , а генерацию, при которой происходит насыщение связи  $CB$  через  $\psi = -\Pi_{cb} / k_b^2$ . В рассматриваемых условиях перегрузки связей (при генерации ЭЭС С насыщается связь  $CB$ , а при нагрузке – связь  $AB$ ) математическое ожидание  $MG_{a(c)}$  имеет вид

$$\begin{aligned} MG_{a(c)} &= \int_{v_c}^{\psi} (\Pi_{cb} + x) dF_c + k_a^2 \int_{\psi}^0 x dF_c = \\ &= \left\{ M^P(M_c, D_c, v_c, \psi) - \psi \bar{F}_c(\psi) \right\} + k_a^2 \left\{ M^P(M_c, D_c, \psi, 0) - \psi F_c(\psi) \right\} + \Pi_{cb}(F_c(\psi)). \end{aligned}$$

В процессе вывода формулы было учтено равенство нулю  $F_c(v_c)$ .

Не входящие в состав редуцированных МО члены преобразуются в более простое выражение

$$-\psi \bar{F}_c(\psi) - k_a^2 \psi F_c(\psi) + \Pi_{cb}(F_c(\psi)) = -\psi + k_b^2 \psi F_c(\psi) + \Pi_{cb}(F_c(\psi)) = -\psi.$$

Отсюда результирующая формула имеет вид

$$MG_{a(c)} = M^P(M_c, D_c, v_c, \psi) + k_a^2 M^P(M_c, D_c, \psi, 0) - \psi. \quad (6.5)$$

Математическое ожидание  $MG_{b(c)}$  имеет более простую структуру:

$$MG_{b(c)} = k_b^2 M^P(M_c, D_c, \psi, 0). \quad (6.6)$$

Нетрудно показать, что

$$MG_{(c)} = MG_{a(c)} + MG_{b(c)}. \quad (6.7)$$

Действительно,

$$MG_{(c)} = M^P(M_c, D_c, \nu_c, 0) = M^P(M_c, D_c, \nu_c, \psi) - \psi \bar{F}(\psi) + M^P(M_c, D_c, \psi, 0) - \psi F(\psi) =$$

$$MG_{a(c)} + MG_{b(c)} = M^P(M_c, D_c, \nu_c, \psi) + k_a^2 M^P(M_c, D_c, \psi, 0) - \psi + k_b^2 M^P(M_c, D_c, \psi, 0).$$

Отсюда вместо (6.5) можно использовать не намного более простое выражение  $MG_{a(c)} = MG_{(c)} - MG_{b(c)}$ , но лучше соотношение (6.7) использовать для проверки результатов расчета.

Аналогично определяются МО инъекций нагрузки. Здесь используется замена правой границы интервала нагрузки ЭЭС  $C$   $\rho_c = \Pi_{bc} + \Pi_{ac}$  и нагрузки, при которой происходит насыщение связи  $AC$ ,  $\xi = \Pi_{ac} / k_a^H$ . Математическое ожидание инъекции нагрузки в узле  $B$

$$ML_{b(c)} = k_b^H \int_0^{\xi} x dF_c + \int_{\xi}^{\rho_c} (x - \Pi_{ac}) dF_c + (\rho_c - \Pi_{ac}) \bar{F}_c(\rho_c) = k_b^H [M^P(M_c, D_c, 0, \xi) - \xi \bar{F}_c(\xi)] +$$

$$+ \{M^P(M_c, D_c, \xi, \rho_c) - \xi F_c(\xi) - \rho_c \bar{F}_c(\rho_c)\} - \Pi_{ac} [F_c(\rho_c) - F_c(\xi)] + (\rho_c - \Pi_{ac}) \bar{F}_c(\rho_c).$$

По аналогии с предыдущим выделим члены, не входящие в состав редуцированных МО:

$$-k_b^H \xi \bar{F}_c(\xi) - \xi F_c(\xi) - \rho_c \bar{F}_c(\rho_c) - \Pi_{ac} F_c(\rho_c) + \Pi_{ac} F_c(\xi) + (\rho_c - \Pi_{ac}) \bar{F}_c(\rho_c) =$$

$$= -k_b^H \xi \bar{F}_c(\xi) - \xi F_c(\xi) - \Pi_{ac} + \Pi_{ac} F_c(\xi) = -k_b^H \xi - \Pi_{ac} F_c(\xi) - \Pi_{ac} + \Pi_{ac} F_c(\xi) = -\xi.$$

В результате получаем выражение, схожее по структуре с (6.5):

$$ML_{b(c)} = k_b^H M^P(M_c, D_c, 0, \xi) + M^P(M_c, D_c, \xi, \rho_c) - \xi. \quad (6.8)$$

Математическое ожидание инъекции нагрузки в узле  $A$  имеет более простое выражение:

$$ML_{a(c)} = k_a^H M^P(M_c, D_c, 0, \Pi_{ac} / k_a^H). \quad (6.9).$$

Как и для генерации, для нагрузки соблюдается принцип аддитивности

$$^{ML_{(c)}} = ML_{a(c)} + ML_{b(c)}.$$

### $^{ML_{(c)}}$ **Вторые начальные моменты инъекций**

Вторые начальные моменты инъекций имеют структуру, подобную математическим ожиданиям. ВНМ генерации в узле  $A$

$$\begin{aligned}\chi(G_{a(c)}) &= \int_{\upsilon_c}^{\psi} (\Pi_{cb} + x)^2 dF_c + (k_a^e)^2 \int_{\psi}^0 x^2 dF_c = \\ &= \Pi_{cb}^2 F_c(\psi) + 2\Pi_{cb} [M^p(M_c, D_c, \upsilon_c, \psi) - \psi \bar{F}_c(\psi)] + \\ &+ [\chi^p(M_c, D_c, \upsilon_c, \psi) - \psi^2 \bar{F}_c(\psi)] + (k_a^e)^2 [\chi^p(M_c, D_c, \psi, 0) - \psi^2 F_c(\psi)]\end{aligned}$$

После промежуточных преобразований

$$\begin{aligned}\Pi_{cb}^2 F_c(\psi) - 2\Pi_{cb} \psi \bar{F}_c(\psi) - \psi^2 (1 - F_c(\psi)) - \left(1 - 2k_b^e + (k_b^e)^2\right) \psi^2 F_c(\psi) = \\ = \Pi_{cb}^2 F_c(\psi) - 2\Pi_{cb} \psi \bar{F}_c(\psi) - \psi^2 \bar{F}_c(\psi) - \left[1 - 2k_a^e + (k_b^e)^2\right] \psi^2 F_c(\psi) = -2\Pi_{cb} \psi - \psi^2\end{aligned}$$

получаем результирующее выражение

$$\chi(G_{a(c)}) = 2\Pi_{cb} [M^p(M_c, D_c, \upsilon_c, \psi) - \psi] + \chi^p(M_c, D_c, \upsilon_c, \psi) + (k_a^e)^2 \chi^p(M_c, D_c, \psi, 0) - \psi^2. \quad (6.10)$$

ВНМ инъекции генерации в узле  $B$

$$\chi(G_{b(c)}) = (k_b^e)^2 \chi^p(M_c, D_c, \psi, 0). \quad (6.11)$$

ВНМ инъекции нагрузки в ЭЭС  $B$

$$\begin{aligned}\chi(L_{b(c)}) &= (k_b^h)^2 \int_0^{\xi} x^2 dF_c + \int_{\xi}^{\rho_c} (x - \Pi_{ac})^2 dF_c + (\rho_c - \Pi_{ac})^2 \bar{F}_c(\rho_c) = \\ &= (k_b^h)^2 [\chi^p(M_c, D_c, 0, \xi) - \xi^2 \bar{F}_c(\xi)] + \chi^p(M_c, D_c, \xi, \rho_c) - \xi^2 F_c(\xi) - \rho_c^2 \bar{F}_c(\rho_c) - \\ &- 2\Pi_{ac} [M^p(M_c, D_c, \xi, \rho_c) - \xi F_c(\xi) - \rho_c \bar{F}_c(\rho_c)] + \Pi_{ac}^2 [F_c(\rho_c) - F_c(\xi)] + (\rho_c - \Pi_{ac})^2 \bar{F}_c(\rho_c).\end{aligned}$$

Промежуточные преобразования позволяют получить

$$\begin{aligned}- (k_b^h)^2 \xi^2 \bar{F}_c(\xi) - \xi^2 F_c(\xi) - \rho_c^2 \bar{F}_c(\rho_c) + 2\Pi_{ac} \xi F_c(\xi) + 2\Pi_{ac} \rho_c \bar{F}_c(\rho_c) + \\ + \Pi_{ac}^2 [F_c(\rho_c) - F_c(\xi)] + (\rho_c - \Pi_{ac})^2 \bar{F}_c(\rho_c) = -\xi^2 + 2\Pi_{ac} \xi.\end{aligned}$$

Результирующая формула имеет структуру, подобную (6.10):

$$\chi(L_{b(c)}) = (k_b^h)^2 \chi^p(M_c, D_c, 0, \xi) + \chi^p(M_c, D_c, \xi, \rho_c) - 2\Pi_{ac} [M^p(M_c, D_c, \xi, \rho_c) - \xi] - \xi^2. \quad (6.12)$$

ВНМ инъекции нагрузки в узле  $A$

$$\chi(L_{a(c)}) = (k_a^h)^2 \chi^p(M_c, D_c, 0, \xi). \quad (6.13)$$

В силу поинтервальной аддитивности редуцированных МО и ВНМ математическое ожидание и ВНМ небаланса мощности инъекций определяется суммой соответствующих параметров генерации и нагрузки (точка раздела подинтервалов  $N=0$ ):

$$M_{a(c)} = MG_{a(c)} + ML_{a(c)}; \quad \chi_{a(c)} = \chi(G_{a(c)}) + \chi(L_{a(c)}).$$

Вероятностный ряд НМ формируется путем простого поинтервального объединения ВР генерации и нагрузки.

**Пример 6.2.** При условиях примера 6.1 распределить НМ ЭЭС С, описываемый нормальным распределением с параметрами  $M_c = -50$  МВт,  $\sigma_c = 30$  МВт<sup>2</sup>.

**Решение.** В примере 6.1 было определено  $k_a^H = k_b^Z = 0,59$ ,  $k_a^Z = k_b^H = 0,41$ .

При нагрузочном характере  $N_c$  в первую очередь перегружается связь АС, поскольку  $(-\psi = P_{ac}/k_a^H = 50/0,59 = 84,7) < (P_{bc}/k_b^H = 50/0,41 = 121,9)$ . По аналогии при генерирующем характере  $N_c$  в первую очередь перегружается связь СВ.

**Генерирующая инъекция в узле А.** Согласно (6.5) математическое ожидание (при  $v_c = -100$ )

$$\begin{aligned} MG_{a(c)} &= k_a^Z M^P(M_c, D_c, \psi, 0) + M^P(M_c, D_c, v_c, \psi) - \psi = \\ &= 0,41 M^P(-50, 900, -84,7, 0) + M^P(-50, 900, -100, -84,7) + 84,7 = \\ &= -0,41 \cdot 48,77 - 85,94 + 84,7 = -21,24 \text{ МВт}. \end{aligned}$$

*Второй начальный момент (6.10)*

$$\begin{aligned} \chi(G_{a(c)}) &= \chi^P(M_c, D_c, v_c, \psi) + (k_a^Z)^2 \chi^P(M_c, D_c, \psi, 0) + 2P_{cb}[M^P(M_c, D_c, v_c, \psi) - \psi] - \psi^2 = \\ &= \chi^P(-50, 900, -100, -84,7) + 0,41^2 \cdot \chi^P(-50, 900, -84,7, 0) + 2 \cdot 50 \cdot [M^P(-50, 900, -100, -84,7) + 84,7] - 84,7^2 = \\ &= 7401 + 0,41^2 \cdot 3028 + 2 \cdot 50 \cdot (-85,94 + 84,7) - 84,7^2 = 612 \text{ МВт}^2. \end{aligned}$$

Аналогично вычисляются (табл. 6.2) остальные величины, характеризующие как генерацию, так и нагрузку.

Таблица 6.2

Математическое ожидание				Второй начальный момент				Дисперсия			
генерация		нагрузка		генерация		нагрузка		генерация		нагрузка	
A(C)	B(C)	A(C)	B(C)	A(C)	B(C)	A(C)	B(C)	A(C)	B(C)	A(C)	B(C)
-21,24	-28,8	0,35	0,24	612	1056	4,61	2,24	161	227	4,48	2,18

В силу поинтервальной аддитивности МО и ВНМ нетрудно вычислить МО и ВНМ небаланса мощности инъекций (табл. 6.3).

Таблица 6.3

Математическое ожидание НМ		Второй начальный момент НМ		Дисперсия НМ	
$A(C)$	$B(C)$	$A(C)$	$B(C)$	$A(C)$	$B(C)$
-20,89	-28,56	616,61	1058,24	180,2	242,6

Следует обратить внимание, что дисперсия НМ или его составляющих ЭЭС  $C$  не равна сумме дисперсий инъекций. Так, для генерации

$$DG_c = D^p(M_c, D_c, -\Pi_{ca} - \Pi_{cb}, 0) = D^p(-50, 900, -100, 0) = 754,5 > DG_{a(c)} + DG_{b(c)} = 388.$$

Это объясняется эффектом коэффициента пропорциональности, который в дисперсии учитывается квадратом. Кроме того, инъекции являются коррелированными случайными величинами. При этом дисперсия суммы

$$DG_c = DG_{a(c)} + DG_{b(c)} + 2Cov(G_{a(c)}, G_{b(c)}).$$

Можно предположить, что ошибка от распределения дисперсии пропорционально квадратам коэффициентов распределения МО будет относительно невелика. В рассматриваемом примере погрешность расчетов при таком подходе составляет 19% для дисперсии инъекции в узле  $A$  и 11% - в узле  $B$ . В то же время, погрешность суммы составляет всего 0,3% (табл. 6.4).

Таблица 6.4

	M	D	k	$k^2$	$827 \cdot k^2$	$\Delta D, \%$
$A(C)$	-21	180,2	0,42	0,18	145,9	-19
$B(C)$	-29	242,6	0,58	0,34	269,8	11
Сумма	-50	422,8	1	0,52	415,7	-0,3%

Как правило, дисперсия инъекции существенно меньше дисперсии основного узлового НМ. Отсюда можно было бы рекомендовать рассматриваемый подход для практических расчетов, но расчеты на ЭВМ по формулам (6.5)-(6.13) занимают не намного больше времени при их большей точности.

Корреляционный момент инъекций НМ вычисляется исходя из соотношения

$$2Cov(N_{a(c)}, N_{b(c)}) = DN_c - DN_{a(c)} - DN_{b(c)}.$$

В рассматриваемом примере

$$Cov(N_{a(c)}, N_{b(c)}) = (827 - 422,8) / 2 = 201,2.$$

При этом коэффициент корреляции инъекций близок к единице.

$$\rho = \frac{\text{Cov}(N_{a(c)}, N_{b(c)})}{\sigma_{a(c)}\sigma_{b(c)}} = \frac{201,2}{\sqrt{180,2 \cdot 242,6}} = 0,96.$$

Отличие от единицы объясняется ограничительным действием ПС меж-системных связей.

### 6.1.3 Принцип выравнивания

Одной из возможных стратегий взаимопомощи является принцип выравнивания небалансов мощности. При генерирующем характере НМ исключаемой ЭЭС в первую очередь генерация передается той ЭЭС, где больше нагрузка, до выравнивания нагрузок (НМ) смежных ЭЭС, а в дальнейшем генерация распределяется поровну. Аналогично распределяется нагрузка.

Пусть  $\eta$  - индекс ЭЭС, где нагрузка максимальна, а  $\nu$  - индекс второй смежной ЭЭС:

$$L_{\eta} = \max(L_A, L_B). \quad (6.14)$$

Тогда

$$G_{\eta(c)} = \begin{cases} G_c, & |G_c| \leq L_{\eta} - L_{\nu}; \\ \frac{1}{2}(G_c - L_{\eta} + L_{\nu}), & |G_c| > L_{\eta} - L_{\nu}. \end{cases} \quad (6.15)$$

Полученная величина должна быть ограничена пропускной способностью связи  $C$ - $\eta$ :  $G_{\eta(c)}^* = \min\{G_{\eta(c)}, \Pi_{c\eta}\}$ .

Инъекция во второй смежный узел определяется разностью

$$G_{\nu(c)} = G_c - G_{\eta(c)}^* \quad (6.16)$$

Варьируя нагрузки в узлах  $A$ ,  $B$  и используя выражения (6.14)-(6.16), получаем вероятностную совокупность  $\{G_{a(c),j,k}^*, G_{b(c),j,k}^*, p_j p_k\}$ , а следовательно, и результирующую реализацию инъекций в этих узлах, соответствующую элементу ВР  $\{G_{ci}, p_i\}$ :

$$G_{a(c),i} = \frac{1}{P_{La}P_{Lb}} \sum_j \sum_k G_{a(c),j,k} p_{aj} p_{bk}, \quad G_{b(c),i} = G_{c,i} - G_{a(c),i},$$



где  $P_{La} = \sum_j p_{aj}$ ;  $P_{Lb} = \sum_k p_{bk}$  - суммарные вероятности нагрузочного состояния соответствующих узлов.

Аналогичным образом могут быть распределены нагрузки.

**Пример 6.3** Выполнить по принципу выравнивания нагрузки распределение НМ ЭЭС С, связанной с ЭЭС А и В МСС с ПС=50МВт. НМ всех ЭЭС описываются нормальными распределениями с параметрами:

ЭЭС	А	В	С
М	40	80	-50
$\sigma$	30	20	30

**Решение.** Для сокращения объема демонстрационных данных диапазоны изменения НМ ЭЭС разбиваются на четыре интервала шириной  $\sigma$ . Сочетания НМ и соответствующие инъекции в ЭЭС А для НМ ЭЭС С  $N_c=-80$  МВт представлены в табл. 6.5.

Рассмотрим, например сочетание  $N_a=70$ ,  $N_b=40$  МВт. В первую очередь загружается ЭЭС А на  $70-40=30$  МВт. Оставшиеся  $80-30=50$  МВт распределяются между ЭЭС А и В поровну. Таким образом, инъекция генерации в ЭЭС А должна быть  $30+25=55$  МВт, но из-за ограничения по ПС она принимается равной 50 МВт, что и отражено в таблице. Вероятность этого сочетания НМ составляет  $p=0,242 \cdot 0,067=0,016$ .

Таблица 6.5

Инъекция мощности в ЭЭС А						Вероятности сочетаний НМ						
						$N_b$	40	60	80	100	120	$p_a/p_b$
$N_a$	$N_b$	40	60	80	100	120	$p_a/p_b$	0,067	0,242	0,399	0,242	0,067
	-20	-30	-30	-30	-30	-30	0,067	0,004	0,016	0,027	0,016	0,004
	10	-30	-30	-30	-30	-30	0,242	0,016	0,059	0,097	0,059	0,016
	40	-40	-30	-30	-30	-30	0,399	0,027	0,097	0,159	0,097	0,027
	70	-50	-45	-35	-30	-30	0,242	0,016	0,059	0,097	0,059	0,016
100	-50	-50	-50	-40	-30	0,067	0,004	0,016	0,027	0,016	0,004	

В комбинации  $N_a=40$ ,  $N_b=80$  МВт в первую очередь загружается узел В, инъекция генерации в который  $N_{b(c)} = (80-40) + (80-(80-40))/2=60$  МВт. Из-за ограничения по ПС она принимается равной 50 МВт. Отсюда на долю ЭЭС А приходится 30 МВт, что и отражено в таблице.

Сумма произведений левой и правой частей таблицы дает среднюю инъекцию генерации  $(-34,06)$  МВт, соответствующую  $N_c = -80$  МВт. В табл. 6.6 кроме данного значения приведены остальные инъекции в узлы  $A$  и  $B$ , соответствующие ВР НМ ЭЭС  $C$ . Имея ВР, нетрудно получить МО и дисперсии инъекций  $M(N_{a(c)}) = -15,3$  МВт,  $M(N_{b(c)}) = -34,73$  МВт,  $D(N_{a(c)}) = 140,2$  МВт<sup>2</sup>,  $D(N_{b(c)}) = 124,0$  МВт<sup>2</sup>

Таблица 6.6

$N_c$	-80,00	-65,00	-50,00	-35,00	-20,00
$p$	0,227	0,175	0,197	0,175	0,227
$N_{a(c)}$	-34,06	-21,70	-10,35	-6,20	-3,06
$N_{b(c)}$	-45,94	-43,30	-39,65	-28,80	-16,94

#### 6.1.4 Пропускная способность эквивалентной связи

Неполная загрузка межсистемных связей позволяет осуществить дополнительный транзит мощности. Это реализуется через пропускную способность эквивалентной связи, имеющую вероятностный характер в силу вероятностного характера определяющих ее величин. Одним из возможных подходов здесь является формирование ПС «по остаточному принципу»

Транзит мощности в направлении  $AB$  не должен превышать ПС связи  $AB$ , уменьшенной на  $N_{A(C)}$ , и ПС связи  $CB$ , увеличенной на  $N_{B(C)}$ , (НМ может принимать как положительные (при нагрузке), так и отрицательные (при генерации значения). Отсюда

$$P_{AB} = \min\{P_{AC} - N_{A(C)}, P_{CB} + N_{B(C)}\}. \quad (6.17)$$

По аналогии в направлении  $BA$

$$P_{BA} = \min\{P_{BC} - N_{B(C)}, P_{CA} + N_{A(C)}\}. \quad (6.18)$$

Следует обратить внимание, что при нагрузочном характере  $N_c$  определяющим для потока мощности  $P_{ab}$ , как правило, является насыщение связи  $AB$ , в то время как при генерирующем характере – связи  $CB$ . Действительно, нагрузка ЭЭС  $C$  создает потоки мощности в направлениях от  $A$  к  $C$  и от  $B$  к  $C$ . Эквивалентный поток мощности от  $A$  к  $B$  дополнительно загружает (и насыщает) связь

$AB$  и разгружает связь  $CB$ . Однако это положение соблюдается не всегда. При большой  $P_{ac}$  и малых  $P_{cb}, N_c$  первой насыщается связь  $CB$ .

Вероятностный ряд ПС эквивалентной связи строится в процессе расчета ВР инъекций при варьировании небаланса мощности исключаемой ЭЭС  $C$ . Поскольку как при нагрузочном, так и при генерирующем характере  $N_c$  возможен транзит мощности в обоих направлениях, получаемый ВР будет неупорядоченным. Алгоритмически процедура анализа  $N_c$  делится на две части: генерация и нагрузка.

Отсюда для ПС формируются четыре ВР в зависимости от направления ПС:  $\{P_{ab,i}, p_i\}$  (генерация),  $\{P_{ab,j}, p_j\}$  (нагрузка) в направлении  $AB$  и  $\{P_{ba,i}, p_i\}$  (генерация),  $\{P_{ba,j}, p_j\}$  (нагрузка) в обратном направлении. Результирующий ВР определяется простым объединением ВР соответствующих направлений с последующим упорядочиванием по шкале ПС.

Пусть для определенности при нагрузочном характере  $N_c$  первой насыщается связь  $AB$ , а при генерирующем характере – связь  $CB$ . Тогда отдельные реализации ВР

$$P_{ab,i} = \begin{cases} P_{cb} - k_b^2 G_i, & k_b^2 G_i \leq P_{cb}; \\ 0; & k_b^2 G_i > P_{cb}; \end{cases} \quad P_{ba,i} = \begin{cases} P_{ca} - k_a^2 G_i, & k_b^2 G_i \leq P_{cb}; \\ P_{ca} + P_{cb} - G_i; & k_b^2 G_i > P_{cb}; \end{cases}$$

$$P_{ab,j} = \begin{cases} P_{ac} - k_a^H L_j, & k_a^H L_j \leq P_{ac}; \\ 0; & k_a^H L_j > P_{ac}; \end{cases} \quad P_{ba,j} = \begin{cases} P_{bc} - k_b^H L_j, & k_a^H L_j \leq P_{ac}; \\ P_{bc} + P_{ac} - L_j; & k_a^H L_j > P_{ac}. \end{cases}$$

Вероятностные характеристики ПС эквивалентной связи для рассматриваемого примера, где  $N_c$  распределяется пропорционально спросу и предложению, приведены на рис. 6.5. На рисунке сплошная линия соответствует  $P_{ab}$ , а точечная -  $P_{ba}$ . Кроме того, здесь изъяты относительно большие дискретные вероятности состояния ПС=0. Следует обратить внимание на то, что в области больших ПС одному и тому же значению ПС соответствуют две вероятности. Это объясняется тем, что ограничения могут быть при распределении как нагрузки, так и генерации.

Полученные в рассматриваемом примере на базе ВР математические ожидания  $\bar{P}_{ab} = 20,9$  МВт,  $\bar{P}_{ba} = 28,6$  МВт и дисперсии  $DP_{ab} = 211$  МВт<sup>2</sup>,  $DP_{ba} = 151$  МВт<sup>2</sup>

Отмеченные ситуации насыщения связей (нагрузка, генерация, связи AC, CB, BC, CA) позволяют предположить, что лишь одна из них является определяющей, и МО ПС эквивалентной связи может быть выражено через МО соответствующей доли  $N_c$ :

$$\bar{P}_{ab} = \min \{P_{ac} - \bar{L}_{a(c)}, P_{cb} + \bar{L}_{b(c)}, P_{ac} - \bar{G}_{a(c)}, P_{cb} + \bar{G}_{b(c)}\} = \min \{P_{ac} - \bar{L}_{a(c)}, P_{cb} + \bar{G}_{b(c)}\}; \quad (6.19)$$

$$\bar{P}_{ba} = \min \{P_{bc} - \bar{L}_{b(c)}, P_{ca} + \bar{L}_{a(c)}, P_{bc} - \bar{G}_{b(c)}, P_{ca} + \bar{G}_{a(c)}\} = \min \{P_{bc} - \bar{L}_{b(c)}, P_{ca} + \bar{G}_{a(c)}\}, \quad (6.20)$$

где МО нагрузки положительно, а МО генерации отрицательно. Здесь снова утверждается, что определяющей для  $\bar{P}_{ab}$  при нагрузочном характере  $N_c$  является  $P_{ac}$ , а при генерирующем -  $P_{cb}$ .

В рассмотренном примере (пример 6.2, табл. 6.2)

$$\bar{P}_{ab} = \min \{50 - 0,35; 50 + (-28,8)\} = 21,2 \text{ МВт};$$

$$\bar{P}_{ba} = \min \{50 - 0,24; 50 + (-21,24)\} = 28,76 \text{ МВт},$$

что практически совпадает с величинами ( $\bar{P}_{ab} = 20,9$ ,  $\bar{P}_{ba} = 28,6$ ) МВт, полученными ранее на базе ВР

Дисперсии, соответствующие определяющим ситуациям  $DP_{ab} = 227$  МВт<sup>2</sup>,  $DP_{ba} = 161$  МВт<sup>2</sup> (табл. 6.2) также близки аналогичным величинам, полученным на базе ВР ( $DP_{ab} = 211$  МВт<sup>2</sup>,  $DP_{ba} = 151$  МВт<sup>2</sup>).

Однако нельзя утверждать, что совпадение результатов справедливо при всех сочетаниях НМ и ПС, поскольку результирующий для ПС вероятностный ряд является комбинацией ВР всех ситуаций насыщения. В то же время в экспресс-расчетах рекомендуется использовать соотношения (6.19), (6.20).

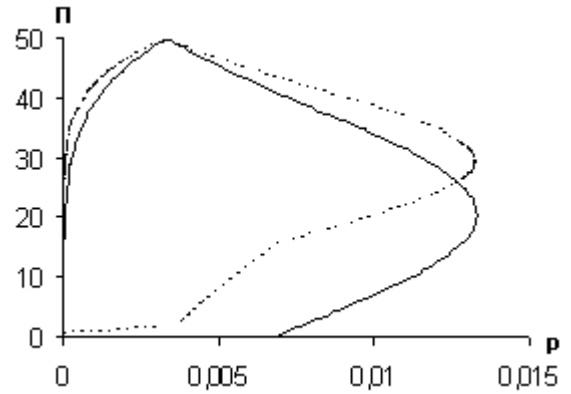


Рис. 6.5. Вероятностная характеристика ПС

**В модели «электрического» эквивалентирования** как при нагрузочном, так и генерирующем характере НМ ЭЭС  $C$  коэффициенты пропорциональности неизменны во всем диапазоне изменения нагрузки или генерации  $N_c$ . Это упрощает логику учета очередности насыщения.

$$\begin{aligned} \bar{P}_{ab} &= \min\{P_{ac} - k_a^H \bar{L}_c, P_{cb} + k_b^E \bar{G}_c\} = \\ &= \min\left\{P_{ac} \left(1 - \frac{\bar{L}_c}{P_{ac} + P_{bc}}\right), P_{cb} \left(1 + \frac{\bar{G}_c}{P_{cb} + P_{cb}}\right)\right\} = \min\{k^H P_{ac}, k^E P_{cb}\}; \end{aligned} \quad (6.21)$$

$$\bar{P}_{ba} = \min\{k^H P_{bc}, k^E P_{ca}\}, \quad (6.22)$$

где  $k^H = 1 - \frac{\bar{L}_c}{P_{ac} + P_{bc}}$ ,  $k^E = 1 + \frac{\bar{G}_c}{P_{cb} + P_{cb}}$  - коэффициенты насыщения смежных связей по нагрузке и генерации.

### 6.1.5 Суммарное воздействие

Как было отмечено выше, исключение узлов ранга два и выше выполняется с целью приведения расчетной схемы к радиальному виду. Для дальнейшего преобразования схемы необходимо получить результирующие потоки НМ как слева направо, так и справа налево. Полученные инъекции и ПС эквивалентной связи взаимодействуют в процессе определения их суммарного воздействия. При этом необходимо учитывать корреляционную зависимость между рассматриваемыми случайными величинами.

Вероятностные ряды суммарного воздействия строятся исходя из трех независимых групп  $\{p_i, N_{a(c)i}, N_{b(c)i}, P_{abi}, P_{bai}\}$ ,  $\{p_j, N_{aj}\}$ ,  $\{p_k, N_{bk}\}$ . При воздействии на ЭЭС  $B$  рассматриваются первые две группы, а при воздействии на ЭЭС  $A$  – первая и третья группы. Так, при реализации  $\{i, j\}$  вероятность  $p_{ij} = p_i p_j$ , а результирующее воздействие определяется согласно структурной формуле

$$N_{b(a,c),ij} = N_{b(c),i} + (N_{a,j} + N_{a(c),i}) \frac{P_{ab,i}}{P_{ba,i}}. \quad (6.23)$$

В табл. 6.7 в качестве примера приведен расчет суммарного воздействия рассматриваемых в приведенных выше примерах ЭЭС  $A$  и  $C$  на ЭЭС  $B$  при пропорциональном распределении инъекций ( $k_b^E = k_a^H = 0,59$ ;  $k_b^H = k_a^E = 0,41$ ). ЭЭС  $A$  и  $C$

представлены ВР нормального распределения  $M_a=40$  МВт,  $M_c=-50$  МВт,  $\sigma_a = \sigma_c = 30$  МВт. Ряд  $p_c$  является общим для представленных справа  $N_c$ ,  $B_{(c)}$ ,  $A_{(c)}$ ,  $\Pi_{\text{вa}}$ ,  $\Pi_{\text{ав}}$ . Результирующий ВР суммарного воздействия вычислен согласно (6.23) и подвергнут процедуре сжатия.

Таблица 6.7

A		C		$B_{(c)}$	$A_{(c)}$	$\Pi_{\text{вa}}$	$\Pi_{\text{ав}}$	$B_{(ac)}$	
$N_a$	$p_a$	$P_c$	$N_c$					$N$	$p$
-20	0,02	<b>0,05</b>	-100	-50	-50,0	0,0	0	-50	0,157
-10	0,03	<b>0,04</b>	-90	-50	-40,0	10,0	0	-40	0,072
0	0,04	<b>0,07</b>	-80	-47,2	-32,8	17,2	2,8	-30	0,090
10	0,07	<b>0,09</b>	-70	-41,3	-28,7	21,3	8,7	-20	0,104
20	0,09	<b>0,12</b>	-60	-35,4	-24,6	25,4	14,6	-10	0,113
30	0,12	<b>0,13</b>	-50	-29,5	-20,5	29,5	20,5	0	0,112
40	0,13	<b>0,13</b>	-40	-23,6	-16,4	33,6	26,4	10	0,102
50	0,13	<b>0,12</b>	-30	-17,7	-12,3	37,7	32,3	20	0,085
60	0,12	<b>0,09</b>	-20	-11,8	-8,2	41,8	38,2	30	0,065
70	0,09	<b>0,07</b>	-10	-5,9	-4,1	45,9	44,1	40	0,044
80	0,07	<b>0,04</b>	0	0	0,0	50,0	50	50	0,055
90	0,04	<b>0,03</b>	10	4,1	5,9	45,9	44,1		
100	0,03	<b>0,02</b>	20	8,2	11,8	41,8	38,2		

Распределение суммарного воздействия по форме напоминает редуцированное пределами  $\pm 50$  МВт нормальное распределение (рис. 6.6). Математическое ожидание воздействия  $M(B_{(a,c)}) = -7,48$  МВт; дисперсия  $D(B_{(a,c)}) = 897$  МВт<sup>2</sup>. Аналогичным образом вычисляются  $M(A_{(a,c)}) = 4,31$ ; дисперсия  $D(A_{(a,c)}) = 760$  МВт<sup>2</sup>.

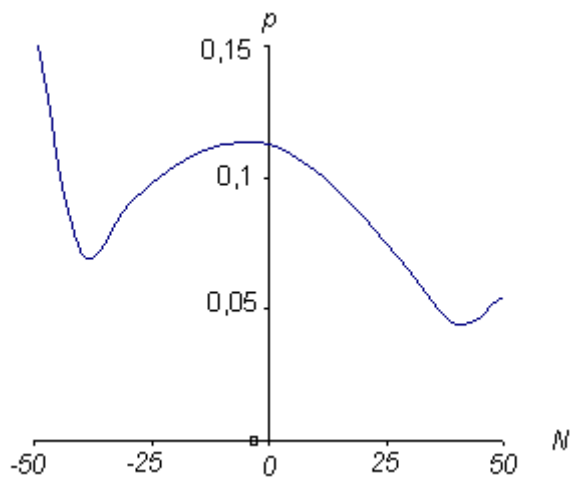


Рис. 6.6. Распределение суммарного воздействия

Возникает вопрос, насколько велика погрешность при расчете МО и дисперсий суммарных воздействий при использовании аппарата редуцированных распределений? Рассматриваемые величины могут быть получены на базе структурной формулы (6.23), которая преобразуется к виду

$$B_{(a,c)} = B_{(c)} + (A + A_{(c)})_{\Pi_{ba}}^{\Pi_{ab}}, \quad A_{(b,c)} = A_{(c)} + (B + B_{(c)})_{\Pi_{ab}}^{\Pi_{ba}}.$$

Применительно к МО и дисперсиям данные структуры представляются расчетными выражениями

$$MB_{(a,c)} = MB_{(c)} + M^P (A + A_{(c)})_{\Pi_{ba}}^{\Pi_{ab}};$$

$$MA_{(b,c)} = MA_{(c)} + M^P (B + B_{(c)})_{\Pi_{ab}}^{\Pi_{ba}};$$

$$DB_{(a,c)} = DB_{(c)} + D^P (A + A_{(c)})_{\Pi_{ba}}^{\Pi_{ab}} + 2 \operatorname{cov}(A_{(c)}, B_{(c)});$$

$$D(A_{(b,c)}) = D(A_{(c)}) + D^P (B + B_{(c)})_{\Pi_{ab}}^{\Pi_{ba}} + 2 \operatorname{cov}(A_{(c)}, B_{(c)}).$$

В (6.23) ПС эквивалентной связи представлена ВР. Отсюда возможны два направления анализа: ПС в виде ВР и ПС в виде обобщенного параметра, например в виде МО. В том и другом случаях в расчетных выражениях для дисперсии участвуют корреляционные моменты.

Покажем расчет результирующего воздействия ЭЭС  $A$  и  $C$  на ЭЭС  $B$  (для сопоставления в скобках показаны величины, полученные методом ВР с шагом дискретности по мощности 10 МВт).

#### ***ЭЭС $C$ и инъекции: Математические ожидания***

$$MN_c = M^P (M_c, D_c, -100, 100) = M^P (-50, 900, -100, 100) = -49,4 \text{ (ВР: } -49,6) \text{ МВт};$$

$$DN_c = D^P (M_c, D_c, -100, 100) = D^P (-50, 900, -100, 100) = 827 \text{ (ВР: } 795);$$

$$MG_c = M^P (M_c, D_c, -100, 0) = M^P (-50, 900, -100, 0) = -50 \text{ МВт};$$

$$ML_c = M^P (M_c, D_c, 0, 100) = M^P (-50, 900, 0, 100) = 0,59 \text{ МВт};$$

$$MN_{a(c)} = k_a^g MG_c + k_a^h ML_c = 0,41 \cdot (-50) + 0,59 \cdot 0,59 = -20,15 \text{ МВт};$$

$$MN_{b(c)} = k_b^g MG_c + k_b^h ML_c = 0,59 \cdot (-50) + 0,41 \cdot 0,59 = -29,26 \text{ МВт}.$$

#### ***Дисперсия и вторые начальные моменты***

$$DN_c = D^P (M_c, D_c, -100, 100) = D^P (-50, 900, -100, 100) = 827 \text{ МВт}^2;$$

$$\chi G_c = \chi^P (M_c, D_c, -100, 0) = \chi^P (-50, 900, -100, 0) = 3255 \text{ МВт}^2;$$

$$\chi L_c = \chi^P (M_c, D_c, 0, 100) = \chi^P (-50, 900, 0, 100) = 13,3 \text{ МВт}^2;$$

$$\chi N_{a(c)} = (k_a^c)^2 \chi G_c + (k_a^H)^2 \chi L_c = 0,41^2 \cdot 3255 + 0,59^2 \cdot 13,3 = 552 \text{ МВт}^2;$$

$$\chi N_{b(c)} = (k_b^c)^2 \chi G_c + (k_b^H)^2 \chi L_c = 0,59^2 \cdot 3255 + 0,41^2 \cdot 13,3 = 1135 \text{ МВт}^2.$$

Дисперсии инъекций

$$DN_{a(c)} = \chi N_{a(c)} - (MN_{a(c)})^2 = 552 - (-20,15)^2 = 146 \text{ МВт}^2;$$

$$DN_{b(c)} = \chi N_{b(c)} - (MN_{b(c)})^2 = 1135 - (-29,26)^2 = 279 \text{ МВт}^2.$$

Корреляционный момент

$$\text{cov}(N_{a(c)}, N_{b(c)}) = (DN_c - DN_{a(c)} - DN_{b(c)}) / 2 = (827 - 146 - 279) / 2 = 201 \text{ МВт}^2.$$

Полученные параметры инъекций с достаточной степенью точности удовлетворительны для экспресс-расчетов. В более точных расчетах следует редуцировать ту инъекцию, которая ближе к ПС. В рассматриваемом примере это  $B(C)$ . Другая инъекция является дополнением первой до НМ  $N_C$ :

$$MN_{b(c)}^P = M^P(MN_{b(c)}, DN_{b(c)}, -ПС, ПС) = M^P(-29,26; 279, -50,50) = -28,4 \text{ (ВР: 28,7) МВт};$$

$$DN_{b(c)}^P = D^P(MN_{b(c)}, DN_{b(c)}, -ПС, ПС) = D^P(-29,26; 279, -50,50) = 231 \text{ (ВР: 238) МВт}^2;$$

$$MN_{a(c)}^P = MN_c^P - MN_{b(c)}^P = -49,4 + 28,4 = -21 \text{ (ВР: -21) МВт}.$$

Если принять допущение о неизменности корреляционного момента, то

$$DN_{a(c)}^P = DN_c^P - DN_{b(c)}^P - 2 \text{cov}(A(C), B(C)) = 827 - 231 - 2 \cdot 201 = 194 \text{ (ВР: 170) МВт}^2.$$

Считаем, что изменение корреляционного момента при последующем редуцировании незначительно и им можно пренебречь

**Математическое ожидание ПС эквивалентной связи**

$$\bar{\Pi}_{ab} = 50 - 28,4 = 21,6 \text{ (ВР: 23,3) МВт}; \quad \bar{\Pi}_{ba} = 50 - 21 = 29 \text{ (ВР: 30,5) МВт}.$$

**Параметры редуцированного распределения ЭЭС А**

$$MN_a^P = M^P(MN_a, DN_a, -100, 100) = M^P(40,900, -100, 100) = 39,75 \text{ МВт};$$

$$DN_a^P = D^P(MN_a, DN_a, -100, 100) = D^P(40,900, -100, 100) = 864 \text{ МВт}^2.$$

**Суммарные параметры ЭЭС А с инъекцией**

$$MN_a^\Sigma = MN_a^P + MN_{a(c)} = 39,75 - 21 = 18,75 \text{ (ВР: 19) МВт};$$



$$DN_a^\Sigma = DN_a^P + DN_{a(c)} = 864 + 194 = 1058 \text{ (BP: 1001)}.$$

### ***Редукция суммарного воздействия со стороны ЭЭС А***

$$MN_{ac} = M^P(MN_a^\Sigma, DN_a^\Sigma, -21,6; 29) = M^P(18,75; 1058; -21,6; 29) = 11,9 \text{ (BP: 15) МВт};$$

$$DN_{ac} = D^P(MN_a^\Sigma, DN_a^\Sigma, -21,6; 29) = D^P(18,75; 1058; -21,6; 29) = 345 \text{ (BP: 370) МВт}^2.$$

На данном этапе отличие в МО стало существенным. Это объясняется коррелированностью ВР ПС и ВР инъекций. При представлении вероятностным рядом только ПС эквивалентной связи с последующим усреднением редуцированных МО и дисперсий  $MN_{ac} = 12,1$  МВт,  $DN_{ac} = 380$  МВт<sup>2</sup>, что практически не отличимо от значений параметров, полученных по средней ПС.

### ***Результирующее воздействие***

$$MN_{ac} + MN_{b(c)} = 11,9 - 29,26 = -17,36 \text{ (BP: -13,6) МВт};$$

$$DN_{ac} + DN_{b(c)} + \text{cov}(N_{a(c)}, N_{b(c)}) = 345 + 231 + 2 \cdot 201 = 978 \text{ (BP: 872) МВт}^2.$$

На основании некоторого отличия результирующих параметров не следует делать поспешных выводов об относительно небольшой точности аппарата редуцированных функций. Расчеты реальных схем, где ПС межсистемных связей и инъекции НМ значительно меньше мощности нагрузки ЭЭС, показывают, что погрешности отдельных этапов нивелируются при последующем суммировании случайных небалансов мощности.

## **6.1.6 Критерий равенства баланса спроса и предложений**

Одним из возможных подходов в задаче исключения узлов второго ранга является развитие идеи цепочечных схем, где суммарное воздействие радиальной структуры реализуется через последовательное объединение ЭЭС. Состоящую из ЭЭС А-С-В последовательную структуру можно рассматривать как часть цепочечной схемы. В результате по критерию равенства баланса спроса и предложений относительно ЭЭС А и В в исходной и результирующей схемах может быть сформирована система уравнений для МО и дисперсий.

В цепочечной схеме  $A-C-B$  при воздействии на ЭЭС  $B$  небаланс мощности ЭЭС  $A$  редуцируется ПС связи  $AC$ . При совместном воздействии ЭЭС  $A$  и  $C$  на ЭЭС  $B$  их НМ суммируются (свертка редуцированной и нередуцированной ФР). Суммарный НМ редуцируется ПС связи  $CB$ . Аналогичная схема имеет место для совместного воздействия ЭЭС  $B$  и  $C$  на ЭЭС  $A$ .

Возможны различные модификации рассматриваемой модели в зависимости от учета тех или иных факторов. В частности, инъекции могут быть заданными или определяемыми, коррелированными или некоррелированными; ПС эквивалентной связи является детерминированной или случайной величиной и др.

В эквивалентной схеме система  $C$  участвует через инъекции  $N_{A\odot}$ ,  $N_{B\odot}$ . В этом случае суммарное воздействие ЭЭС  $A$  и  $C$  на ЭЭС  $B$  проявляется через сумму инъекции  $N_{B\odot}$  с редуцированным ПС эквивалентной связи  $AB$  небалансом мощности  $N_A + N_{A\odot}$ .

В символьной форме условия равенства балансного эффекта при детерминированной ПС эквивалентной связи  $AB$  имеют вид

$$\begin{aligned} (A_{-ac}^{ca} + C_{-(ca+cb)}^{ac+bc})_{-cb}^{bc} &= (A + A(C))_{-ab}^{ba} + B(C); \\ (B_{-bc}^{cb} + C_{-(ca+cb)}^{ac+bc})_{-ca}^{ac} &= (B + B(C))_{-ba}^{ab} + A(C), \end{aligned} \quad (6.24)$$

где обозначение, например,  $A_{-ac}^{ca}$  означает процедуру редуцирования относительно МО и дисперсий. Суммирование выполняется на уровне МО и дисперсий.

Условия (6.24) определяют четыре нелинейных уравнения при семи неизвестных ( $M_{A\odot}$ ,  $D_{A\odot}$ ,  $M_{B\odot}$ ,  $D_{B\odot}$ ,  $\rho$ ,  $\Pi_{ab}$ ,  $\Pi_{ba}$ ), где  $\rho$  - коэффициент корреляции инъекций. Дополнительным условием может стать равенство МО суммы эквивалентных инъекций НМ в узлы  $A$  и  $B$  редуцированному НМ узла  $C$ :

$$M_C^p = M_{A(C)} + M_{B(C)}. \quad (6.25)$$

Решение задачи может быть найдено, например, методами нелинейного программирования, минимизацией функции невязок. Проверочные расчеты показывают плохую сходимость итерационного процесса. При этом часто нулевое решение не может быть получено. Это объясняется противоречивостью условий

(6.24). Действительно, с учетом (6.25) условия (6.24) в обобщенной структуре могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} (A_{-ac}^{ca} + C_{-(ca+cb)}^{ac+bc})_{-cb}^{bc} &= (A + C_{-(ca+cb)}^{ac+bc} - B(C))_{-ab}^{ba} + B(C); \\ (B_{-bc}^{cb} + C_{-(ca+cb)}^{ac+bc})_{-ca}^{ac} &= (B + C_{-(ca+cb)}^{ac+bc} - A(C))_{-ba}^{ab} + A(C), \end{aligned} \quad (6.26)$$

т.е. первое уравнение зависит в основном от  $B(C)$ , а второе – от  $A(C)$  и уравнения слабо связаны.

При относительно больших ПС операцию редуцирования можно опустить, и тогда происходит уничтожение искомым переменных. Кроме того, в случае симметрии схемы (равенство параметров ЭЭС  $A$  и  $B$  и равенство ПС в разных направлениях) левые части (6.26) одинаковы. Одинаковыми будут и решения  $B(C) = A(C)$ , но это не означает, что в сумме их МО будут равны МО редуцированного НМ ЭЭС  $C$ . Все это говорит о плохой обусловленности уравнений (6.24).

Одним из путей преодоления отмеченных затруднений является сокращение числа искомым переменных. Это можно сделать путем итерационной процедуры с разделением переменных на две слабо влияющие друг на друга группы. В первую входят математические ожидания и ПС связей, а во вторую – дисперсии. При заданных дисперсиях определяются МО и ПС связей, а затем при вычисленных значениях МО и ПС определяются дисперсии. Далее цикл повторяется.

Задача поиска эквивалентных параметров представляется в следующем виде. Минимизируется функция суммы квадратов невязок  $\min\{\Phi = F_1^2 + F_2^2\}$ . На первом шаге искомыми переменными являются  $M_{a(c)}$ ,  $P_{ab}$ ,  $P_{ba}$ . МО  $M_{b(c)}$  вычисляется по (6.25). Составляющие  $F_1$ ,  $F_2$  имеют следующий структурный вид:

$$\begin{aligned} F_1 &= M(A_{-ac}^{ca} + C_{-(ca+cb)}^{ac+bc})_{-cb}^{bc} - M(A + A(C))_{-ab}^{ba} - M_{b(c)}; \\ F_2 &= M(B_{-bc}^{cb} + C_{-(ca+cb)}^{ac+bc})_{-ca}^{ac} - M(B + C_{-(ca+cb)}^{ac+bc} - A(C))_{-ba}^{ab} - M_{a(c)}. \end{aligned}$$

На втором шаге определяются переменные  $D_{a(c)}$ ,  $D_{b(c)}$ ,  $\rho$ . При этом

$$F_1 = D(A_{-ac}^{ca} + C_{-(ca+cb)}^{ac+bc})_{-cb}^{bc} - D(A + A(C))_{-ab}^{ba} - D_{b(c)} - 2\rho\sigma_{a(c)}\sigma_{b(c)};$$

$$F_2 = D(B_{-bc}^{cb} + C_{-(ca+cb)}^{ac+bc})_{-ca}^{ac} - D(B + B(C))_{-ba}^{ab} - D_{a(c)} - 2\rho\sigma_{a(c)}\sigma_{b(c)}.$$

Для иллюстрации рассматриваемой стратегии эквивалентирования приведем решение уже многократно обсуждаемого примера трех ЭЭС с исходными данными, частично представленными в табл. 6.8. ПС связей  $\Pi_{ac}=\Pi_{ca}=\Pi_{bc}=\Pi_{cb}=50$  МВт. Начальный коэффициент корреляции  $\rho=0,9$ . В таблице дополнительно приведены исходные параметры инъекций  $A(C)$ ,  $B(C)$  ( $M_{b(c)}=M_c^p - M_{a(c)}$ ), а также ряд промежуточных данных, описывающих редуцированные распределения и необходимых для вычисления ожидаемого спроса НМ в исходной схеме. Исходные значения параметров  $A(C)$ ,  $B(C)$  выбраны произвольно.

В табл. 6.9 приведены данные для вычисления ожидаемого спроса НМ в эквивалентной схеме и значения невязок МО, которые при заданных параметрах инъекций равны  $F1=-14,06-(-19,55)=5,49$ ,  $F2=-1,73-0,81=-2,54$  (в качестве начальных значений было принято  $\Pi_{ca}=\Pi_{ac}=25$  МВт).

Таблица 6.8

ЭЭС	$A$	$B$	$C$	$A(c)$	$B(c)$	$A_p$	$B_p$	$C_p$	$A_p+C_p$	$(A_p+C_p)_p$	$B_p+C_p$	$(B_p+C_p)_p$
М	40	80	-50	-20	-30	32,4	47,5	-49,4	-17,0	-14,06	-1,9	-1,73
Д	900	900	900	200	200	431	61,5	827	1258	852	888	747

Таблица 6.9

	$A+A(c)$	$(A+A(c))_p$	$(A+A(c))_p + B(c)$	$F1$	$B+B(c)$	$(B+B(c))_p$	$(B+B(c))_p + A(c)$	$F2$
М	20	10,45	-19,55	5,49	50	20,8	0,81	-2,54
Д	1100	314,1	874,1	0	1100	106	666	0

В результате минимизации (Excel, поиск решения, 9 итераций методом Ньютона) функционала  $\Phi = F_1^2 + F_2^2$  по параметрам  $M_{a(c)}$ ,  $\Pi_{ac}$ ,  $\Pi_{ca}$  были получены новые значения МО инъекций и ПС эквивалентной связи  $M_{a(c)}=-25,8$ ;  $M_{b(c)}=-24,2$ ;  $\Pi_{ac}=27,75$ ;  $\Pi_{ca}=33,73$  МВт.

С учетом вновь полученных данных (табл. 6.10) выполняется оптимизация по дисперсиям. В результате получены  $D_{a(c)}=392,8$ ,  $D_{b(c)}=59$  МВт<sup>2</sup>,  $\rho=0,91$ . Однако при этом появляются невязки МО (табл. 6.11).

Таблица 6.10

	$A+A(c)$	$(A+A(c))_p$	$(A+A(c))_p + B(c)$	$F1$	$B+B(c)$	$(B+B(c))_p$	$(B+B(c))_p + A(c)$	$F2$
M	14,2	10,1	-14,1	0,0	55,8	24,1	-1,7	0,0
D	1100,0	485,2	1045,2	-193	1100,0	97,1	657,1	89,8

Таблица 6.11

$A+A(c)$	$(A+A(c))_p$	$(A+A(c))_p + B(c)$	$F1$	$B+B(c)$	$(B+B(c))_p$	$(B+B(c))_p + A(c)$	$F2$
14,2	9,7	-14,5	0,4	55,8	24,7	-1,1	-0,6
1292,9	515,9	852,3	0,0	959,0	76,7	747,0	0,0

После повторной минимизации функционала по МО и дисперсиям получаем  $M_{a(c)} = -26,5$  МВт,  $M_{b(c)} = -23,5$  МВт,  $\Pi_{ab} = 27,7$  МВт,  $\Pi_{ba} = 34,2$  МВт,  $D_{a(c)} = 408$  МВт<sup>2</sup>,  $D_{b(c)} = 59,3$  МВт<sup>2</sup>,  $\rho = 0,85$  с практически нулевыми небалансами МО и дисперсий.

Представляет интерес математическая модель независимых инъекций  $\rho=0$ . В результате решения задачи при данном допущении было получено  $M_{a(c)} = -26,7$  МВт,  $M_{b(c)} = -23,3$  МВт,  $\Pi_{ab} = 28,9$  МВт,  $\Pi_{ba} = 35,9$  МВт.  $D_{a(c)} = 638$  МВт<sup>2</sup>,  $D_{b(c)} = 256$  МВт<sup>2</sup>. Однако сходимость итерационного процесса резко ухудшилась. Потребовалось 4 цикла для того, чтобы функционал достиг приемлемой величины  $\Phi < 0,0001$ . Следует заметить, что результирующие дисперсии больше тех, что получены с учетом коэффициента корреляции примерно на величину  $2\rho\sigma_{a(c)}\sigma_{b(c)} = 264$  МВт<sup>2</sup>. Этого следовало ожидать, поскольку в дальнейших преобразованиях расчетной схемы при суммировании коррелированных НМ  $N_{a(c)}$  и  $N_{b(c)}$  именно на такую величину увеличивается дисперсия суммы.

Сопоставление с данными примера 6.1 показывает, что МО инъекций имеют качественное отличие. Здесь генерирующая инъекция в узле  $B$  меньше, нежели в узле  $A$ , в то время как при пропорциональном распределении мы получили

обратную картину. В то же время значения параметров суммарных воздействий практически совпадают с аналогичными величинами, полученными с помощью редуцированных распределений. Так, в рассматриваемом методе  $M(B_{(A,C)}) = -14,1$  МВт,  $D(B_{(A,C)}) = 852$  МВт<sup>2</sup>, а в методе пропорционального распределения с МО эквивалентной ПС  $M(B_{(A,C)}) = -14,8$  МВт,  $D(B_{(A,C)}) = 944$  МВт<sup>2</sup>.

Это говорит о том, что разные математические подходы, соответствующие разным стратегиям распределения дефицита мощности, не сильно отличаются по результирующему эффекту. В то же время следует быть крайне осмотрительным при выборе стратегии, поскольку стратегия часто является отражением технической, экономической или финансовой политики.

### 6.1.7 Матричное преобразование вероятностных рядов

В процессе преобразования расчетной схемы НМ исключаемого узла, например узла  $C$ , распределяется в некоторой пропорции между смежными узлами, например  $A$  и  $B$ . Инъекции  $N_{A(C)}$ ,  $N_{B(C)}$  суммируются с собственными НМ  $N_A$ ,  $N_B$  и используются в дальнейших преобразованиях схемы через результирующие НМ  $N_{A,C}$ ,  $N_{B,C}$ . На каком-то этапе производится суммирование НМ, например  $(N_{A,C})^p$ ,  $N_{B,C}$ , имеющих одинаковый индексный символ ( $C$ ). Это означает, что соответствующая ЭЭС ( $C$ ) участвует своим НМ как в том, так и в другом ВР. Отсюда слагаемые не являются независимыми случайными величинами и здесь не правомочна процедура простого умножения ВР ( $p_{ij} = p_i p_j$ ,  $N_{ij} = N_i + N_j$ ).

Одним из возможных путей решения обозначенной проблемы является представление ЧВР не в виде связанных массивов, а в виде совокупности матриц  $\{p_{ij}\}$ ,  $\{N_{ij}\}$ ,  $\{F_{ij}\}$ . Инъекции НМ ЭЭС  $C$  хранятся в виде независимых аддитивных составляющих  $N_{A(C)}$ ,  $N_{B(C)}$  суммарных НМ смежных узлов. В процессе последующего исключения одного из смежных узлов (например,  $A$ ) часть его суммарного НМ передается второму смежному узлу  $B$  в качестве дополнительной аддитивной составляющей  $N_{B(A,C)}$ . Две из трех составляющих  $N_{B(A,C)}$  и  $N_{B(C)}$  НМ в узле  $B$  коррелированы, поэтому суммирование случайных величин следует начинать с них.

Для учета корреляции необходимо каким-либо образом выделить в  $N_{B(A,C)}$  ту составляющую ( $N_{A(C)}$ ), которая является причиной вероятностной связи, и сложить ее с  $N_{B(C)}$ . Представление вероятностных характеристик  $N_{(A,C)}$  в виде матриц  $\{p_{ij} = p_i p_j\}$ ,  $\{N_{ij} = N_i + N_j\}$ ,  $\{F_{ij} = p_i f_j + f_i p_j\}$ ,  $i=1 \dots n_A$ ,  $j=1 \dots n_C$  опосредованно позволяет сохранить характеристики составляющих. Модификация (пропорция, редукция) ЧВР  $N_{(A,C)}$  к виду  $N_{B(A,C)}$  касается только матрицы мощностей  $\{N_{ij}^*\}$ .

Из-за ограничения по ПС возникает неопределенность распределения  $N_{B(A,C)}$  между составляющими  $x_i^A$ ,  $y_j^{A(C)}$  небалансов мощности  $N_A$ ,  $N_{A(C)}$ , но это не влияет на конечный результат, поскольку  $x_i^A + (y_j^{A(C)} + N_j^{B(C)}) = (x_i^A + y_j^{A(C)}) + N_j^{B(C)} = N_{ij}^* + N_j^{B(C)}$ .

При суммировании  $N_{B(A,C)}$ ,  $N_{B(C)}$  необходимо принять во внимание, что вероятностные массивы  $p_{A(C)}$ ,  $p_{B(C)}$  одинаковы и соответствуют одним и тем же значениям НМ ЭЭС С. Отсюда ЭЭС С воздействует на ЭЭС В суммарно – столбцовой составляющей в  $N_{B(A,C)}$  и массивом  $N_{B(C)}$ . В результате при суммировании  $N_{B(A,C)}$ ,  $N_{B(C)}$  формируется ЧВР  $N_{B(A,C)}^*$ , который отличается от ЧВР  $N_{B(A,C)}$  лишь матрицей мощностей  $\{N_{ij}^{**} = N_{ij}^* + N_{B(C),j}, i=1, \dots, n_A, j=1, \dots, n_C\}$ .

В процессе суммирования  $N_{B(A,C)} + N_{B(C)}$  матрицы вероятностей и частоты остаются неизменными и равными матрицам вероятностей и частоты той части НМ ЭЭС А, которая передается иным, смежным с ЭЭС А энергосистемам (например, ЭЭС D). Это дает основание рассматривать суммарный НМ  $N_{A,C}$  как НМ отдельной ЭЭС, последующие преобразования которого подобны описанным выше.

Представление матриц в виде массивов без сжатия эквивалентно расширению размерности массивов (двухмерный, трехмерный и т.д. по мере увеличения числа включенных ЭЭС,  $N_C$ ,  $N_{A,C}$ ,  $N_{B,A,C}$  и т.д.) Это приводит к экспоненциальному увеличению длительности расчетов. Решением проблемы является сжатие ЧВР. Однако при раздельном сжатии нарушается позиционное соответствие

элементов массивов и становится невозможной процедура матричного учета их корреляции.

Другим путем обработки ЧВР является совместное сжатие ЧВР  $N_{B(A,C)}^*$ ,  $N_{D(A,C)}$ . Представленные в виде одномерных массивов рассматриваемые ЧВР позиционно сжимаются при последовательном повторе мощности одновременно и в  $N_{D(A,C)}$  и в  $N_{B(A,C)}^*$ . При этом допустимо вероятностное эквивалентирование ЧВР, но с непременным условием, что эквивалентируются одни и те же вероятностные области (позиционное эквивалентирование). В результате формируются одномерные массивы мощностей, где отдельные значения могут повторяться, а одинаковые величины находиться в разных областях массива.

Матричная форма представления ЧВР удобна для учета корреляции не только НМ, но и ПС эквивалентной связи, которая сформирована по «остаточному» принципу и которая, по существу, представляет еще один массив  $\{P_j^{AB}, j = 1, \dots, n_C\}$ , связанный с инъекциями  $N_{A(C)}, N_{B(C)}$  единством случайных состояний ЭЭС  $C$ . В матричной форме реализуется постолбцовое ограничение мощности

$$N_{ij}^* = \begin{cases} N_{ij}, & N_{ij} \leq P_j \\ P_j, & N_{ij} > P_j \end{cases}, i = 1, \dots, n_A, j = 1, \dots, n_C.$$

При произвольной последовательности исключаемых узлов, например в контуре  $A-C-B-D-E-F-A$  последовательность  $C, D, F, A, B$ , возможно, что коррелированные случайные инъекции будут взаимодействовать лишь после большого числа исключений узлов. Число инъекций, которые могут быть в дальнейшем востребованы, возрастает по мере исключения узлов. Для сокращения объема промежуточной информации желательно следующий исключаемый узел брать из множества узлов, связанных с исключенным узлом  $i$ . После полного просмотра множества НМ оставшихся ЭЭС не будут содержать прямые воздействия от ЭЭС  $i$  и нет надобности в хранении соответствующего ЧВР.

**Пример 6.4.** Выполнить последовательное исключение двух узлов  $C, A$  в цепи  $A-C-B$ . ПС связей  $AC, CB$   $P_{AC} = P_{CA} = P_{CB} = P_{BC} = 50$ . НМ ЭЭС  $C$  делится ме-



жду ЭЭС  $A$  и  $B$  в пропорции 1:1. ВР ЭЭС  $A$  и  $C$  и некоторые промежуточные результаты представлены в табл. 6.12

Таблица 6.12

ЭЭС $A$		ЭЭС $C$			$P_3$
$p$	$N$	$p$	$N_C$	$N_C/2$	
0,1	-20	0,3	-40	-20	30
0,3	20	0,6	10	5	45
0,6	60	0,1	60	30	20

Последовательные преобразования матрицы мощностей показаны в табл. 6.13, где матрица  $N_{AC}^*$  получена из  $N_{AC}$  постолбцовым ограничением мощности, а  $N_{AC}^{**}$  – из  $N_{AC}^*$  постолбцовым суммированием с  $N_{(C)}$ .

Таблица 6.13

Вероятность $p_{AC}$				НМ $N_{AC} = N_A + N_{A(C)}$			НМ $N_{AC}^*$			НМ $N_{AC}^{**} = N_{AC}^* + N_{B(C)}$			
$p_A$	$p_C$			$N_A$	$N_{A(C)} = N_C/2$			Строка $N_{B(C)}$					
	0,3	0,6	0,1		-20	5	30	-20	5	30			
0,1	0,03	0,06	0,01	-20	-40	-15	10	-30	-15	10	-50	-10	40
0,3	0,09	0,18	0,03	20	0	25	50	0	25	20	-20	30	50
0,6	0,18	0,36	0,06	60	40	65	90	30	45	20	10	50	50
<b><math>P_3</math></b>				<b>30</b>	<b>45</b>	<b>20</b>							

Преобразованные в массивы матрицы НМ представлены на рис. 6.7, где маркер «ромб» идентифицирует  $N_{AC}$ , маркер «квадрат» -  $N_{AC}^*$  маркер треугольник -  $N_{AC}^{**}$ . Не трудно видеть, что уже после первой операции ограничения НМ пропускной способностью эквивалентной связи корреляция  $N_{AC}$  и  $N_{AC}^*$  снижается

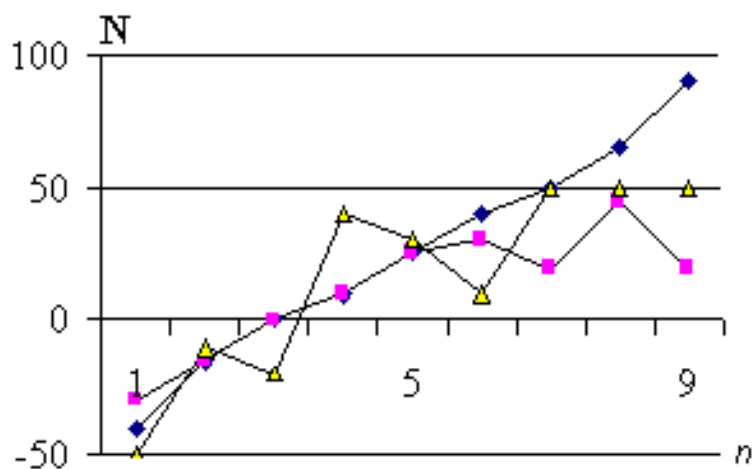


Рис. 6.7. Изменение массива мощностей

(коэффициент корреляции равен 0,84). Несколько увеличивается коэффициент корреляции (0,85) после второго этапа суммирования с небалансом мощности  $N_{B(C)}$ .

### 6.1.8 Исключение узлов ранга два с шунтирующей связью

При исключении узлов ранга два (рис. 6.8) в электрических расчетах наличие шунтирующей связи между узлами не оказывает влияния на процесс исключения узла. Новая проводимость, возникающая в результате исключения, представляет параллельно соединенный элемент по отношению к шунтирующей связи. Результирующая проводимость

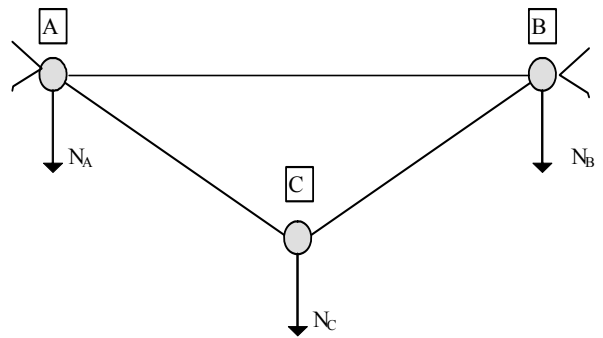


Рис. 6.8. Система с шунтирующей связью

равна сумме проводимостей параллельных ветвей. Данные “электрические” принципы можно распространить на задачу БН, особенно при пропорциональном распределении НМ исключаемого узла. Поскольку принцип суммирования ПС справедлив и в теории транспортных потоков, то проблема шунтирования решается путем суммирования пропускных способностей шунтирующей и эквивалентной связей.

В то же время, принцип равенства баланса спроса и предложения может привести к иным результатам. При наличии шунтирующей связи условия равенства спроса мощности в узлах  $A$  и  $B$  для определения параметров инъекций и ПС эквивалентной связи имеют более сложную алгоритмическую структуру, поскольку здесь в общем случае необходимо использовать операцию двойного интегрирования в вероятностном пространстве НМ двух узлов при определении их совместного влияния на третий узел.

Сложность этой процедуры характеризуется не только невозможностью аналитического определения двойных интегралов

$$M_{AC} = \iint_L (x+y) f_A(x) f_C(y) dx dy; \quad \chi_{AC} = \iint_L (x+y)^2 f_A(x) f_C(y) dx dy;$$

$$M_{BC} = \iint_Q (x+y) f_B(x) f_C(y) dx dy; \quad \chi_{BC} = \iint_Q (x+y)^2 f_B(x) f_C(y) dx dy$$

от функций нормального распределения, но и выбором стратегии ограничения нагрузки и генерации вне области допустимых значений, определяемой ограничениями по ПС в сечении каждого узла. Так, область  $L$  характеризуется неравенствами

$$-(\Pi_{AB} + \Pi_{AC}) \leq N_A \leq (\Pi_{BA} + \Pi_{CA});$$

$$-(\Pi_{CA} + \Pi_{CB}) \leq N_C \leq (\Pi_{BC} + \Pi_{AC});$$

$$-(\Pi_{AB} + \Pi_{BC}) \leq N_A + N_C \leq (\Pi_{BA} + \Pi_{BC})$$

и в общем случае представляется шестигранником (рис. 6.9). При этом в расчетной процедуре необходимо учитывать конфигурацию шестигранника, зависящую от численных значений ПС.

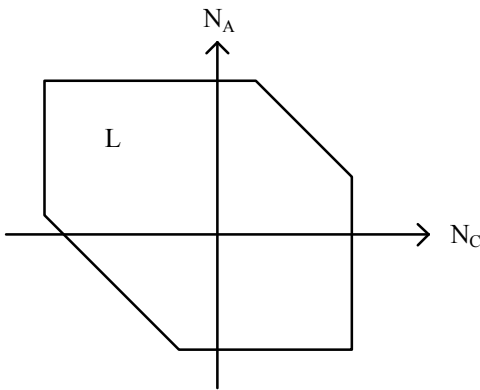


Рис.6.9. Область L определения  $N_A, N_C$

Численные методы интегрирования, в общем случае используемые на данном этапе, требуют существенных затрат машинного времени, что снижает эффективность эквивалентирования. Более предпочтительными, на наш взгляд, являются процедуры редуцирования и вероятностного эквивалентирования.

При совместном воздействии на ЭЭС  $B$  небаланс мощности ЭЭС  $A$  редуцируется ПС связей  $AC$  и  $AB$ , а НМ ЭЭС  $C$  -пропускной способностью двух смежных связей  $CA$  и  $CB$ . Суммарный НМ ЭЭС  $A$  и  $C$  в их воздействии на ЭЭС  $B$  редуцируется ПС связей  $AB$  и  $CB$ . Аналогичная схема имеет место для совместного воздействия ЭЭС  $B$  и  $C$  на ЭЭС  $A$ .

Структурная система преобразуется к виду

$$\left( A_{-(ac+ab)}^{ba+ca} + C_{-(ca+cb)}^{ac+bc} \right)_{-(cb+ab)}^{ba+bc} = (A + A(C))_{-ab}^{ba} + B(C);$$

$$\left( B_{-(ba+bc)}^{ab+cb} + C_{-(ca+cb)}^{ac+bc} \right)_{-(ba+ca)}^{ab+ac} = (B + B(C))_{-ba}^{ab} + A(C)$$
(6.27)

**Пример 6.5.** Определить вероятность дефицита мощности в узле  $B$  объединенной ЭЭС (рис. 6.8) с исходными данными, представленными в табл. 6.14. ПС всех связей одинаковы и равны 50 МВт в обоих направлениях.

Таблица 6.14

ЭЭС	A	B	C	Ар	Вр	Ср
М	40	20	-50	39,7	19,7	-48,0
Дисп	900	1600	1600	864	1532	1325

**Способ 1.** Модель обобщенных параметров спроса и предложения смежных ЭЭС. Воздействие ЭЭС  $A$  и  $C$  на ЭЭС  $B$  оценивается структурной формулой

$$B_{(A,C)} = [A_{-(ac+ab)}^{ba+ca} + C_{-(ca+cb)}^{ac+bc}]_{-(cb+ab)}^{ba+bc}.$$

Математические ожидания

$$M_A^p(M_A, D_A, -\Pi_{ac} - \Pi_{ab}, \Pi_{ca} + \Pi_{ba}) = M_A^p(40, 900, -100, 100) = 39,7 \text{ МВт};$$

$$M_C^p(M_C, D_C, -\Pi_{ca} - \Pi_{cb}, \Pi_{ac} + \Pi_{bc}) = M_C^p(-100, 100, -50, 1600) = -48 \text{ МВт}.$$

Дисперсии

$$D_A^p(M_A, D_A, -\Pi_{ac} - \Pi_{ab}, \Pi_{ca} + \Pi_{ba}) = D_A^p(40, 900, -100, 100) = 864 \text{ МВт}^2;$$

$$D_C^p(M_C, D_C, -\Pi_{ca} - \Pi_{cb}, \Pi_{ac} + \Pi_{bc}) = D_C^p(-100, 100, -50, 1600) = 1325 \text{ МВт}^2.$$

Параметры объединения ЭЭС  $A$  и  $C$

$$M_{A+C} = M_A^p + M_C^p = 39,7 - 48 = -8,3; \quad D_{A+C} = D_A^p + D_C^p = 864 + 1325 = 2189.$$

Параметры эквивалентного генератора

$$M_e = M^p(M_{A+C}, D_{A+C}, -\infty, 0) = M_A^p(-8,3; 2189, -\infty, 0) = -23,1 \text{ МВт};$$

$$D_e = D^p(-\infty, 0, M_{A+C}, D_{A+C}) = M_A^p(-\infty, 0, -9,7, 1691) = 906 \text{ МВт}^2.$$

Параметры ЭЭС  $B$  с учетом взаимопомощи

$$M_{B+e} = M_B + M_e = 20 - 23,1 = -3,1 \text{ МВт};$$

$$D_{B+e} = D_B + D_e = 1600 + 906 = 2506 \text{ МВт}^2.$$

Вероятность дефицита мощности при изолированной работе

$$P\{N_B > 0\} = 1 - F(0; 20; 1600) = 0,691.$$

Вероятность дефицита мощности с учетом взаимопомощи

$$P\{N_B > 0\} = 1 - F(0; -3,1; 2506) = 0,475.$$

Как и следовало ожидать, вероятность дефицита мощности существенно снизилась.

**Способ 2.** В случае договора с ЭЭС С на полную поставку резерва мощности параметры эквивалентного генератора

$$M_e = M^P(M_C, D_C, -50, 0) = M_C^P(-50, 900, -50, 0) = -36,1 \text{ МВт};$$

$$D_e = D^P(M_C, D_C, -50, 0) = D_C^P(-50, 900, -50, 0) = 336 \text{ МВт}^2.$$

Параметры ЭЭС В с учетом взаимопомощи

$$M_{B+e} = M_B + M_e = 20 - 36,1 = -16,1 \text{ МВт};$$

$$D_{B+e} = D_B + D_e = 1600 + 336 = 1936 \text{ МВт}^2.$$

Вероятность дефицита мощности при договоре с ЭЭС С

$$P\{N_B > 0\} = 1 - F(0; -16,1; 1936) = 0,357$$

Совокупное воздействие ЭЭС А и С не так сильно изменило вероятность дефицита в ЭЭС В. Это объясняется тем, что дефицитная ЭЭС А, по существу, «поглотила» весь имеющийся в наличии резерв ЭЭС С. ЭЭС В следует проанализировать целесообразность заключения договора с ЭЭС С на поставку резерва мощности. Это несколько улучшит ее положение.

**Способ 3.** Расчет с помощью процедуры исключения узлов при полном предоставлении резервов мощности ЭЭС А и С в распоряжение ЭЭС С.

Исключаем узел С. Для упрощения расчетов принимаем алгоритм распределения НМ пропорционально ПС связей. При равенстве ПС  $k^H = k^E = 0,5$ .

$$\text{Отсюда } M_{a(c)} = M_{b(c)} = -24 \text{ МВт}; D_{a(c)} = D_{b(c)} = 0,5^2 \cdot 1325 = 331 \text{ МВт}^2;$$

$$2 \cdot \text{cov}(A(C), B(C)) = 1325 - 2 \cdot 331 = 663 \text{ МВт}^2.$$

Математическое ожидание ПС эквивалентной связи  $MP_{ab}^e = MP_{ba}^e = 50 - 25 = 25 \text{ МВт}$ .

Со стороны ЭЭС А участвуют две случайные величины  $N_a$  и  $N_{a(c)}$ . При этом вторая величина коррелирована с  $N_{b(c)}$ . Отсюда эффект редукиции должен быть разнесен на составляющие (разд. 4.1.6). Для этого используются расчетные выражения

$$MN_i^p = MN_i - \frac{EG_i}{\sum EG_j} (M^p(M_\Sigma, D_\Sigma, -\infty, a) - a) - \frac{EL_i}{\sum EL_j} (M^p(M_\Sigma, D_\Sigma, b, \infty) - b);$$

$$DN_i^p = DN_i - \left( \frac{EG_i}{\sum EG_j} \right)^2 D^p(M_\Sigma, D_\Sigma, -\infty, a) - \left( \frac{EL_i}{\sum EL_j} \right)^2 D^p(M_\Sigma, D_\Sigma, b, \infty),$$

где  $a=-75$ ,  $b=75$  – нижний и верхний пределы редуцирования;  $EG_i$ ,  $EL_i$  – эквивалентные генерация и нагрузка составляющих.

Результаты расчетов сведены в табл. 6.15, где

$$kG_i = EG_i / EG_\Sigma; \quad kG_i = EG_i / EG_\Sigma; \quad M(SG) = M^p(M_\Sigma, D_\Sigma, -\infty, a); \quad M(SL) = M^p(M_\Sigma, D_\Sigma, b, \infty);$$

$$D(SG) = D^p(M_\Sigma, D_\Sigma, -\infty, a); \quad D(SL) = D^p(M_\Sigma, D_\Sigma, b, \infty).$$

Таблица 6.15

	$EG_a$	$EG_{a(c)}$	$EG_\Sigma$	$EL_a$	$EL_{a(c)}$	$EL_\Sigma$	$SG-a$	$SL-b$	$A_p$	$A(C)p$
$M$	-1,3	-25,7	-27	41,3	0,7	42	-0,1	0,6	39,42	-23,9
$k/D$	0,048	0,952		0,983	0,017		1,2	15,75	886	320

В частности,

$$MN_a^p = MN_a - kG_a [M(SG) - a] - kL_a [M(SL) - b] = 40 - 0,048 \cdot (-0,1) - 0,983 \cdot 0,6 = 39,42 \text{ МВт};$$

$$MN_{a(c)}^p = MN_{a(c)} - kG_{a(c)} [M(SG) - a] - kL_{a(c)} [M(SL) - b] = -24 - 0,952 \cdot (-0,1) - 0,017 \cdot 0,6 = -23,9 \text{ МВт};$$

$$DN_a^p = DN_a - (kG_a)^2 D(SG) - (kL_a)^2 D(SL) = 900 - 0,048^2 \cdot 1,2 - 0,952^2 \cdot 15,75 = 886 \text{ МВт}^2;$$

$$DN_{a(c)}^p = DN_{a(c)} - (kG_{a(c)})^2 D(SG) - (kL_{a(c)})^2 D(SL) = 331 - 0,952^2 \cdot 1,2 - 0,017^2 \cdot 15,75 = 320 \text{ МВт}^2.$$

Из-за относительно небольшого изменения дисперсии считаем, что коэффициент корреляции между инъекциями  $A(C)$ ,  $B(C)$  не изменился и остался равным единице. Отсюда  $\text{cov}(A(C)^p, B(C)) = \sqrt{DN_{a(c)}^p DN_{b(c)}^p} = \sqrt{320 \cdot 331} = 325,5 \text{ МВт}^2$ .

В результате воздействие на ЭЭС В со стороны ЭЭС С определяется параметрами

$$MN_{b(c)}^\Sigma = MN_{b(c)} + MN_{a(c)}^p = -24 - 23,9 = -47,9 \text{ МВт};$$

$$DN_{b(c)}^\Sigma = DN_{b(c)} + DN_{a(c)}^p + \text{cov}(A(C)^p, B(C)) = 320 + 331 + 2 \cdot 325,5 = 1302 \text{ МВт}^2.$$

Параметры эквивалентного генерирующего воздействия ЭЭС А, С

$$MG_{b(a,c)} = MG_{b(c)}^{\Sigma} + MG_a^P = M^P(-47,9; 1302; -\infty; 0) + M^P(39,4; 886; -\infty; 0) = -50,7 \text{ МВт};$$

$$DG_{b(a,c)} = DG_{b(c)}^{\Sigma} + DG_a^P = D^P(-47,9; 1302; -\infty; 0) + D^P(39,4; 886; -\infty; 0) = 1135 \text{ МВт}^2.$$

Параметры ЭЭС  $B$  с учетом взаимопомощи

$$M_{B+e} = M_B + MG_{b(a,c)} = 20 - 50,7 = -30,7 \text{ МВт};$$

$$D_{B+e} = D_B + DG_{b(a,c)} = 1600 + 1135 = 2735 \text{ МВт}^2.$$

Вероятность дефицита мощности с учетом взаимопомощи

$$P\{N_B > 0\} = 1 - F(0; -30,7; 2735) = 0,279.$$

Получена минимальная вероятность. Для ее реализации необходимы договор между ЭЭС  $A$  и  $B$  о пропуске мощности от ЭЭС  $C$  через ЭЭС  $A$  и договор между ЭЭС  $C$  и  $B$  о полном предоставлении резерва мощности ЭЭС  $C$  в распоряжение ЭЭС  $B$ .

**Способ 4.** Расчет с помощью процедуры исключения узлов при частичном отборе резерва мощности ЭЭС  $C$ , проходящего через ЭЭС  $A$ .

В отличие от предыдущего случая воздействие со стороны ЭЭС  $A$  осуществляется единым потоком с параметрами

$$MG_a^{\Sigma} = M^P(M_{\Sigma}, D_{\Sigma}, -75, 0) = M^P(16, 1231, -75, 0) = -7,38 \text{ МВт};$$

$$DG_a^{\Sigma} = D^P(M_{\Sigma}, D_{\Sigma}, -75, 0) = D^P(16, 1231, -75, 0) = 217 \text{ МВт}^2.$$

Однако инъекция  $B(C)$  рассматривается как самостоятельный источник с параметрами

$$MG_{b(c)} = M^P(M_{b(c)}, D_{b(c)}, -\infty, 0) = M^P(-24, 331, -\infty, 0) = -24,8 \text{ МВт};$$

$$DG_{b(c)} = D^P(M_{b(c)}, D_{b(c)}, -\infty, 0) = D^P(-24, 331, -\infty, 0) = 280 \text{ МВт}^2.$$

Параметры ЭЭС  $B$  с учетом взаимопомощи

$$M_{B+e} = M_B + MG_{b(c)} + MG_a^{\Sigma} = 20 - 7,38 - 24 = -11,38 \text{ МВт};$$

$$D_{B+e} = D_B + DG_{b(c)} + DG_a^{\Sigma} + 2 \text{cov}(A(C), B(C)) = \\ = 1600 + 280 + 217 + 2 \cdot 325,5 = 2748 \text{ МВт}^2.$$

Вероятность дефицита мощности с учетом взаимопомощи

$$P\{N_B > 0\} = 1 - F(0; -11,38; 2748) = 0,41.$$

Данная величина меньше полученной способом 1, но больше той, что получена способом 2. Таким образом, вероятность дефицита мощности существенно зависит от стратегии взаимопомощи. Наиболее пессимистическая оценка имеет место при обобщенном эквивалентировании и дальнейшем суммировании НМ смежных ЭЭС. Наиболее оптимистическая оценка наблюдается в случае маловероятного договора о транзитной передаче резервов мощности дефицитной ЭЭС.

### 6.1.9 Исключение узлов ранга три и выше

Математические процедуры, разработанные для исключения узлов ранга два, могут быть распространены на узлы более высоких рангов. Здесь  $n$ -лучевая звезда заменяется  $n$ -угольником. Наиболее просто к узлам ранга не менее трех адаптируются алгоритмы пропорционального распределения НМ исключаемого узла. Коэффициенты пропорциональности, как и ранее, могут формироваться в зависимости от стратегии взаимопомощи, в том числе отдельно для генерации и нагрузки, а также пропорционально ПС смежных связей (принцип «электрического» эквивалентирования).

Основная проблема вероятностного эквивалентирования при исключении узлов высших рангов заключается в определении ПС эквивалентных связей. Выше было показано, что классическое электрическое эквивалентирование не удовлетворяет условиям транспортных потоков.

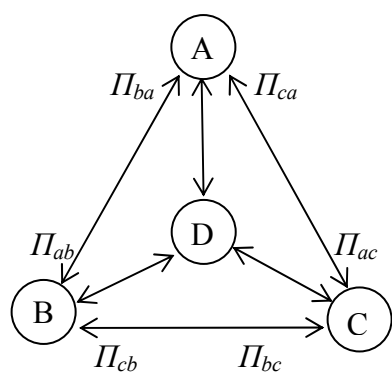


Рис.6.10. Исключение узла ранга три

Отсюда было предложено определять эквивалентные ПС по «остаточному» принципу – ПС эквивалентных связей не должны превышать дополнительный поток НМ, который может быть передан в какой-либо неисключаемый узел эквивалентной схемы. Этот подход может быть распространен на узлы ранга три, где три существующие связи заменяются тремя эквивалентными.

Рассмотрим определение пропускных спо-



собностей  $\Pi_{ab}, \Pi_{ba}, \Pi_{bc}, \Pi_{cb}, \Pi_{ac}, \Pi_{ca}$  эквивалентных связей  $AB, AC, DC$  при исключении узла  $D$  в схеме трехлучевой звезды  $ABCD$  (преобразование «звезды» в «треугольник»), рис.6.9. На рассматриваемом этапе считаются известными (определенными) дополнительные потоки НМ  $\pi_{ad} = \Pi_{ad} - N_{a(d)}, \pi_{da}, \pi_{bd}, \pi_{db}, \pi_{dc}, \pi_{cd}$  в связях исходной «звезды».

Сумма ПС смежных некоторому узлу ( $A$ ) эквивалентных связей не должна превышать дополнительный поток в этот узел  $\Pi_{ca} + \Pi_{ba} \leq \min\{\pi_{da}, \pi_{bd} + \pi_{cd}\}$ . Аналогичное высказывание можно сделать относительно потока НМ, исходящего из узла  $\Pi_{ab} + \Pi_{ac} \leq \min\{\pi_{ad}, \pi_{db} + \pi_{dc}\}$  и остальных узлов.

$$\begin{aligned} \Pi_{ab} + \Pi_{ac} &\leq \min\{\pi_{ad}, \pi_{db} + \pi_{dc}\}; & \Pi_{ca} + \Pi_{ba} &\leq \min\{\pi_{da}, \pi_{bd} + \pi_{cd}\}; \\ \Pi_{ba} + \Pi_{bc} &\leq \min\{\pi_{bd}, \pi_{da} + \pi_{dc}\}; & \Pi_{ab} + \Pi_{cb} &\leq \min\{\pi_{db}, \pi_{ad} + \pi_{cd}\}; \\ \Pi_{cb} + \Pi_{ca} &\leq \min\{\pi_{cd}, \pi_{db} + \pi_{da}\}; & \Pi_{bc} + \Pi_{ac} &\leq \min\{\pi_{dc}, \pi_{bd} + \pi_{ad}\}. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Одновременное насыщение дополнительными потоками НМ всех трех узлов маловероятно. Отсюда неравенства не могут быть заменены равенствами. Одним из возможных путей решения задачи является использование методов нелинейного программирования – минимизация суммы квадратов невязок при ограничениях (6.28) и неотрицательности переменных.

**Пример 6.6.** Выполнить исключение узла  $D$  ранга три в схеме рис.6.9 при следующих исходных данных:  $M_d=100$  МВт,  $\sigma_d=50$  МВт,  $\Pi_{ad}=\Pi_{da}=80$  МВт,  $\Pi_{bd}=\Pi_{db}=60$  МВт,  $\Pi_{cd}=\Pi_{dc}=60$  МВт.

**Решение.** Принимаем стратегию распределения НМ пропорционально ПС смежных связей.

Коэффициенты распределения и математические ожидания инъекций  
 $k_a=0,4; k_b=k_c=0,3; M_{a(d)}=0,4 \cdot 100=40$  МВт;  $M_{b(d)}=M_{c(d)}=0,3 \cdot 100=30$  МВт.

Дисперсии инъекций

$$D_{a(d)}=0,4^2 \cdot 2500=400 \text{ МВт}^2; D_{b(d)}=D_{c(d)}=0,3^2 \cdot 2500=225 \text{ МВт}^2.$$

Корреляционные моменты

$$\text{cov}(A(D), B(D)) = \text{cov}(A(D), C(D)) = (D_{a(d)} \cdot D_{b(d)})^{0,5} = (400 \cdot 225)^{0,5} = 300 \text{ МВт}^2;$$

$$\text{cov}(B(D), C(D)) = (D_{b(d)} \cdot D_{c(d)})^{0,5} = 225 \text{ МВт}^2.$$

Дополнительные потоки НМ в связях исходной «звезды»

$$\pi_{ad} = P_{ad} - N_{a(d)} = 80 - 40 = 40 \text{ МВт}, \quad \pi_{da} = P_{da} + N_{a(d)} = 80 + 40 = 120 \text{ МВт}$$

$$\pi_{bd} = \pi_{cd} = 60 - 30 = 30 \text{ МВт}, \quad \pi_{db} = \pi_{dc} = 60 + 30 = 90 \text{ МВт}.$$

Система неравенств (6.28) для оценки МО ПС эквивалентных связей имеет вид

$$\begin{aligned} P_{ab} + P_{ac} &\leq \min\{\pi_{ad}, \pi_{db} + \pi_{dc}\} = 40; & P_{ca} + P_{ba} &\leq \min\{\pi_{da}, \pi_{bd} + \pi_{cd}\} = 60; \\ P_{ba} + P_{bc} &\leq \min\{\pi_{bd}, \pi_{da} + \pi_{dc}\} = 30; & P_{ab} + P_{cb} &\leq \min\{\pi_{db}, \pi_{ad} + \pi_{cd}\} = 70; \\ P_{cb} + P_{ca} &\leq \min\{\pi_{cd}, \pi_{db} + \pi_{da}\} = 30; & P_{bc} + P_{ac} &\leq \min\{\pi_{dc}, \pi_{bd} + \pi_{ad}\} = 70. \end{aligned}$$

Применяя процедуру «поиск решения Excel», получаем следующее решение:  $\{P_{ab}; P_{ba}; P_{ac}; P_{ca}; P_{bc}; P_{cb}\} = \{20; 13,3; 20; 13,3; 16,7; 16,7\}$ .

Следует обратить внимание на то, что узлы насыщаются дополнительными потоками в тех направлениях, которые соответствуют снижению ПС исходной схемы:  $P_{ab} + P_{ac} = \pi_{ad} = 40$  МВт;  $P_{ba} + P_{bc} = \pi_{bd} = 30$  МВт;  $P_{cb} + P_{ca} = \pi_{cd} = 30$  МВт, т.е. определяющим в приведенной системе неравенств является левый столбец. Правый столбец ограничений можно было бы и не учитывать.

Как положительный момент следует оценивать симметрию результирующих ПС:  $P_{ab} = P_{ac}$ ,  $P_{ba} = P_{ca}$ ,  $P_{bc} = P_{cb}$  для симметричной (относительно ЭЭС В, С) исходной схемы.

Применительно к системе  $n$ -лучевой звезды при исключении узла  $k$  система неравенств (6.28) принимает вид

$$\sum_{\substack{j \neq i \\ j \neq k}} P_{ij} \leq \min \left\{ P_{ik}; \sum_{\substack{j \neq i \\ j \neq k}} P_{kj} \right\}, \quad i \neq k. \quad (6.29)$$

**Методика эквивалентирования спроса и предложения** в исходной и эквивалентной схемах предполагает определение как инъекций, так и ПС эквивалентных связей решением систем нелинейных уравнений. При этом на  $2(n+1)$  уравнений (равенство МО и дисперсий спроса и предложений в  $n$  узлах и равенство суммы инъекций небалансу мощности исключаемого узла) приходится  $n^2 + n$  независимых переменных (МО и дисперсии инъекций, ПС эквивалентных связей

в прямом и обратном направлениях). Нетрудно видеть, что только при  $n=2$  соблюдается равенство числа уравнений числу переменных. Решение может быть найдено методами нелинейного программирования, минимизацией невязок результирующих воздействий. Однако, как показывают расчеты, с увеличением ранга узла резко ухудшается сходимость итерационного процесса. Одним из путей решения обозначенных проблем является снижение числа переменных.

Число переменных может быть снижено вдвое в симметричных по ПС схемах. Кроме того, можно априори задать некоторые значения избыточным переменным. Здесь целесообразно использовать либо “электрический” принцип эквивалентирования, принимая ПС всех эквивалентных связей, кроме одной, пропорциональными произведению ПС смежных лучей звезды, либо идею транспортных потоков, как это было сделано выше.

#### **6.1.10 Высококонцентрированная энергосистема**

Метод эквивалентного преобразования многолучевой звезды в многоугольник не обеспечивает максимально высокую точность решения, поскольку здесь принимается ряд ограничений (выбор стратегии пропорционального распределения, произвольное назначение ПС эквивалентных связей и др.), вносящих определенные погрешности. Кроме того, каждое такое преобразование увеличивает число эквивалентных связей, последующее использование которых приводит к нелинейному усилению упомянутых погрешностей. В этом случае представляет интерес изначально менее точная, но более простая и быстрая модель рассматриваемый узел – концентрированная ОЭЭС, где вводится допущение о том, что межсистемные связи в концентрированной ОЭЭС имеют бесконечную ПС, т.е. ОЭЭС представляет собой единый узел, а входящие в ее состав ЭЭС являются составными элементами.

Здесь показатели балансовой надежности каждого из узлов определяются исходя из структуры «узел – эквивалентный генератор остальных ЭЭС», описываемой соотношениями

$$N_i = N_i^* + \sum_{j \neq i} N_j^* \Big|_{-S_i}^0,$$

где  $S_i$  – суммарная ПС узла  $i$  (нижний предел редукации – в направлении к узлу).

## 6.2 Метод хорд

Одним из путей решения задачи расчета показателей БН для многоконтурных структур является преобразование расчетного графа к радиальному виду путем замены замыкающих ветвей (хорды) эквивалентными потоками НМ. При этом разнообразие алгоритмов эквивалентирования определяется совокупностью возможных стратегий распределения НМ. Определение вероятностных параметров потока НМ, определяемого стратегией локального эгоизма, описано в разд. 4.4.

Другой подход (стратегия выравнивания НМ) исходит из возможности передачи части дефицита в соседнюю, возможно также дефицитную ЭЭС. Это характерно для ОЭЭС с централизованной системой управления, где имеется возможность перераспределения дефицита мощности между ЭЭС, например, по условию минимального суммарного ущерба от недоотпуска электроэнергии потребителям. Еще одним классом ОЭЭС, где правомочен рассматриваемый подход, является ОЭЭС с неуправляемыми межсистемными потоками мощности. В этом случае при общем дефиците происходит снижение частоты и связанное с этим снижение электропотребления во всех ЭЭС объединения. В результате ограничение электропотребления в дефицитной ЭЭС будет меньше, а в избыточной больше, нежели при первом подходе.

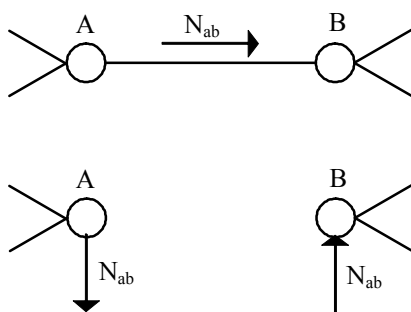


Рис. 6.11. Отключение хорды

Аналогичные рассуждения относятся к распределению резервов и в целом небалансов мощности.

В процессе эквивалентирования при исключении хорды  $AB$  в узлы  $A, B$  вводятся инъекции  $N_{ab}$  (рис. 6.12) с дисперсией  $D_{ab}$  и МО со-

ответственно  $\bar{N}_{ab}$  и  $-\bar{N}_{ab}$ .

### 6.2.1. Стратегия локального эгоизма

Согласно данной стратегии реальный, имеющий вероятностный характер поток мощности по межсистемной связи возможен лишь тогда, когда в одной из подсистем наблюдается дефицит мощности, а в другой - достаточный для покрытия этого дефицита резерв. Здесь функция и плотность распределения обменного потока от подсистемы  $A$  к подсистеме  $B$  (положительное направление) и от  $B$  к  $A$  (отрицательное направление)

$$F_{ab}(x) = \begin{cases} F_b(x) \cdot \bar{F}_a(-x), & -\Pi_{ba} \leq x < 0; \\ 1 - F_a(-x) \cdot \bar{F}_b(x), & 0 \leq x \leq \Pi_{ab}; \end{cases}$$

$$f_{ab}(x) = \begin{cases} f_b(x) \cdot \bar{F}_a(-x) + f_a(-x) \cdot F_b(x), & -\Pi_{ba} \leq x < 0; \\ f_b(x) \cdot F_a(-x) + f_a(-x) \cdot \bar{F}_b(x), & 0 \leq x \leq \Pi_{ab}. \end{cases}$$

Математическое ожидание потока мощности по хорде

$$\bar{N}_{ab} = 2\Pi_{ab}F_a(-\Pi_{ab})\bar{F}_b(\Pi_{ab}) - 2\Pi_{ba}\bar{F}_a(\Pi_{ba})F_b(-\Pi_{ba}) + \\ + \int_0^{\Pi_{ba}} xF_b(-x)dF_a(x) + \int_0^{\Pi_{ba}} xF_a(-x)dF_b(x) + \int_{-\Pi_{ba}}^0 x\bar{F}_a(-x)dF_b(x) + \int_{-\Pi_{ba}}^0 x\bar{F}_b(-x)dF_a(x).$$

Формула второго начального момента отличается квадратом у переменной:

$$\chi_{ab} = 2\Pi_{ab}^2F_a(-\Pi_{ab})\bar{F}_b(\Pi_{ab}) - 2\Pi_{ba}^2\bar{F}_a(\Pi_{ba})F_b(-\Pi_{ba}) + \\ + \int_0^{\Pi_{ba}} x^2F_b(-x)dF_a(x) + \int_0^{\Pi_{ba}} x^2F_a(-x)dF_b(x) + \int_{-\Pi_{ba}}^0 x^2\bar{F}_a(-x)dF_b(x) + \int_{-\Pi_{ba}}^0 x^2\bar{F}_b(-x)dF_a(x).$$

Методы численного интегрирования позволяют определить МО  $\bar{N}_{ab}$  и дисперсию  $D_{ab}$  обменного потока мощности. Аналитическое представление приведенных выражений для нормального распределения участвующих в формулах случайных величин затруднительно.

Приближенной оценкой потока мощности по связи может стать разность ожидаемых потоков взаимопомощи от ЭЭС  $A$  к  $B$  и от  $B$  к  $A$  (разд. 4.3):

$$N_{ab} = N_b \Big|_0^\infty - N_a \Big|_0^\infty + \left( N_a + N_b \Big|_{-P_{ba}}^0 \right) \Big|_0^\infty - \left( N_b + N_a \Big|_{-P_{ab}}^0 \right) \Big|_0^\infty.$$

### 6.2.2. Стратегия выравнивания небалансов мощности

Передача небаланса мощности является более широким понятием, нежели переток мощности по межсистемной связи. В частности, передача НМ возможна даже тогда, когда обе ЭЭС дефицитны. Межсистемные связи, как правило, играют роль выравнивания небалансов мощностей между соседними узлами. Действительно, если в ЭЭС  $A$  избыток мощности 100 МВт ( $N_A = -100$ ), а в ЭЭС  $B$  такой же дефицит ( $N_B = 100$ ), то в межсистемной связи будет наблюдаться переток мощности  $N_{ab} = 100$  МВт, а результирующий (с учетом взаимопомощи) НМ в каждой ЭЭС станет равным нулю. Критерий выравнивания НМ с некоторыми оговорками можно распространить на все возможные значения НМ в смежных ЭЭС. В этом случае, передача НМ по хорде  $A-B$  может быть представлена в виде

$$N_{ab} = \frac{1}{2}(N_b - N_a). \quad (6.30)$$

Отсюда

$$\bar{N}_{ab} = \frac{1}{2}(\bar{N}_b - \bar{N}_a); \quad D_{ab} = \frac{1}{4}(D_a + D_b).$$

Данное представление обменного НМ является отражением одной из возможных стратегий распределения суммарного дефицита и резерва мощности. В случае если дефицит, резерв и в целом небаланс мощности распределяются пропорционально нагрузке, то представление потока НМ будет отличаться лишь коэффициентами

$$N_{ab} = \beta N_b - \alpha N_a, \quad (6.31)$$

$$\text{где } \alpha = \frac{L_b}{L_a + L_b} = 1 - \frac{L_a}{L_a + L_b}; \quad \beta = 1 - \alpha = 1 - \frac{L_b}{L_a + L_b}.$$

В стратегии частотного ограничения учитываются коэффициенты статизма нагрузки  $k_i = \Delta L_{i^*} / \Delta f^*$ , что приводит к некоторому изменению коэффициентов:

$$\alpha = k_b L_b \frac{N_a + N_b}{k_a L_a + k_b L_b}; \quad \beta = k_a L_a \frac{N_a + N_b}{k_a L_a + k_b L_b}.$$

При линейной форме распределения НМ (6.31) МО и дисперсия потока НМ

$$\bar{N}_{ab} = \beta \bar{N}_b - \alpha \bar{N}_a; \quad D_{ab} = \beta^2 D_b + \alpha^2 D_a.$$

### 6.2.3. Вычислительные аспекты

Обменная мощность по хорде зависит не только от величины собственного НМ в смежных подсистемах, но и от воздействий остальных подсистем. Данный фактор требует уточнения обменных потоков, что приводит к организации итерационного процесса. На первой итерации обменные потоки по хордам определяются исходя из модели двух систем с одной связью, причем рассматриваемые подсистемы задаются исходными характеристиками НМ. Полученные обменные потоки определяют инъекции  $N_{a(b)}, N_{b(a)}$  НМ в смежных узлах.

Модель радиальной структуры позволяет вычислить вероятностные характеристики НМ подсистем с учетом взаимопомощи ЭЭС. При этом взаимопомощь подсистем учитывается, как правило, по принципу поглощения (суммирования) НМ. В результате будут получены новые характеристики связанных хордами подсистем.

В процессе эквивалентных преобразований радиальной схемы рассматриваемые ЭЭС участвуют с учетом инъекций. В конечном итоге инъекция  $N_{a(b)}$  является составной частью внешних воздействий на ЭЭС  $B$ . Аналогичное заключение можно сделать относительно инъекции  $N_{b(a)}$ . При последующих коррекциях потока НМ по хорде упомянутые инъекции должны быть исключены, поскольку они предопределяют положительную обратную связь - увеличение потока в каком-либо направлении приводит к новому увеличению данного потока.

Действительно, пусть ЭЭС  $A$  и  $B$  связаны с ЭЭС  $C$  линиями электропередачи с ПС  $\infty$  МВт в направлении  $B-C-A$  и 0 МВт в обратном направлении. НМ  $N_a = -200$ ,  $N_b = 100$ ,  $N_c = 0$  МВт. По принципу выравнивания НМ (6.30) начальный поток мощности по хорде  $AB$   $N_{ab} = [100 - (-200)]/2 = 150$  МВт. Для ЭЭС  $B$  данный

поток является генерирующим. В результате суммарный НМ ЭЭС В  $N_{b\sigma}=100-150=-50$  МВт. Этот НМ проходит через ЭЭС С и приходит к ЭЭС А в качестве внешнего воздействия. С учетом внешних воздействий  $N_{a\sigma}=-200-50=-250$  МВт. Поскольку ПС в направлении А-С-В равна нулю, то НМ ЭЭС В не изменяется.

На второй итерации поток НМ по хорде АВ увеличивается на 25 МВт:  $N_{ab}=[100-(-250)]/2=175$  МВт. Данный поток вызовет дальнейшее увеличение потока НМ, что и требовалось показать.

В общем случае новое значение математического ожидания и дисперсии потоков НМ по хордам определяются следующим рекуррентным соотношением:

$$\bar{N}_{ij}^{(k)} = \alpha_i \bar{N}_i^{(k-1)*} - \alpha_j \bar{N}_j^{(k-1)*}; D_{ij}^{(k)} = \alpha_i^2 D_{ij}^{(k-1)*} + \alpha_j^2 D_{ij}^{(k-1)*},$$

где символ \* показывает, что данный параметр является результирующим, полученным в результате расчета радиальной структуры.

Критерием окончания итерационного процесса может служить стабилизация параметров обменных потоков. Итерационный цикл прерывается, если выполняется следующее условие:

$$\Delta = \sqrt{\sum_{i \in U} \left( \frac{\bar{N}_i^{(k)} - \bar{N}_i^{(k-1)}}{\bar{N}_i^{(k-1)}} \right)^2 + \sum_{(i-j) \in X} \left( \frac{\bar{N}_{ij}^{(k)} - \bar{N}_{ij}^{(k-1)}}{\bar{N}_{ij}^{(k-1)}} \right)^2} \leq \varepsilon,$$

где  $\Delta$  - среднеквадратичное значение относительных ошибок;  $\varepsilon$  - заданная точность расчета.

**Пример 6.7.** Методом хорд определить вероятности ЭЭС А, В, С в схеме треугольника с ПС межсистемных связей 50 МВт и параметрами ЭЭС, представленными в табл. 6.16. В качестве хорды принимаем, например, связь АС.

Таблица 6.16

ЭЭС	А	В	С	Ар	Вр	Ср
М	40	20	-50	39,7	19,7	-48
D	900	1600	1600	864	1532	1325

Для участия в расчетном процессе НМ ЭЭС должны быть редуцированы ПС смежных связей. Данная операция отражена в табл. 6.17 (столбцы 5-7).



Таблица 6.17

	<i>A</i>	<i>C</i>	<i>CA</i>	<i>C+CA</i>	$(C+CA)p$	$(C+CA)p+B$	$[(C+CA)p+B]p$	$(C+CA)^*$	<i>A</i> *
M	39,7	-48,0	43,9	-4,1	-3,1	16,9	11,0	-2	13,0
D	864	1325	547	1873	1137,8	2738	1263	525	738,1

Процесс преобразования радиальной схемы в направлении *C-B-A* представлен в табл. 6.17, а в направлении *A-B-C* – в табл. 6.18. Содержимое столбцов *A*, *C* выбрано из табл. 6.16 (столбцы 5,7). Параметры потока НМ по хорде в направлении *CA* записаны в четвертом столбце табл. 6.17. В частности  $M_{CA}=(M_{Ap}-M_{Cp})/2=(39,7+48)/2=43,85$  МВт;  $D_{CA}=(D_{Ap}+D_{Cp})/4=(864+1325)/4=547$  МВт<sup>2</sup>.

Таблица 6.18

	<i>A</i>	<i>C</i>	<i>AC</i>	<i>AC+A</i>	$(AC+A)p$	$(AC+A)p+B$	$[(AC+A)p+B]p$	$(A+AC)^*$	<i>C</i> *
M	39,7	-48	-43,9	-4,1	-3,4	16,6	11,1	-2,2	13,3
D	864	1325	547	1412	988	2588	1236	472	764,2

В следующих столбцах полученные значения редуцируются ПС связи *CB* (50 МВт), суммируются с параметрами НМ ЭЭС *B* и снова редуцируются ПС связи *BA* (50 МВт). В результате формируется внешнее воздействие на ЭЭС *A*, включающее поток НМ по хорде и НМ ЭЭС *C*. Для последующей коррекции параметров потока по хорде необходимо указанные составляющие вычленив из результирующего внешнего воздействия.

В более точных расчетах необходимо определить удельный вес составляющих в суммарном вкладе. В данных иллюстрационных расчетах можно принять, что ограничение вклада от ЭЭС *C* и хорды при редуцировании пропорционально ограничению суммы. В этом случае вклад от ЭЭС *C* и хорды составляет  $M(C+CA)^*=-3,1 \cdot (11/16,9)=-2$ ;  $D(C+CA)^*=1137 \cdot (1263/2738)=525$ .

В результате внешнее воздействие на ЭЭС *A*, участвующее в расчете потока по хорде,  $M_A^*=11-(-2)=13$  МВт;  $D_A^*=1263-525=738$  МВт<sup>2</sup>. Аналогично рассчитывается внешнее воздействие на ЭЭС *C* (см. табл. 6.18)  $M_C^*=13,3$  МВт;  $D_C^*=764,2$  МВт<sup>2</sup>. Добавки НМ в ЭЭС *A* и *C* практически одинаковы. Это является отражением симметрии схемы.

Следует заметить, что оставшееся внешнее воздействие вызвано одной причиной – НМ ЭЭС В. Следовательно добавки НМ в ЭЭС А и С являются коррелированными случайными величинами с корреляционным моментом

$$Cov(A^*, C^*) = \sqrt{D_{A^*} D_{C^*}} = \sqrt{738,1 \cdot 764,2} = 751 \text{ МВт}^2.$$

Новые параметры потока НМ по хорде практически остались неизменными:

$$M_{CA} = (M_{Ap} + M_{A^*} - M_{Cp} - M_{C^*})/2 = (39,7 + 13 + 48 - 13,3)/2 = 43,7 \text{ МВт};$$

$$D_{CA} = (D_{Ap} + D_{A^*} + D_{Cp} + D_{C^*} - 2 Cov(A^*, C^*))/4 = \\ = (864 + 738 + 1325 + 764,2 - 2 \cdot 751)/4 = 547 \text{ МВт}^2.$$

Дополнительная итерация не требуется.

Результирующие показатели надежности узлов ОЭЭС определяются исходя из того, что поток НМ по хорде рассматривается как спрос (предложение) со стороны смежной ЭЭС. Используя процедуру эквивалентного генератора, получаем

$$M_{A\text{рез}} = M_A + MG_{AC}^e + MG_{A^*}^e = M_A + M^p(M_{AC}, D_{AC}, -\infty, 0) + M^p(M_{A^*}, D_{A^*}, -\infty, 0) = \\ = 40 + M_p(-43,9, 547, -\infty, 0) + M_p(13, 738, -\infty, 0) = -9,73;$$

$$D_{A\text{рез}} = D_A + DG_{AC}^e + DG_{A^*}^e = D_A + D^p(M_{AC}, D_{AC}, -\infty, 0) + D^p(M_{A^*}, D_{A^*}, -\infty, 0) = \\ = 900 + D^p(-43,9, 547, -\infty, 0) + D^p(13, 738, -\infty, 0) = 1549.$$

Вероятность дефицита мощности в ЭЭС А

$$P_A = 1 - F(0; -9,73; 1549) = 0,4.$$

Аналогично определяется вероятность дефицита мощности в ЭЭС С

$$M_{C\text{рез}} = M_C + MG_{CA}^e + MG_{C^*}^e = M_C + M^p(M_{CA}, D_{CA}, -\infty, 0) + M^p(M_{C^*}, D_{C^*}, -\infty, 0) = \\ = -50 + M^p(43,9; 547, -\infty, 0) + M^p(13,3; 764,2; -\infty, 0) = -55,9;$$

$$D_{C\text{рез}} = D_C + DG_{CA}^e + DG_{C^*}^e = D_C + D^p(M_{CA}, D_{CA}, -\infty, 0) + D^p(M_{C^*}, D_{C^*}, -\infty, 0) = \\ = 1600 + D^p(43,9; 547, -\infty, 0) + D^p(13,3; 764,2; -\infty, 0) = 1739.$$

Вероятность дефицита мощности в ЭЭС С

$$P_C = 1 - F(0; -55,9; 1739) = 0,09.$$

Несколько иначе определяется вероятность дефицита мощности в ЭЭС В. На ЭЭС С действуют внешние воздействия (АС+А)р и (С+СА)р со стороны ЭЭС А и С. В этих воздействиях присутствуют коррелированные случайные ве-

личины – инъекции, вызванные потоком НМ по хорде. Отсюда для адекватного учета корреляционного момента необходимо выделить эти величины и просуммировать их отдельно. Вновь принимаем допущение пропорциональности составляющих в суммарном редуцированном распределении:

$$\begin{aligned}
 M_{CA}^* &= 43,9 \cdot 3,1/4,1 = 33,19 \text{ МВт}; & M_C^* &= -48 \cdot 3,1/4,1 = -36,3 \text{ МВт}; \\
 D_{CA}^* &= 547 \cdot 1137,8/1873 = 332,3 \text{ МВт}^2; & D_C^* &= 1325 \cdot 1137,8/1873 = 805 \text{ МВт}^2; \\
 M_{AC}^* &= -43,9 \cdot 3,4/4,1 = -36,4 \text{ МВт}; & M_A^* &= 39,7 \cdot 3,4/4,1 = 32,9 \text{ МВт}; \\
 D_{AC}^* &= 547 \cdot 988/1412 = 382,7 \text{ МВт}^2; & D_A^* &= 864 \cdot 988/1412 = 604,5 \text{ МВт}^2; \\
 cov(AC^*, CA^*) &= \sqrt{332,3 \cdot 382,7} = 356,6 \text{ МВт}^2; \\
 M_x &= M_{AC}^* + M_{CA}^* = -36,4 + 33,19 = -3,21 \text{ МВт}; \\
 D_x &= D_{AC}^* + D_{CA}^* - 2 \cdot cov(AC^*, CA^*) = 382,7 + 332,3 - 2 \cdot 356,6 = 1,8 \text{ МВт}^2.
 \end{aligned}$$

В рассматриваемом примере воздействие от потока по хорде практически равно нулю. Им можно было бы пренебречь. Однако это не правило, а, скорее, исключение, объясняемое спецификой (симметрией) расчетной схемы.

Результирующие вероятностные параметры и показатели ЭЭС В

$$\begin{aligned}
 M_{\text{Врез}} &= M_B + MG_{A^*}^e + MG_{C^*}^e + MG_x^e = M_B + M^p(M_{A^*}, D_{A^*}, -\infty, 0) + M^p(M_{C^*}, D_{C^*}, -\infty, 0) + \\
 &+ M^p(M_x, D_x, -\infty, 0) = \\
 &= 20 + M^p(32,9; 604,5, -\infty, 0) + M^p(-36,3; 805; -\infty, 0) + M^p(-3,21; 1,8; -\infty, 0) = -21,9; \\
 D_{\text{Врез}} &= D_B + DG_{A^*}^e + DG_{C^*}^e + DG_x^e = D_B + D^p(M_{A^*}, D_{A^*}, -\infty, 0) + D^p(M_{C^*}, D_{C^*}, -\infty, 0) + \\
 &+ D^p(M_x, D_x, -\infty, 0) = \\
 &= 1600 + D_p(32,9; 604,5, -\infty, 0) + D_p(-36,3; 805; -\infty, 0) + D_p(-3,21; 1,8; -\infty, 0) = 2295.
 \end{aligned}$$

Вероятность дефицита мощности в ЭЭС В

$$P_B = 1 - F(0; -21,9; 2295) = 0,324.$$

Сопоставление с расчетами примера 6.4 говорит о том, что получены, скорее, оптимистические, нежели пессимистические результаты, поскольку поток по хорде практически не повлиял на показатели надежности ЭЭС.

Относительно слабое влияние потоков НМ по хордам на результирующие показатели надежности узлов позволяет в экспресс-расчетах симметричных схем ограничиваться одной итерацией, т.е. определять потоки НМ по хордам по двух-

узловой схеме. Более точная оценка потока по хорде будет, если расширить двухузловую схему узлами следующего уровня смежности (оставляя структуру схемы радиальной).

### Сходимость итерационного процесса

Сходимость итерационного процесса во многом зависит от выбора хорд. Расчеты показывают, что наилучшим решением здесь является выбор хорд из числа «слабых» связей, т.е. тех, которые имеют наименьшую пропускную способность и влияние которых на результирующие показатели надежности незначительно. Это можно реализовать с помощью следующего простого алгоритма формирования остова расчетного графа. В качестве исходного узла принимается узел максимальной суммарной пропускной способности всех инцидентных межсистемных связей:

$$\alpha: \Pi_{\alpha} = \max_j \left\{ \sum_{i \in U_j} \Pi_{ij}, \sum_{i \in U_j} \Pi_{ji} \right\}; \quad (6.32)$$

где  $U_j$  - множество узлов, инцидентных узлу  $j$ .

Узел  $\alpha$ , удовлетворяющий условию (6.32) включается в остов (дерево) графа:  $\alpha \in D$ . Из всех примыкающих к узлу  $\alpha$  связей выбирается и включается в состав дерева та, которая имеет максимальную пропускную способность.

Узел ( $\beta: \Pi_{\alpha\beta} = \max(\Pi_{\alpha i}); i \in U_{\alpha}, i \notin D$ ), который является концом выбранной связи, также включается во множество  $D$ . Этот процесс продолжается до тех пор, пока не будут включены во множество  $D$  все узлы схемы. Связи, не входящие в дерево считаются хордами.

Как правило, итерационный процесс носит колебательный характер и практически сходится не более чем за 5-7 итераций. С увеличением числа хорд и узлов характер сходимости и число итераций реально не изменяются. Для снижения колебательного характера расчетного процесса в программном модуле рекомендуется вводить коэффициент демпфирования  $K_d$ , значения которого принимаются в диапазоне от 1 до 2:

$$\bar{N}_{ij}^{(k+1)} = \bar{N}_{ij}^{(k)} + K_d \frac{\bar{N}_{ij}^{(k+1)} - \bar{N}_{ij}^{(k)}}{2}.$$

При  $K_d=2$  демпфирующий эффект исчезает. При  $K_d=1$ , как правило, наблюдается экспоненциальная сходимость. Поэтому демпфирование целесообразно применять при резких колебаниях анализируемых величин, особенно на первых итерациях.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

---

Существующие и предлагаемые методы расчета балансовой надежности сложнзамкнутой ОЭЭС позволяют получить практически все вероятностные параметры и показатели, необходимые для решения широкого спектра задач перспективного планирования и эксплуатации энергосистем.

Результирующие показатели существенно зависят от выбора стратегии распределения небаланса мощности. Наиболее оптимистические оценки имеют место, когда все ЭЭС представлены эквивалентной генерацией. Пессимистические оценки характерны для стратегии «локального эгоизма», при которой ЭЭС предоставляет лишь избыточную генерирующую мощность, и двухузловой эквивалентной структуры ОЭЭС: рассматриваемая ЭЭС – все остальные системы.

Предназначенные для расчета балансовой надежности ЭЭС программные комплексы должны быть адаптированы к специфике задач (планирование развития или эксплуатация ЭЭС, уточненные или оценочные расчеты и др.), должны позволять выбрать надлежащую модель нагрузки и генерации.

В задачах с относительно длительным расчетным периодом (квартал, год, несколько лет) большое значение имеет адекватное отображение плана капитальных ремонтов основного оборудования ЭЭС и его согласование с ожидаемым графиком нагрузки энергосистемы.

Математический аппарат вероятностных рядов является базовым при решении задач балансовой надежности ЭЭС. Для описания вероятностного состава генерирующего оборудования используется биномиальное распределение с возможным эквивалентированием либо некоторого множества генераторов, либо части вероятностного ряда.

Нагрузка энергосистемы, как правило, представляется нормальным распределением. Для вычисления частоты и глубины дефицита мощности ЭЭС нагрузка представляется суточным графиком с нормальным распределением мощ-

ности на каждой ступени графика. Представление нагрузки в виде годового графика по продолжительности без учета коррелирующей связи с составом генерирующего оборудования может привести к существенной погрешности расчетов.

Математический аппарат редуцированных распределений является мощным инструментарием при анализе балансовой надежности сложнзамкнутых ОЭЭС.

Для определения показателей балансовой надежности сложных структур достаточно эффективны методы преобразования расчетной схемы путем исключения узлов или эквивалентного преобразования схемы к радиальному виду (метод хорд).

Несмотря на достаточно большое число методов решения задачи БН энергосистем, ее нельзя считать до конца решенной. В частности, более углубленного анализа требуют проблемы оперативного распределения резервов и дефицитов мощности, учета неопределенности исходных данных, получения частотных и временных характеристик дефицита мощности, связи задач баланса мощности и энергии.

## СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

---

БН – балансовая надежность  
ВНМ – второй начальный момент  
ВР – вероятностный ряд  
ИС – интегральная составляющая  
МО – математическое ожидание  
НМ- небаланс мощности  
НС - неинтегральная составляющая  
ОЭЭС- объединенная электроэнергетическая система  
ПР- плотность распределения  
ПС- пропускная способность  
СКО – среднее квадратичное отклонение  
СН- структурная надежность  
ФР – функция распределения  
ЧВР – частотно-вероятностный ряд  
ЭЭС - электроэнергетическая система



## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

---

1. Руденко Ю.Н., Чельцов М.Б. Надежность и резервирование в энергосистемах. Новосибирск: Наука, 1974.
2. Китушин В.Г. Надежность энергетических систем. М.: Высшая школа, 1984.
3. Розанов М.Н. Надежность электроэнергетических систем. М.: Энергоатомиздат, 1984.
4. Гук Ю.Б. Анализ надежности электроэнергетических установок. Л.: Энергоатомиздат, 1988.
5. Арзамасцев Д.А., Обоскалов В.П. Расчет показателей структурной надежности энергосистем. Свердловск: Изд-во УПИ, 1986.
6. Биллингтон Р., Аллан Р. Оценка надежности электроэнергетических систем: Пер. с англ. М.: Энергоатомиздат, 1988.
7. Дубицкий М.А., Руденко Ю.Н., Чельцов М.Б. Выбор и использование резервов генерирующей мощности в электроэнергетических системах. М.: Энергоатомиздат, 1988.
8. Надежность систем энергетики и их оборудования. Справочник: В 4-х т. / Под общей ред. Ю.Н.Руденко. Т. 2. Надежность электроэнергетических систем. Справочник / Под ред. М.Н.Розанова. М.: Энергоатомиздат, 2000.
9. Обоскалов В.П. Резервы мощности в электроэнергетических системах. Свердловск: Изд. УПИ, 1989.
10. Справочник по общим моделям анализа и синтеза надежности систем энергетики. / Под общей ред. Ю.Н. Руденко М.: Энергоатомиздат 1994.

11. Эндрэни Дж. Моделирование при расчетах надежности в электроэнергетических системах. М.: Энергоатомиздат, 1983.
12. Гольденберг Ф.Д., Каплинский Э.М., А.И.Лазеебник. Модели для анализа перспективных режимов и надежности энергосистем. Кишинев: «Штиница», 1988.
13. Чукреев Ю.Я. Модели обеспечения надежности электроэнергетических систем. Сыктывкар: Коми НЦ УрО РАН, 1995.
14. Барлоу Р., Прошан Ф. Статистическая теория надежности и испытания на безотказность. М.: Наука, 1984.
15. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. Математические методы в теории надежности. М.: Наука, 1965.
16. Козлов Б.А., Ушаков И.А. Справочник по расчету надежности радиоэлектронной аппаратуры. М.: Советское радио, 1966.
17. Руденко Ю.Н., Ушаков И.А. Надежность систем энергетики. Новосибирск: Наука.1989.
18. Рябинин И.А. Основы теории и расчета надежности судовых электроэнергетических систем. Л.: Судостроение,1967.
19. Гук Ю.Б., Козак Н.А., Мясников А.В. Теория и расчет надежности систем электроснабжения. М.: Энергия, 1970.
20. Непомнящий В.А. Учет надежности при проектировании энергосистем. М.: Энергия, 1978.
21. Зорин В.В., Тисленко В.В., Клеппель Ф., Адлер Г. Надежность систем электроснабжения. К.: Вища школа, 1984.
22. Михайлов В.В. Надежность электроснабжения промышленных предприятий. М.: Энергоиздат, 1982.

23. Синчугов Ф.И. Надежность электрических сетей энергосистем. М.: ЭНАС, 1998.
24. Фокин Ю.А., Туфанов В.А. Оценка надежности систем электроснабжения. М.: Энергоиздат, 1981
25. Фокин Ю.А. Вероятностно - статистические методы в расчетах систем электроснабжения. М.: Энергоатомиздат, 1985.
26. Фархадзаде Э.М. Имитационная модель анализа структурной надежности электроустановок // Методические вопросы исследования надежности больших систем энергетики. Вып.22. Иркутск: СЭИ СО АН СССР, 1981. С.157-161.
27. Лосев Э.А. Основные положения расчета надежности систем электроснабжения промышленных предприятий // Изв. вузов. Электромеханика, 1985, № 7. С.55-60.
28. Ю.Н.Кучеров, О.М.Кучерова, Е.Д.Тарасов и др. Оценка режимной надежности электрических систем с учетом пропускной способности // Экономичность и надежность функционирования электроэнергетических систем. Новосибирск: Наука, 1986. С. 120-126.
29. Абраменкова Н.А., Воропай Н.И., Заславская Т.Б. Структурный анализ электроэнергетических систем. Новосибирск: Наука, 1990.
30. Волков Г.А. Оптимизация надежности электроэнергетических систем. М.: Наука.1986.
31. Манов Н.А., Слободян Ю.В., Кузнецова И.Ф. Оценка надежности электроэнергетической системы. Сыктывкар: Коми ФАН СССР, 1980.
32. Маркович И.М. Режимы энергетических систем. М.: Энергия, 1969.
33. Справочник по проектированию электроэнергетических систем. / Под ред. С.С. Рокотяна и И.М. Шапиро. М.: Энергоатомиздат, 1985.

34. Тестовая схема 2 // Методические вопросы исследования надежности больших систем энергетики. Вып. 28. Иркутск: Изд. СЭИ, 1984. С.31-44.
35. Лебедева Л.М., Федотова Г.А. Программно-вычислительный комплекс РЕЗЕРВ - реализация методики рационального использования резервов мощности в ЭЭС // Методические вопросы исследования надежности больших систем энергетики. Вып. 22. Иркутск: СЭИ, 1981. С. 47-53.
36. Руденко Ю.Н., Федотова Г.А., Чельцов М.Б. Методика планирования ремонтов генерирующего оборудования при рациональном распределении резервов мощности в электроэнергетических системах. // Методические вопросы исследования надежности больших систем энергетики. Вып. 12. Иркутск: Изд. СЭИ, 1976. С.123-134.
37. Руденко Ю.Н., Розанов М.Н., Ковалев Г.Ф., Федотова Г.А. и др. Резервы мощности в электроэнергетических системах стран-членов СЭВ. Методы исследования. Новосибирск: Наука, 1988.
38. Иткин Е.А. Методы решения проблемы оптимального резервирования в ЭЭС и пути их совершенствования // Изв. АН СССР. Сер. Энергетика и транспорт. 1984, №2. С.37-44.
39. Непомнящий В.А. Экономические проблемы повышения надежности электроснабжения. Ташкент: ФАН, 1985.
40. Иткин Е.А., Шадрин В.А. Построение модели анализа надежности сложной электроэнергетической системы с использованием аппроксимирующих кривых для описания случайных величин. // Методические вопросы исследования надежности больших систем энергетики. Вып 12. Иркутск: СЭИ СО АН СССР, 1976. С.44-50.
41. Ковалев Г.Ф. Сопоставительный анализ результатов исследований надежности ЭЭС, выполненный с помощью разных программ // Методические вопросы исследования надежности больших систем энергетики. Вып 41. Иркутск: СЭИ СО АН СССР, 1991. С.53-59.

42. Барановский А.И., Бойко Н.Д., Кузьмин В.В. О некоторых проблемах перестройки экономических отношений в электроэнергетике России. // Энергетик, 1994. №10. С. 6-10.

43. Ковалев Г.Ф., Кочергина Н. Результаты исследований балансовой надежности (безотказности и ремонтпригодности) ЭЭС по тестовой схеме с помощью программы ЯНТАРЬ. // Методические вопросы исследования надежности больших систем энергетики. Вып 41. Иркутск: СЭИ СО АН СССР, 1991. С.16-29.

44. Могирев В.В. Алгоритм и программа вычислений показателей надежности электроэнергетических систем методом статистического моделирования (программа «Поток»). // Методические вопросы исследования надежности больших систем энергетики. Вып 4. Иркутск: СЭИ СО АН СССР, 1975. С.24-35.

45. Иванов В.В., Колосок Г.В. Результаты исследований надежности ЭЭС по тестовой схеме с помощью программы ПОТОК-3.

46. Гамм А.З. Моделирование рынка технических услуг электроэнергетических систем. // Изв. РАН-Энергетика, 1997, N1. С. 116-122.

47. Обоскалов В.П. Оценка показателей балансной надежности электроэнергетических систем методами вероятностного моделирования // Изв. РАН . Энергетика. 1994. №3. С.15-20.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

---

ПРЕДИСЛОВИЕ .....	4
ВВЕДЕНИЕ .....	5
Глава 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ БАЛАНСОВОЙ НАДЕЖНОСТИ ЭЭС.....	9
1.1. Функции распределения .....	9
1.1.1. Оптимальный резерв мощности в концентрированной ЭЭС .....	10
1.1.2. Распределения дискретных случайных величин.....	12
1.1.3. Распределения непрерывных случайных величин.....	16
1.1.4. Свертка функций распределения.....	22
1.2. Метод пространства состояний .....	22
1.2.1. Вероятности состояний .....	24
1.2.2. Частота и продолжительность состояний.....	27
1.2.3. Последовательное соединение элементов .....	30
1.2.4. Параллельное соединение элементов.....	33
Глава 2. МЕТОД СТАТИСТИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ.....	36
2.1. Число испытаний.....	38
2.2. Метод взвешенных испытаний .....	40
2.3. Чувствительность идентификации .....	41
2.4. Проклятие многомерности .....	43
2.5. Распределение дефицита мощности.....	44
Глава 3. МЕТОД ВЕРОЯТНОСТНЫХ РЯДОВ .....	47
3.1. Свертка вероятностей .....	47
3.2. Свертка частот .....	48
3.2.1. Частота состояний биномиального распределения .....	49
3.2.2. Коррекция ВР при отключении агрегатов .....	52
3.2.3. Частота захода .....	55
3.2.4. Частота объединения .....	57
3.3. Модель нагрузки .....	60
3.3.1. Нагрузка с заданной функцией распределения.....	61
3.3.2. Метод частоты и продолжительности.....	67
3.3.2.1. Простая двухуровневая структура.....	67
3.3.2.2. Вероятностная двухуровневая структура .....	68
3.3.2.3. Многоуровневая структура. Случайная длительность ступеней .....	69

3.3.2.4. Случайная величина нагрузки на ступени суточного графика.....	70
3.3.2.5. Композиция суточных графиков .....	73
3.3.3. Частотно-вероятностный ряд небаланса мощности .....	74
3.4. Эквивалентирование вероятностного ряда.....	76
3.4.1. Раздельное представление данных: нагрузка - генерация .....	77
3.4.1.1. Начальные моменты распределения смеси .....	78
3.4.2. “Эквивалентная генерация” .....	80
3.4.3. Эквивалентная генерирующая система.....	83
3.4.4. Эквивалентирование частоты .....	86
Глава 4. РАСЧЕТ БАЛАНСОВОЙ НАДЕЖНОСТИ В РАДИАЛЬНОМ ОБЪЕДИНЕНИИ ЭНЕРГОСИСТЕМ.....	87
4.1. Редуцированное распределение.....	88
4.1.1. Математическое ожидание редуцированного нормального распределения.....	90
4.1.2. Дисперсия редуцированного нормального распределения.....	91
4.1.3. ВР интервала редуцирования.....	93
4.1.4. Редуцирование комбинированного распределения .....	93
4.2. Математическое ожидание дефицита мощности в концентрированной ЭЭС.....	94
4.3. Объединение двух ЭЭС. Стратегия «локального эгоизма» .....	97
4.4. Переток мощности по связи в замкнутой системе.....	103
4.4.1. Функция распределения перетока мощности.....	104
4.4.2. Вероятность отсутствия перетока мощности по связи.....	107
4.4.3. Математическое ожидание перетока мощности .....	108
4.5. Эквивалентные преобразования расчетной схемы .....	110
4.5.1. Исключение узлов первого ранга .....	111
4.5.2. Однородное редуцированное распределение .....	114
Глава 5. АНАЛИТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ РЕДУЦИРОВАННЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ .....	118
5.1. Функция распределения суммы редуцированных НМ.....	118
5.1.1. Неинтегральные составляющие.....	119
5.1.2. Интегральная составляющая .....	119
5.1.3. Графическая интерпретация.....	124
5.1.4. Эквивалентирование интеграла .....	125
5.1.4.1. Нормальное распределение в области треугольника .....	129
5.1.4.2. Гамма-распределение.....	134

5.1.5. Свертка редуцированного и нередуцированного нормальных распределений .....	136
5.2. Цепочечные схемы .....	137
5.3. Вероятностный ряд пропускной способности связи .....	143
5.3.1. Взвесь редуцированных распределений .....	144
5.3.2. Эквивалентирование функции распределения .....	147
5.4. Схема звезды .....	149
5.5. Вероятностные характеристики отдельных подсистем .....	150
Глава 6. МНОГОКОНТУРНЫЕ СТРУКТУРЫ .....	154
6.1. Исключение узлов второго ранга .....	156
6.1.1. Пропорциональное распределение НМ исключаемого узла .....	157
6.1.1.1. «Электрический» эквивалент .....	158
6.1.1.2. Динамический коэффициент пропорциональности .....	158
6.1.2. Распределение НМ исключаемого узла .....	162
6.1.3. Принцип выравнивания .....	168
6.1.4. Пропускная способность эквивалентной связи .....	170
6.1.5. Суммарное воздействие .....	173
6.1.6. Критерий равенства баланса спроса и предложений .....	177
6.1.7. Матричное преобразование вероятностных рядов .....	182
6.1.8. Исключение узлов ранга два с шунтирующей связью .....	186
6.1.9. Исключение узлов ранга три и выше .....	192
6.1.10. Высококонцентрированная энергосистема .....	195
6.2. Метод хорд .....	196
6.2.1. Стратегия локального эгоизма .....	197
6.2.2. Стратегия выравнивания небалансов мощности .....	198
6.2.3. Вычислительные аспекты .....	199
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	206
СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ .....	208
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК .....	209



Научное издание

**Владислав Петрович Обоскалов**  
**НАДЕЖНОСТЬ ОБЕСПЕЧЕНИЯ БАЛАНСА МОЩНОСТИ**  
**ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Редактор издательства – И.Г.Южакова

Корректор – М.Ю. Петров

Компьютерный набор авторский

ИД № 06263 от 12.11.2001 г.

---

Подписано в печать	26.11.2001	Формат	60x84 1/16
Бумага писчая	Плоская печать	Усл. печ. л.	11,74
Уч.-изд.л. 10,0	Тираж 200 экз.	Заказ 1495	Цена "С"

---

Редакционно-издательский отдел ГОУ ВПО УГТУ-УПИ

620002, Екатеринбург, ул. Мира,19

4-й цех АООТ "Полиграфист"

Екатеринбург, Тургенева,20