

ББК 22.17  
Р 94

Утверждено  
РИС Ученого совета  
Российского университета  
дружбы народов

Рецензент –  
доктор технических наук, профессор *Е.В. Гливенко*

**Рыков В.В.**

Р 94 Теория случайных процессов: Конспекты лекций. – М.: РУДН, 2009. – 233 с.

ISBN 978-5-209-03067-6

Настоящее издание включает конспекты лекций, читавшихся в течение ряда лет студентам специальности «Прикладная математика и компьютерное моделирование» Российского государственного университета нефти и газа им. И.М. Губкина и студентам специальности «Теория вероятностей и математическая статистика» Российского университета дружбы народов.

Материал основан на традиционных курсах теории случайных процессов. Некоторой особенностью данного курса, ориентированного на студентов специальности «Прикладная математика и информатика», является замена полных доказательств некоторых фундаментальных теорем их комментариями, позволяющими уяснить особенности доказательства, обойти сложные громоздкие вычисления и показать наличие «тонких мест», но не исследовать их досконально.

Основной единицей курса является параграф, поэтому нумерация формул, рисунков, таблиц, теорем и т.п. своя внутри каждого параграфа. При ссылках на формулы из других параграфов используется двойная нумерация. В конце каждого параграфа приведены вопросы для самоконтроля, упражнения, задачи и краткие библиографические комментарии.

Для студентов специальностей «Прикладная математика и информатика», «Компьютерные науки».

Автор выражает особую признательность В.А. Кокотушкину, которым подготовлена часть задач, а также Д.В. Козыреву оказавшему большую помощь в подготовке и оформлении текста.

ISBN 978-5-209-03067-6

ББК 22.17

© Рыков В.В., 2009

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>3</b>
1.	Основные понятия . . . . .	3
1.1.	Предмет теории случайных процессов. Примеры	3
1.2.	Определение и классификация случайных функций. Терминология и обозначения . . . . .	4
1.3.	Конструктивное построение случайных функций	6
1.4.	Дополнения . . . . .	7
2.	Каноническое вероятностное пространство . . . . .	11
2.1.	Конечномерные распределения . . . . .	11
2.2.	Теорема Колмогорова . . . . .	12
2.3.	Пример: гауссовский процесс . . . . .	13
2.4.	Дополнения . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Процессы восстановления</b>	<b>16</b>
3.	Случайные блуждания . . . . .	16
3.1.	Вероятностная модель последовательности н.о.р. с.в. . . . .	16
3.2.	Случайные блуждания. Определение. К.м.р. . .	17
3.3.	Предельные теоремы для случайных блужданий	19
3.4.	Дополнения . . . . .	19
4.	Процессы восстановления . . . . .	21
4.1.	Определение . . . . .	21
4.2.	Распределение числа восстановлений . . . . .	23
4.3.	Производящая функция числа восстановлений .	24
4.4.	Пример. Пуассоновский процесс . . . . .	25

4.5.	Дополнения . . . . .	26
5.	Функция и уравнения восстановления . . . . .	29
5.1.	Функция восстановления . . . . .	29
5.2.	Уравнения восстановления . . . . .	32
5.3.	Теоремы восстановления . . . . .	33
5.4.	Предельные теоремы для процессов восстановления . . . . .	37
5.5.	Дополнения . . . . .	38
6.	Процессы, связанные с процессом восстановления . . . . .	41
6.1.	Возраст и остаточное время жизни элемента . . . . .	41
6.2.	Предельное распределение возраста и остаточного времени жизни . . . . .	43
6.3.	Альтернирующий процесс восстановления . . . . .	44
6.4.	Процесс накопления . . . . .	46
6.5.	Регенерирующие процессы* . . . . .	51
6.6.	Дополнения . . . . .	54
<b>3</b>	<b>Цепи Маркова . . . . .</b>	<b>57</b>
7.	Определение. Основные свойства . . . . .	57
7.1.	Определения . . . . .	57
7.2.	Примеры. . . . .	61
7.3.	Основные задачи теории цепей Маркова . . . . .	67
7.4.	Теорема Колмогорова . . . . .	71
7.5.	Дополнения . . . . .	74
8.	Классификация состояний и цепей . . . . .	77
8.1.	Классификация состояний . . . . .	77
8.2.	Канонический вид матрицы вероятностей переходов . . . . .	81
8.3.	Вероятности первого достижения и связанные с ними характеристики . . . . .	84
8.4.	Дополнения . . . . .	88
9.	Обрывающиеся и поглощающие цепи . . . . .	91
9.1.	Вводные замечания . . . . .	91
9.2.	Фундаментальная матрица и ее свойства . . . . .	93
9.3.	Время пребывания в несущественных состояниях . . . . .	97
9.4.	Вероятности поглощения . . . . .	100
а в	п . . . . .	100

9.6.	Дополнения . . . . .	104
10.	Эргодические цепи . . . . .	106
10.1.	Возвратность . . . . .	106
10.2.	Инвариантные вероятности. . . . .	111
10.3.	Предельные теоремы для переходных вероятностей . . . . .	113
10.4.	Эргодические теоремы . . . . .	117
10.5.	Фундаментальная матрица эргодических цепей и ее свойства. . . . .	121
10.6.	Дополнения . . . . .	123
11.	Счетные марковские цепи . . . . .	126
11.1.	Вводные замечания . . . . .	126
11.2.	Определение . . . . .	127
11.3.	Классификация состояний . . . . .	129
11.4.	Асимптотическое поведение счетных цепей . . . . .	135
11.5.	Критерии положительной возвратности . . . . .	139
11.6.	Дополнения . . . . .	139
<b>4</b>	<b>Скачкообразные марк. и полумарк. процессы</b>	<b>142</b>
12.	Скачкообразные марковские процессы . . . . .	142
12.1.	Определение . . . . .	142
12.2.	Примеры . . . . .	145
12.3.	Конечномерные распределения. Теорема Колмогорова . . . . .	147
12.4.	Дополнения . . . . .	149
13.	Стандартные марковские процессы . . . . .	150
13.1.	Матрица интенсивностей переходов . . . . .	150
13.2.	Уравнения Колмогорова для переходных вероятностей . . . . .	152
13.3.	Структура марковского процесса . . . . .	153
13.4.	Дополнения . . . . .	158
14.	Классификация состояний. Устойчивость . . . . .	159
14.1.	Классификация состояний . . . . .	159
14.2.	Устойчивость . . . . .	164
14.3.	Связь марковских процессов с цепями . . . . .	167
14.4.	Дополнения . . . . .	168

15.1.	Уравнения для вероятностей состояний . . . . .	170
15.2.	Время достижения . . . . .	171
15.3.	Предельная теорема для марковских процессов . . . . .	175
15.4.	Эргодическая теорема . . . . .	179
15.5.	Критерии положительной возвратности . . . . .	181
15.6.	Дополнения . . . . .	182
16.	Процессы рождения и гибели . . . . .	187
16.1.	Определение . . . . .	187
16.2.	Уравнения Колмогорова . . . . .	188
16.3.	Стационарные вероятности . . . . .	189
16.4.	Условие положительной возвратности ПРГ . . . . .	190
16.5.	Дополнения . . . . .	191
17.	Примеры . . . . .	193
17.1.	Процесс чистого размножения . . . . .	193
17.2.	Процесс чистой гибели . . . . .	195
17.3.	Система Эрланга $M M n 0$ . . . . .	196
17.4.	Система $M M 1 \infty$ . . . . .	197
17.5.	Дополнения . . . . .	198
18.	Полумарковские процессы . . . . .	200
18.1.	Определение . . . . .	200
18.2.	Полумарковская матрица и ее свойства . . . . .	201
18.3.	Процессы, связанные с полумарковскими . . . . .	202
18.4.	Классификация состояний ПМП . . . . .	204
18.5.	Дополнения . . . . .	205
19.	Процесс и матрица марковского восстановления . . . . .	207
19.1.	Процесс марковского восстановления . . . . .	207
19.2.	Матрица марковского восстановления . . . . .	208
19.3.	Уравнения марковского восстановления . . . . .	209
19.4.	Одномерные распределения ПМП . . . . .	210
19.5.	Дополнения . . . . .	212
20.	Предельная и эргодическая теоремы для ПМП . . . . .	213
20.1.	Предельная теорема . . . . .	213
20.2.	Эргодическая теорема . . . . .	215
20.3.	Дополнения . . . . .	217
21.	Полурегенерирующие процессы . . . . .	218

21.1.	Определение . . . . .	218
21.2.	Примеры . . . . .	220
21.3.	Сопровождающие процессы . . . . .	221
21.4.	Одномерные распределения ПРП . . . . .	223
21.5.	Предельная и эргодическая теоремы . . . . .	224
21.6.	Дополнения . . . . .	224