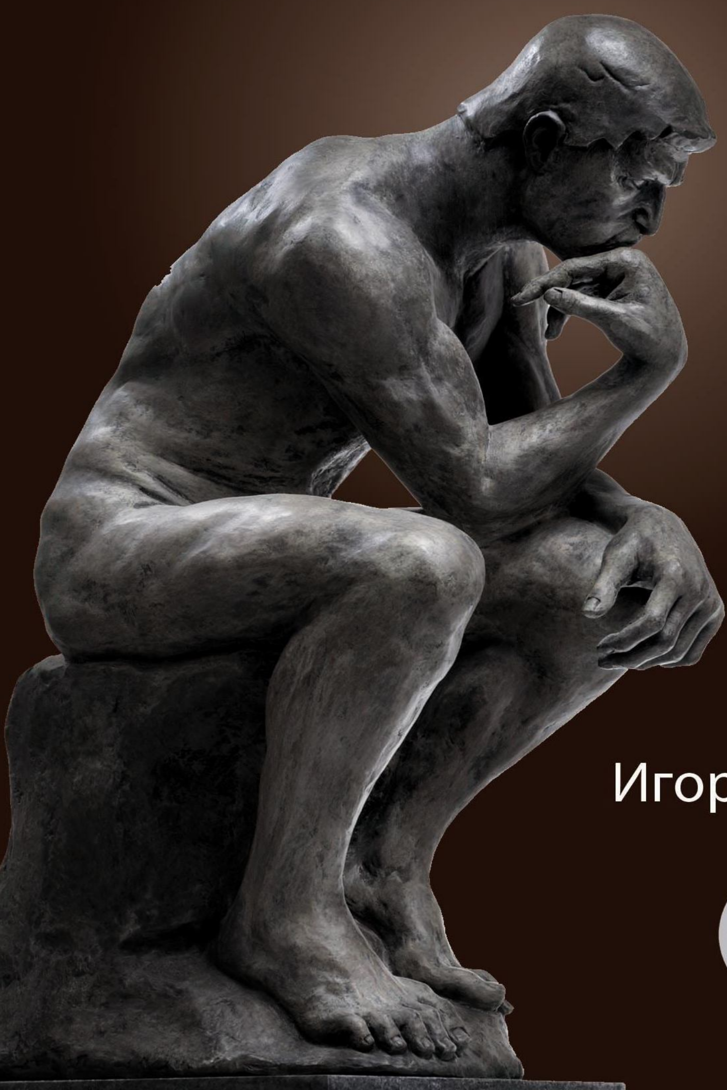
ЭТОТ СЛУЧАЙНЫЙ, СЛУЧАЙНЫЙ, СЛУЧАЙНЫЙ МИР

ИСТОРИИ НАУЧНЫХ ОЗАРЕНИЙ

5



Игорь Ушаков

ИСТОРИИ О НАУЧНЫХ ОЗАРЕНИЯХ

(КНИГА 5)

Игорь Ушаков

ЭТОТ СЛУЧАЙНЫЙ, СЛУЧАЙНЫЙ, СЛУЧАЙНЫЙ МИР...

Перевод с английского

San Diego
2012

Дизайнер обложки: Кристина Ушакова

Художник: Святослав Ушаков

Перевод с английского.

Серия книг «Истории о научных озарениях»

1. **Как люди познавали Вселенную**
   Начало астрономии. Античные ученые измеряют размеры Земли, Луны и Солнца. Начало географии. Как люди учились измерять.
2. **В начале было число...**
   Как люди начали считать. Цифры разных народов. Удивительные числа. Цифры в черной магии. Арифметика – не скучная наука!
3. **Волшебство геометрии**
   Необычные и невозможные фигуры. Лист Мёбиуса. Бутылка Клейна. Фракталы. «Золотое сечение».
4. **Таинственная страна Аль-Джабр**
   Интересное об алгебре. Диофантовы уравнения. Великая Теорема Ферма, которая сводила с ума поколения математиков, наконец-то доказана!
5. **Этот случайный, случайный, случайный мир...**
   Природа случайного. Вероятностные парадоксы. Можно ли регулярно выигрывать в лотерею?
6. **От счёта на пальцах до компьютера**
   Как люди изобрели первые счетные машины. Первые компьютеры. Создание искусственного интеллекта.
7. **Прекрасные ученые прекрасного пола**
   Рассказы о женщинах-ученых от Античности до наших дней.
8. **Икары и Ихтиандры**
   Как человек покорил небо и подводное царство.
9. **Небо без границ**
   История покорения космоса. Триумфы и трагедии.
10. **Чудо жизни**
    Гипотезы возникновения жизни. Биологические курьезы.

Эти книги помогут преподавателям сделать их занятия более увлекательными, а слушателям - узнать больше, чем знают сами учителя!

СОДЕРЖАНИЕ

Блаженство тела состоит в здоровье,
блаженство ума – в знании.

Фалес Милетский[1]

От автора

О чем серия этих научно-популярных книг? Для кого она предназначена?

С самого начала заметим, что это не учебные пособия и не научные опусы. Это сборник рассказов о великих математических, научных и инженерных озарениях и о творцах новых идей в самых различных сферах человеческой деятельности.

Чтение этой книги не требует от читателя каких-либо специальных знаний, хотя, конечно, определенные знания предполагаются (практически на уровне средней школы): в этом случае книгу будет читать приятнее.

Прежде всего, книги серии «Истории о научных озарениях» должны вызвать интерес у школьников и студентов, которым захочется узнать о том, что выходит за рамки учебной программы. (А хорошие ученики всегда хотят знать больше того, что им дают преподаватели!)

Кроме того, книга будет полезной для преподавателей школ и профессоров университетов, которым нужно оживить сухой материал своего предмета на лекциях и семинарских занятиях.

Предварительная рассылка электронной версии книги коллегам и друзьям убедила автора, что даже школьники начальных классов находят в книге много такого, что стимулирует их интерес к различным наукам. В то же время автор получил несколько восторженных отзывов от студентов ВУЗов, нашедших в книге много нового для себя.

Возможно, книгой заинтересуются и родители учеников и студентов – ведь совсем недавно они сами были молодыми, и, возможно, жизнь еще не отбила у них былой любознательности.

Автор надеется, что читатели получат от чтения книг этой серии такое же удовольствие, какое получил автор при написании этих книг.

San Diego, California.

---

1 **Фалес** из Милета (625-545 до н. э.), первый древнегреческий философ. Ему приписывают изречение: «Познай самого себя».

1. СЛУЧАЙНАЯ ЗАКОНОМЕРНОСТЬ ИЛИ ЗАКОНОМЕРНАЯ СЛУЧАЙНОСТЬ?

Средь шумного бала, случайно...
***Алексей Толстой*[2].**

1.1. Детерминизм или случайность?

Всем правит случай. Знать бы еще,
кто правит случаем.
***Станислав Лец*[3]**

Идеи причинности возникли давно. Еще Демокрит[4] говорил, что «предпочел бы найти одно причинное объяснение, нежели владеть престолом». Затем Аристотель развил учение о четырех видах причин, включая идею цели как универсальной причины (что послужило началом телеологии[5]).

---

2 **Алексей Константинович Толстой** (1817-1875) – русский писатель, поэт, драматург, член-корреспондент Петербургской АН, к тому же граф. Автор известнейших исторических романов и пьес «Князь Серебряный», «Смерть Иоанна Грозного», «Царь Фёдор Иоаннович» и «Царь Борис». Совместно с братьями Жемчужниковыми создал пародийный образ Козьмы Пруткова.

3 **Станислав Ежи Лец** (1909-1966) - известный польский сатирик и поэт.

4 **Демокрит Абдерский** (460 - 370 до н. э.), древнегреческий философ-материалист, один из основателей атомистики.

5 Теология, или богословие – совокупность доктрин о сущности и бытие Бога.

Что такое детерминизм? Это философское учение о причинности, закономерности, взаимодействии и обусловленности всех явлений и процессов, происходящих в мире. Итак, на первый взгляд кажется, что детерминизм – это наука, а случайность... А и правда, что такое случайность? Может, это просто еще не познанное? Или непознаваемое?

«Случай – это ничто. Случая не существует. Мы назвали так действие, причину которого мы не понимаем. Нет действия без причины, нет существования без оснований существовать». – Так писал один из крупнейших философов-просветителей XVIII века Вольтер[6]. Прочитаешь – трудно не согласиться!

А великий французский ученый Лаплас выразил свое отношение к детерминизму так: «Дайте мне настоящее состояние Вселенной, и я вычислю вам её будущее». В 1814 году он придумал некое гипотетическое существо – демона[7], обладающего способностью, восприняв в любой данный момент времени положение и скорость всех частиц во Вселенной, прогнозировать её эволюцию в будущем и узнавать все прошлое.

Ведь, действительно, тело, сброшенное с равномерно и горизонтально летящего самолета, падает на землю по параболе... Стоп, стоп! Не тело, а точка; не с самолета в атмосфере, а в идеальной среде без сопротивления; не просто в среде без сопротивления, но и без меняющейся силы притяжения по мере приближения тела к земле (пусть и незначительно)... Да просто случайно подул ветерок... И пошло-поехало! Оказывается, что даже в этом «простеньком» случае ничего точно предсказать не удается. А уж там, где вмешивается человек с его спонтанным поведением, о прогнозе вообще не может быть и речи.

Но допустим, что мы рассматриваем даже чисто механическую систему масштаба Вселенной, где все эволюционирует сообразно вполне детерминистическим законам. У какого, извините, к черту, демона найдется возможность одномоментно собрать всю

---

6 **Вольтер** (1694-1778) – псевдоним Франсуа-Мари Аруэ, французского философа, историка, поэта, прозаика и публициста.

7 Впоследствии этот умозрительный объект был назван *демоном Лапласа*. Кстати, «демон» по-гречески «божество, дух, гений» и лишь в христианской традиции стал обозначать беса, злого духа.

текущую информацию? Где найдется такая память, чтобы эту информацию хранить? Кто и как задаст законы взаимодействия бесчисленного числа всех этих частиц, чтобы использовать их при прогнозе? Откуда у этого пресловутого демона найдется такое чертовски сумасшедшее быстродействие, чтобы все это посчитать? А посчитавши, наконец, как представить полученные результаты?

Нет, не прав был старик Лаплас! Вообще говорить, что в принципе все возможно, извините, просто беспринципно ☺.

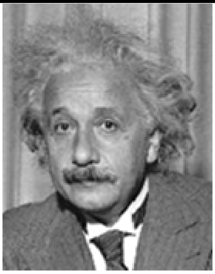
Так что проблема «демона Лапласа» не в том, возможно ли детерминистическое предсказание хода событий в принципе, а реализуемо ли оно принципиально. Некоторые острословы от науки предполагают даже, что Лаплас придумал своего демона именно для наглядной демонстрации необходимости статистического описания большинства реальных процессов в окружающем мире. Хотя, большинство все же считает, что Лаплас был «упертый» детерминист.

И это один из создателей теории вероятностей?! Станиславский наверняка произнес бы свое знаменитое: «Не верю!»

Тем не менее, концепции *лапласовского* детерминизма стали фундаментом классической механики и физики.

И все же «чистый детерминизм» не может ответить на все вопросы, а посему на сцену с неизбежностью выходит случайность. В связи с развитием термодинамики и статистической физики для массовых явлений возник «вероятностный детерминизм».

Но даже Альберт Эйнштейн еще говорил: «Я не могу поверить, что Господь Бог играет в кости». Всюду грезилось какое-то разумное начало...



Альберт Эйнштейн

(1879 – 1955)

Великий физик, математик, общественный деятель, отец теории относительности, один из создателей квантовой и статистической физики. Лауреат Нобелевской премии. В 1933 году, при приходе к власти в Германии нацистов, переехал в США. Иностранный почётный член АН СССР.

Страстным увлечением Эйнштейна была игра на скрипке.

Подробнее см. в главе «Пантеон» книги 1.

Современный детерминизм является синтезом множества предыдущих научных подходов познания мира, он нашел свое воплощение в идеях самоорганизации материи. Но вопросы о сущности случайности, ее отношении к необходимости и причинности остаются одними из самых острых в проблеме детерминизма.

Так все же детерминизм или случайность? Курица или яйцо? Случайная закономерность или закономерная случайность?

Не пытаясь ответить на эти философские вопросы, рассмотрим – чисто в иллюстративных целях – что-нибудь «более земное», например, современную теорию развития жизни на Земле.

Соотношение случайности и закономерности в процессе эволюции рассматривался многими биологами и философами. С одной стороны, эволюция представляется весьма закономерным процессом, а с другой, согласно современным представлениям, в основе ее лежат случайные мутации. Иначе говоря, совокупность последовательных случайных событий порождает нечто закономерное...

В связи с открытием основных законов генетики, эволюционная теория Дарвина подверглась определенной ревизии в части представления о механизмах наследования признаков. Современная «синтетическая теория эволюции» появилась в 1930-е годы как синтез результатов генетики, открывшей дискретные мутации отдельных генов, и дарвиновской теории эволюции, предусматривающей ведущую роль естественного отбора.

Образовалось даже два направления: *тихогенез* – эволюция на основе случайностей и *номогенез* – эволюция на основе закономерностей. Вообще говоря, противоречия здесь вроде бы и нет: при случайной эволюции неудачные (неэффективные в смысле выживания) ветви развития отмирают, а удачные ветви «закономерно развиваются».

Взять хотя бы иммунную систему: здесь все происходит, как говорится, «методом тыка». При появлении неизвестного возбудителя специальные белки в организме мутируют до тех пор, пока не будет получен такой тип антитела, который начинает «распознавать» нового возбудителя и бороться с ним. Процесс «подбора» нужного варианта случаен, но если будет сделано достаточное число попыток, то положительный результат, в конце концов, оказывается достигнутым. Хотя, заметим, сами «исходные» белки, которые подвергаются хаотическому видоизменению, изначально организованы вовсе не случайным образом.

Таким образом, ученые сходятся на том, что эволюция – это процесс глобально закономерный, хотя в деталях и случайный. Он, по-видимому, больше всего напоминает случайный поиск: на каждом шаге такого процесса делается несколько пробных шагов в различных направлениях с возвратом в начальную точку, выбирается то направление, которое характеризуется лучшими показателями, и затем делается перемещение на шаг в этом направлении. В достигнутой точке процедура поиска повторяется. В теории оптимизации доказано, что с помощью такой процедуры случайного поиска можно найти максимум (или минимум – в зависимости от типа задачи) унимодальной функции, т.е. функции, имеющей один экстремум.

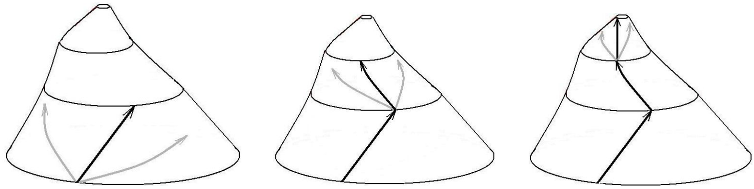


Схема случайного поиска.

Особенно ярко проявляется закономерный характер эволюции в явлении «параллелизма». Так называют те случаи, когда у разных организмов независимо возникают похожие признаки. Например, представители разных классов позвоночных животных, перешедшие к активному плаванию в толще воды, независимо друг от друга приобрели обтекаемую «рыбообразную» форму тела и ласты («плавники»).

В 1920 году на съезде селекционеров в Саратове Вавилов[8] сообщил об открытой им удивительной закономерности, которой подчиняется наследственная изменчивость у разных видов и родов растений. Оказалось, что вариации в строении корней, листьев, колосьев и семян, наблюдаемые у

[8] **Николай Иванович Вавилов** (1887-1943), советский учёный-генетик, селекционер.

растений любого вида, вовсе не случайны и не беспорядочны. Каждый вид имеет строго определенный «ряд» возможных вариаций, причем эти ряды почти идентичны у родственных видов и достаточно похожи у представителей даже разных семейств.

Вавилов показал, что изменчивость злаков можно представить таблицей, где каждая строка соответствует виду, а каждый столбец – определенному типу вариации. Результирующая таблица чем-то напоминала периодическую систему Менделеева[9]. Самое удивительное, что «закон гомологических рядов наследственной изменчивости» – так была названа открытая Вавиловым закономерность – позволил даже предсказать существование еще неизвестных в то время разновидностей! В биологии буквально повторилась история, которая произошла до того в химии: пустые клетки Вавиловской таблицы были заполнены новыми обнаруженными в природе разновидностями злаков аналогично тому, как «пустые клетки» Менделеевской таблицы были в свое время заполнены новыми химическими элементами, существование которых предсказал Менделеев. Возможно, в Вавиловских рядах проявляется какой-то очень общий закон развития сложных систем, быть может, и не только биологических.

Заметим, что и история человечества, отражая его эволюционное развитие, представляет собой тесное переплетение случайности и предопределенности. Безусловно, какие-то объективные исторические законы существуют, однако часто судьбы государств и народов зависят от сущих пустяков. Сколько мы знаем различных исторических примеров типа «если бы...».

Да, если бы персидский император Дарий Гистасп[10], приняв незатейливые дары от скифов, не пытался бы истолковать их якобы символическую суть, то он бы не повернул свои войска...

(А история была такова: узнав о приближении Дария, скифы послали ему лягушку, птицу, мышь и стрелу в знак покорности по-

---

9 **Дмитрий Иванович Менделеев** (1834-1907), выдающийся русский химик, наиболее известное его открытие – периодический закон химических элементов, в соответствии с которым он составил периодическую систему элементов.

10 **Дарий Гистасп** (550–485 гг. до н. э.), знаменитый персидский император и военачальник.

бедителю. Однако придворный маг истолковал, что это означает, что если персы не будут прыгать, как лягушки, бегать, как мыши, и летать, как птицы, то их ждет смерть от стрелы. Дарий внял пророчеству: ведь персы действительно не умели ни летать, ни прыгать!)

Да, если бы жребий, который бросил Юлий Цезарь[11], долго колебавшийся, переходить ли ему Рубикон, оказался другим, то и судьба Римской империи могла бы сложиться иначе... (А мы бы лишились так полюбившихся нам поговорок «жребий брошен» и «перейти Рубикон»!).

Да, если бы Наполеон Бонапарт[12] не простудился перед битвой при Ватерлоо, возможно, исход сражения был бы иным...

Не будем приводить примеров из истории России – здесь вообще сплошное «если бы». К тому же мы всегда хотим, как лучше, а выходит, как всегда ☺.

Так уж мы устроены: все, что произошло в некотором смысле по воле случая, мы начинаем считать «закономерным». А поди проверь! Ведь историю не повторить так же, как нельзя прожить жизнь заново...

Ну, что ж... Самое время поговорить о теории вероятностей и математической статистике!

Афоризмы, касающиеся случайности

- В жизни очень важно знать, когда следует воспользоваться случаем, но не менее важно знать, когда не следует пользоваться случаем. (*Бенджамин Дизраэли*[13])
- В каждом большом деле всегда приходится какую-то часть оставить на долю случая. (*Наполеон Бонапарт*)
- Все преходящее подвержено случайностям. (*Марк Лукан*[14])

---

[11] **Гай Юлий Цезарь** (102 – 44 до н. э.), древнеримский государственный и политический деятель, полководец, писатель. Своим завоеванием Галлии Цезарь расширил романский мир до берегов Атлантики.

[12] **Наполеон Бонапарт** (1769-1821), генерал французской революционной армии, первый консул Французской республики, император Франции. Был разбит русской армией в Отечественной войне 1812 года.

[13] **Бенджамин Дизраэли** (1804 -1881), впоследствии лорд Биконсфильд, английский государственный деятель и писатель.

- Как бы ни кичились люди величием своих деяний, последние часто бывают следствием не великих замыслов, а просто случайностью. (*Франсуа Ларошфуко*[15])
- На случай надейся, но сам не плошай! (*Лука Умищев*)
- Необычайные случаи обычно повторяются. (*Карел Чапек*[16])
- Неожиданное случается в жизни чаще, чем ожидаемое. (*Тит Плавт*[17])
- Неслучайное тоже происходит случайно. (*Лука Умищев*)
- Никто не становится хорошим человеком случайно. (*Платон)*
- Победители не верят в случайность. (*Фридрих Ницше*[18])
- Слепой случай меняет все. (*Публий Вергилий*[19])
- Случайностей ведь нет. Что кажется подчас лишь случаем слепым, то рождено источником глубоким. (*Фридрих Шиллер*[20])
- Трудно дождаться удобного случая, но очень легко упустить его. (*Публий Сир*[21])

---

[14] **Марк Аннэй Лукан** (38-65) , значительнейший римский эпик после Вергилия, великого античного поэта. Племянник философа Сенеки, пользовался расположением римского императора Нерона, пока тот не заметил его значительный поэтический талант и не приговорил его за это к смертной казни (конечно, под другим предлогом). В тюрьме Лукан вскрыл себе вены.

[15] **Франсуа де Ларошфуко** (1613-1680), знаменитый французский моралист.

[16] **Карел Чапек** (1890-1938), один из самых известных чешских писателей XX века, прозаик и драматург.

[17] **Тит Макций Плавт** (254184 до н. э.), выдающийся римский комедиограф.

[18] **Фридрих Вильгельм Ницше** (1844-1900), немецкий философ, поэт и композитор.

[19] **Вергилий, Публий Вергилий Марон** (70–19 до н.э.), величайший поэт Древнего Рима, автор «Энеиды», эпоса, воспевающего легендарное происхождение римского народа.

[20] **Фридрих Шиллер,** или полностью **Иоганн Кристоф Фридрих фон Шиллер** (1759-1805) немецкий поэт, философ, историк и драматург, представитель романтического направления в литературе.

[21] **Публий Сир** (I в. до н.э.), римский поэт.

1.2. Игральные кости и теория вероятностей

Это поразительно, что наука, зародившаяся при рассмотрении азартных игр, смогла стать одной из важнейших частей человеческих знаний.

Пьер Лаплас

Почему люди любят играть в различные азартные игры? Потому что исход наперед не известен! Конечно, во многих играх нужно умение, но умение – умением, а везение – везением! Всякий надеется на случай, «на фортуну».

Одной из наиболее незатейливых азартных игр, где умение играет не такую уж важную роль (если под умением не понимать знание специальных шулерских приемов ☺), является игра в кости. В этой игре роль случая, пожалуй, наиболее существенна. И надо сказать, что, возможно, именно поэтому оказалось, что игра в кости породила первые мысли о более или менее строгом определении случайности, поэтому с игры в кости мы и начнем.

Когда же люди впервые начали играть в кости?

Софокл[22] утверждал, что игральные кости изобрел грек по имени Паламед[23] во время осады Трои. Геродот[24], однако, считал, что их изобрели лидийцы[25] во времена царя Атиса[26].

Однако многочисленные археологические находки показывают, что игральные кости существовали и в более ранних обществах.

---

22 **Софокл** (495-405 г. до н. э.), древнегреческий драматург, который вместе с Эсхилом и Еврипидом образуют триаду знаменитейших античных трагиков.

23 **Паламед**, герой греческой мифологии, участник Троянской войны. Ему приписывается изобретение алфавита, цифр, монет, счета времени по годам, месяцам и дням, мер веса и длины, а игры в кости.

24 **Геродот** (484 - 425 до н. э.), древнегреческий историк. Считается отцом истории не только греческой, но и вообще европейской.

25 **Лидия** – одна из провинций Древней Греции (западное побережье Анатолийского полуострова, нынешняя Турция).

26 **Атис** (середина VI века до н.э.), царь Лидии, независимой греческой провинции в Малой Азии.

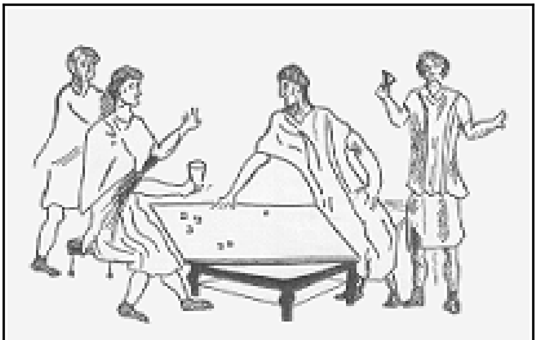


Рисунок на стене развалин Помпеи

Скорее всего, предшественниками игральных костей были бабки (таранные кости, надкопытные суставы ноги животного), имеющие различную форму своих четырех поверхностей. Трудно представить, где только не находили при раскопках игральных костей! От эскимосов до африканцев, от ацтеков и майя до полинезийцев – все играли в азартные игры с костями самых причудливых форм и разметок. Кости были не только костяные: в ход шли камешки, орешки, глиняные «кирпичики».

Возможно, что первоначально кости использовали для черной магии и предсказания судьбы. Ведь азартные игры появились, видимо, на более поздней стадии развития общества, когда одним было, что проигрывать, а другим было, что выигрывать!

Кстати, а знаете ли вы, откуда произошло слово «азарт»? Кто-то предполагает, что на старо-французском языке так называлась игра в кости. Ну, хорошо, а откуда появилось это слово во Франции? Оказывается на арабском языке слово «аз-заар» (в английском написании «az-zahr») и означает «кости» или «игра в кости»! А те, кто играет в нарды, знает, что в Армении и Азербайджане игральные кости прямо так и называют – «зары».

В Древних Греции и Риме игральные кости делались в основном из дорогой слоновой кости, но были найдены кости и из бронзы, и из янтаря, и из гипса, и из обожженной глины... Игральные кости, абсолютно похожие на современные, найдены при раскопках среди утвари, датируемой почти 1000 лет до н.э., в Китае, Индии и Египте. Правда, удивляться тут нечему: кубик – он и в Африке кубик!

Современные кости используются, пожалуй, в основном для двух азартных игр: крапс и покер. Крапс – это, по сути дела, угадывание двух костей перед тем, как они брошены. Покер представляется нам более интересной игрой: здесь есть и стратегия и тактика, хотя особых мозгов и здесь не нужно ☺.

1.3. Как зарождалась теория вероятностей

> Теория вероятностей построена на костях... Правда, слава богу, кости эти игральные!
>
> ***Лука Умищев***

В основу изложения этого раздела положен «*Очерк по истории теории вероятностей*», написанный одним из крупнейших современных вероятностников Борисом Владимировичем Гнеденко[27]. Мы постарались проиллюстрировать некоторые наиболее интересные моменты, сохранив историческую канву первоисточника.

Ученые, занимающиеся вопросами истории науки, отмечают, что впервые подсчет возможных исходов при бросании трех игральных костей произвел в 960 году епископ по имени Витольд, имевший приход в городишке Камбрэ, расположенном на самом севере Франции. Он подсчитал, что всего возможно 56 различных комбинаций очков на трех костях. Нетрудно понять, как он подчитывал число таких возможных бросаний: перебором всех возможностей с регулярным увеличением числа на одной из позиций. Впрочем, вместо нудных объяснений приведем образец такой таблицы:

1-1-1 1-1-2 1-1-3 1-1-4 1-1-5 1-1-6
1-2-2 1-2-3 1-2-4 1-2-5 1-2-6
1-3-3 1-3-4 1-3-5 1-3-6
1-4-4 1-4-5 1-4-6
1-5-5 1-5-6
1-6-6
2-2-2 2-2-3 2-2-4 2-2-5 2-2-6

[27] **Борис Владимирович Гнеденко** (1912-1995), один из крупнейших современных специалистов в области теории вероятностей, математической статистики, случайных процессов и их приложениям к инженерному делу, медицине и др. сферам человеческой деятельности. Академик Украинской АН, многие годы заведовал Кафедрой теории вероятностей Московского Государственного Университета им. М.В. Ломоносова.

2-3-3 2-3-4 2-3-5 2-3-6
2-4-4 2-4-5 2-4-6
2-5-5 2-5-6
2-6-6
3-3-3 3-3-4 3-3-5 3-3-6
3-4-4 3-4-5 3-4-6
3-5-5 3-5-6
3-6-6
4-4-4 4-4-5 4-4-6
4-5-5 4-5-6
4-6-6
5-5-5 5-5-6
5-6-6
6-6-6

Можно предполагать, что что-то наподобие такой таблицы и составил епископ, поэтому в дальнейшем мы будем называть ее «таблицей Вибольда».

Заметим, что «таблица Вибольда» имеет любопытную «множественно-треугольную» структуру: наверху большой треугольник, представляющий шесть пар чисел, а потом шесть строк с убывающей каждый раз на единичку длиной. Нетрудно посчитать N – число элементов во всей таблице Витольда:

$$N = \frac{6+1}{2}\times 6 + \frac{5+1}{2}\times 5 + \frac{4+1}{2}\times 4 + \frac{3+1}{2}\times 3 + \frac{2+1}{2}\times 2 + 1 = 56.$$

Видимо, священнику Вибольду не чужд был азарт игры в кости, раз он заинтересовался комбинациями выпадающих при бросании костей, однако ради благолепия он придумал своим комбинаторным изысканиям теологическую «ширму»: каждую из комбинаций он связал с одной из 56 добродетелей.

Остается, правда, только удивляться, откуда Витольд насчитал столько человеческих добродетелей?

Можно сформировать табличку, аналогичную предыдущей, и для четырехгранной кости (обычной пирамидки):

1-1-1 1-1-2 1-1-3 1-1-4
1-2-2 1-2-3 1-2-4
1-3-3 1-3-4
1-4-4

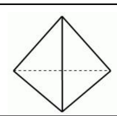
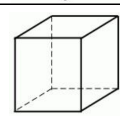
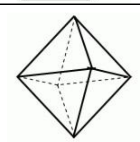
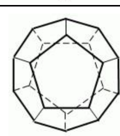
2-2-2 2-2-3 2-2-4
2-3-3 2-3-4
2-4-4
3-3-3 3-3-4
3-4-4
4-4-4

Для этого случая число различающихся комбинаций равно

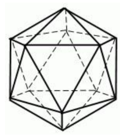
$$N = \frac{4+1}{2} \times 4 + \frac{3+1}{2} \times 3 + \frac{2+1}{2} \times 2 + 1 = 20.$$

Кстати, можно провести мысленный эксперимент даже с «правильной пятигранной костью» (каковых в природе не бывает!).

На самом деле набор возможных игральных костей весьма ограничен. Воспользовавшись случаем, заметим, что существует всего пять правильных многогранников, называемых также «Платоновыми[28] телами»:

Тетраэдр	**четырёхгранник**	
Куб	**шестигранник**	
Октаэдр	**восьмигранник**	
Додекаэдр	**двенадцатигранник**	

[28] **Платон** (428-348 до н. э.), древнегреческий философ, ученик Сократа, учитель Аристотеля. Настоящее его имя – Аристокл, а Платон – его прозвище, означающее по-гречески «широкоплечий». В своем сочинении «Тимей» Платон дал описание правильных многогранников, придавая им мистический смысл.

Икосаэдр	**двадцатигранник**	

Кстати, в Японии лет 40 назад выпустили 20-гранные кости, которые удобно было использовать для генерации равномерно распределенных случайных чисел от 1 до 20. Хотя, впрочем, вряд ли такие кости могли найти серьезное практическое применение: азартным игрокам хватало и обычного кубика, а для научных экспериментов все же удобнее работать с компьютером!.

Однако вернемся к Вибольду. Представляется, что его – как игрока – интересовали не различающиеся наборы выпавших чисел, а частоты появления тех или иных комбинаций, а эту задачу он и не решил! И даже не подошел близко... Нетрудно заметить, что епископ перечислил все возможные комбинации, с различными наборами очков на верхней грани трех костей. Однако если бросать кости по очереди, то комбинация, например, 6-6-6 может выпасть единственным способом, в то время как получить значения, к примеру, 4-5-6 можно уже шестью способами:

- первая кость- 4, вторая кость – 5, третья кость – 6;
- первая кость- 4, вторая кость – 6, третья кость – 5;
- первая кость- 5, вторая кость – 4, третья кость – 6;
- первая кость- 5, вторая кость – 6, третья кость – 4;
- первая кость- 6, вторая кость – 4, третья кость – 5;
- первая кость- 6, вторая кость – 5, третья кость – 4.

Так что добродетель, которой соответствует набор 6-6-6 или 2-2-2, встречается у людей в шесть раз реже, нежели добродетель типа 3-5-6 или 1-2-4!

После Вибольда было еще несколько попыток посчитать число различных комбинаций при трех бросках игральных костей, но все они были безуспешными.

Спустя почти полтысячелетия в эту сферу погрузились такие сильные математики, как Джероламо Кардано и Николо Тарталья. (Помните этих наших старых знакомых по той «битве», которую они вели за право приоритета решения кубических уравнений[29]?). В своей «*Книга об игре в кости*» Кардано решил массу интересных задач, связанных с появлением различных чисел, выпадающих при бросании костей. Не все там было корректно, но появились свежие идеи. Кстати, полное число различных исходов при бросании трех костей Кардано определил правильно – 216, хотя использовал довольно «непрямые подходы».

Однако, и Кардано, если говорить строго, также не подошел к понятию вероятности. Хотя справедливости ради, следует отметить, что он на интуитивном уровне подошел вплотную к закону больших чисел. В своей книге он, правда, на весьма качественном уровне, замечает феномен статистической устойчивости: «Длинная серия бросков не дает отклонения, хотя в одной игре это может случиться.».

И вот на сцене появляется гениальный Галилео Галилей[30]. В своей работе «*О выходе очков при игре в кости*», вышедшей в свет только через добрых 70 лет после смерти автора, были рассмотрены задачи связанные с бросанием трех костей. Задачу о числе возможных выпадений чисел на трех костях он решил с гениальной простотой: если первая из брошенных костей может дать 6 возможных исходов, вторая – тоже 6, третья – тоже 6, то общее число исходов, естественно, равно 6^3=216!

Галилей подсчитал также (и не «в лоб»!) число выпадений костей, соответствующих той или иной сумме очков. Но даже Галилей еще не сформулировал концепции вероятности...

А настоящее начало формированию теории вероятностей было положено позже, в переписке двух замечательных ученых – Пьера Ферма и Блеза Паскаля. И история эта по-своему удивительна.

1.4. Задачи кавалера де Мере

> Теория вероятностей – это не что иное, как здравый смысл, сведенный к вычислениям
>
> ***Пьер Лаплас.***

---

[29] Подробнее об этом см. часть 4 (Глава 1, раздел 1.4).

[30] Подробнее см. в томе 1 (Часть 1, Глава 5 «Пантеон»).

Кавалер (шевалье[31]) де Мере, человек большого парижского света – немного писатель, немного математик – жил в середине XVII века. Он бы и ушел из этого мира так же незаметно, как и пришел, но волею судеб его имя стало связано с возникновением одного из важнейших направлений современной математики – теорией вероятностей. Дело было в том, что де Мере (1610-1684) был заядлым и очень азартным игроком в кости.

А это фотопортрет кавалера де Мере, сделанный одним из его партнеров по игре в кости, который был неплохим средневековым фотографом.☺

Как человек, не чуждый математики, он пытался найти правила, следуя которым можно было бы сыграть наверняка. У него возникла пара задачек, связанных с бросанием игральных костей, решить которые он сам не смог. И вот тут-то и началась завязка интереснейшей истории. Волею тех же судеб, де Мере оказался близким знакомым самого Блеза Паскаля! Его-то он и попросил решить свои задачи.

ПЕРВАЯ ЗАДАЧА

Что наша жизнь? Игра!

Модест Чайковский[32]

[31] Понятно, что «шевалье» и «кавалер» семантически эквивалентны: «шеваль» по-французски означает «лошадь». Кстати, от того же французского слова произошло и русское слово «шваль». Да-да! После пожара в Москве во время Отечественной войны 1812 года голодные и промерзшие французы ели дохлых лошадей, т.е. всякую шваль!

[32] **Модест Ильич Чайковский** (1850-1916), русский драматург, оперный либреттист и переводчик, младший брат великого русского композитора Петра Ильича Чайковского (1840-1893). Слова из арии Германа в опере «Пиковая дама».

Первая задача касалась новой игры, придуманной кавалером де Мере: он предлагал бросать кость четыре раза подряд и держал пари, что при этом хотя бы один раз выпадет шестерка. Многочисленные пробы показывали, что шансы обеих сторон примерно равны, однако де Мере попросил Паскаля точно оценить шансы выигрыша.

Вторая задача де Мере касалась справедливого раздела ставки между игроками, если игра оказалась прерванной. Паскаль заинтересовался обеими задачами, но оказалось, что подобного рода задачи еще никто никогда не решал. В 1654 году Паскаль сообщил об этих задачах Пьеру Ферма, которого знал только по научной переписке. Между учеными завязался бурный обмен идеями. Задача о справедливом разделе ставки была решена ими почти одновременно.

Сама эта переписка сделала Паскаля и Ферма друзьями. В своем письме Паскаль писал Пьеру Ферма в Тулузу: «С этих пор я желал бы раскрыть перед вами свою душу, так я рад тому, что наши мысли встретились. Я вижу, что истина одна и та же в Тулузе и в Париже».

Год, когда между Паскалем и Ферма завязалась переписка по поводу этой задачи, можно считать моментом рождения теории вероятностей. Интересна еще одна выдержка из письма Паскаля к Ферма: «…В мире господствует случай, и одновременно действуют порядок и закономерность, которые формируются из массы случайностей согласно законам случайного».

Давайте теперь вернемся к самим задачам кавалера де Мере.

В первом случае рассуждения довольно просты (это для нас, сейчас, а Паскалю и Ферма пришлось все это делать впервые!). При первом бросании лишь один исход из шести возможных дает шестерку, т.е шансы не получить шестерку равны 5/6. При двукратном бросании возможны 36 исходов, которые представлены на нижнем рисунке.

очки на второй кости

очки на первой кости

	1	2	3	4	5	6
1	1;1	1;2	1;3	1;4	1;5	1;6
2	2;1	2;2	2;3	2;4	2;5	2;6
3	3;1	3;2	3;3	3;4	3;5	3;6
4	4;1	4;2	4;3	4;4	4;5	4;6
5	5;1	5;2	5;3	5;4	5;5	5;6
6	6;1	6;2	6;3	6;4	6;5	6;6

Понятно, что из всех 36 возможных исходов 5×5=25 исходов не содержат шестерку, а 36 – 25 = 11 содержат. Иначе говоря, при равной возможности исходов (а это означает что кость «честная» и бросающий игрок не хитрит) шансы не получить ни одной шестерки равны 25/36.

Рассуждая аналогичным образом нетрудно найти, что при трех бросках кости из общего числа исходов 6×6×6 = 216 не будут содержать шестерку 5×5×5 = 125 из них, т.е шансы получить хотя бы одну шестерку равны (216 – 125):216 = 91:216 ≈ 0.422. При четырех бросках общее число исходов равно 6×6×6×6 = 1296, а число исходов, не содержащих шестерку, равно 5×5×5×5 = 625, т.е. шансы получить шестерку хотя бы один раз равны (1296 – 625): 1296 = 671:1296 ≈ 0.518.

Как видим, чутье игрока не обмануло кавалера де Мере: у него шансов выиграть оказалось чуть больше половины!

Кстати, табличка с реализациями выпавших очков на двух костях, представленная выше, очень удобна для некоторых простых расчетов. Например, что выпадает в среднем чаще – семь очков на двух костях или же выпадение пары одинаковых очков? Что, захотелось размять мозги и посчитать «с карандашиком в уме»? Не трудитесь! Взгляните на табличку: все исходы с суммарными семью очками расположены на диагонали от левого верхнего угла до правого нижнего, а исходы с парами одинаковых очков – на диагонали от правого верхнего угла до левого нижнего, а число и тех и других исходов равно семи!

1;1	1;2	1;3	1;4	1;5	1;6
2;1	2;2	2;3	2;4	2;5	2;6
3;1	3;2	3;3	3;4	3;5	3;6
4;1	4;2	4;3	4;4	4;5	4;6
5;1	5;2	5;3	5;4	5;5	5;6
6;1	6;2	6;3	6;4	6;5	6;6

Полюбуйтесь на эту простенькую табличку, и вы найдете много других достаточно интересных ее свойств.

ВТОРАЯ ЗАДАЧА

Не за то отец сына бил, что играл,
а за то, что отыгрывался!

Русская пословица

Вторая задача кавалера де Мере оказалась намного сложнее: требовалось найти правило справедливого раздела ставки, если игра прервана до окончания, а игроки набрали разное число побед.

Задача эта имеет давнюю историю: еще Лука Пачоли[33] в своей книге «Сумма знаний по арифметике, геометрии, отношениям и пропорциональности», написанной в 1487 году, рассматривал задачи подобного рода. Решение его было нестрогим и содержало ошибки, но сам подход к доказательству оказался весьма продуктивным.

Затем Кардано в уже упоминавшейся «Книге об игре в кости» приближается к понятию справедливой игры («игры с нулевой суммой», как сейчас говорят), а в своем трактате «Практика общей арифметики» подвергает критике решение задачи о разделе ставки, предложенное Пачоли. Правда, и его решение также оказалось неверным в общем случае.

К этой же задаче обратился и Николо Тарталья в своем «Общем трактате о мере и числе», опубликованном в 1556 году. Он также подверг критике результаты Пачоли, но и он допустил ошибки в решении задачи.

[33] Подробнее см. в томе 1 (часть 3, глава 5 «Пантеон»).

Паскаль нашел изящное решение. Рассуждения Паскаля сводились к следующему. Предположим, что два игрока, поставив на кон по десять золотых дукатов, условились играть до трех побед, после чего выигравший получает, естественно всю сумму. Игра прерывается, когда первый игрок уже выиграл две партии, а второй выиграл только одну. Как им следует честно разделить ставку игры между собой? Если бы игроки сыграли еще по одной партии, то могло бы быть два равновероятных исхода: (а) выиграл первый игрок, (б) выиграл второй. Допустим, что следующую партию выиграл бы первый игрок, тогда он получает всю сумму (20 дукатов). Если же выиграет второй, то оба игрока оказываются в равном положении, т.е. справедливо будет каждому взять свою половину, т.е. по 10 дукатов. Значит, у первого игрока 50 шансов из 100 получить 20 дукатов после первого же удачного бросания кости и 50 шансов из 100 получить 10 дукатов даже в случае неудачи при первом бросании, т.е. он должен получить $20 \times \frac{1}{2} + 10 \times \frac{1}{2} = 15$ дукатов. Второй же игрок, который имел на момент прерывания игры только один удачный бросок, получает при справедливом дележе только 5 дукатов.

Справедливости ради, надо заметить, что Паскаль сделал предположение о равенстве сил обоих игроков.

Принял непосредственное участие в становлении теории вероятностей и еще один выдающийся ученый того времени – Христиан Гюйгенс[34].

В 1655 году Гюйгенс поехал в Париж, где он познакомился со многими учеными того времени, с которыми обсуждал различные проблемы математики и физики. Здесь же он услышал и о задаче раздела ставки. Поскольку ни Паскаль, ни Ферма не опубликовали своих результатов, Гюйгенсу пришлось решать заинтересовавшую его задачу заново.

Блез Паскаль, ознакомившись с работой Гюйгенса, вдохновил последнего на написание первой книгу по теории вероятностей. В 1657 году выходит в свет трактат учителя Гюйгенса Франса ван Шоотена[35] «*Математические этюды*», в которую тот просит свое-

[34] **Христиан Гюйгенс** (1629-1695), голландский математик, астроном и физик. ***Подробнее см. в главе 5 «Пантеон».***

[35] **Франс ван Шоотен** (1615-1660), датский математик

го ученика написать специальное дополнение «*О расчетах в азартных играх*» (*De ratiociniis in ludo aleae*). Поскольку Гюйгенс не настолько хорошо владел латынью, чтобы сделать перевод, это сделал за него его учитель, переводом которого, однако, ученик не был полностью удовлетворен. Однако, так или иначе, это была одна из первых – если даже не первая вообще – опубликованных работ по теории вероятностей.

Интересно заметить, что в 1687 году, спустя 10 лет после смерти великого философа Баруха Спинозы[36] была опубликована его работа «*Заметки о математической вероятности*». Так что и философам были не чужды размышления о вероятности!

2. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ПАРАДОКСЫ

Нам парадоксы не дают скучать
Они зовут нас истину понять.
Пока ты тайны не постигнешь глубь,
Все чувствуешь, что ты безмерно глуп...
Лука Умищев

2.1. Парадокс Бертрана

Встал я как-то утром рано,
Вспомнил парадокс Бертрана..
Стал его решать я бодро...
Только что ж такое хорда[37]?
Лука Умищев

А что такое, собственно, парадокс? Корень слова «парадокс» является древнегреческим и означает «странный» или «неожиданный». Вообще говоря, парадокс – это истинное утверждение, которому почему-то не хочется верить: оно кажется проти-

---

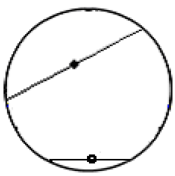
[36] **Барух Спиноза** , или латинизированное имя – **Бенедикт д'Эспиноза** (1632-1677), великий голландский философ, один из крупнейших рационалистов XVII века.

[37] **Хордой** называется отрезок, соединяющий две точки на окружности.

воестественным, входит в противоречие с интуитивным восприятием ситуации. Одним словом, вам говорят правду, а вы думаете, что вам «пудрят мозги».

Задача, называемая «парадоксом Бертрана[38]», формулируется так: для некоторой окружности случайным образом выбирается хорда. Найти вероятность того, что эта хорда длиннее стороны правильного, или равностороннего, треугольника, вписанного в окружность. Пока, казалось бы, никакого парадокса нет, но...

Выберем наугад точку внутри рассматриваемого круга. Если эту точку теперь принять за середину хорды, то мы получим случайную хорду. Построим, к примеру, две таких случайных хорды.



Кратчайшие хорды, построенные на случайных точках, брошенных в круг.

Расположим теперь обе эти случайные хорды так, чтобы их середины располагались на диаметре, проведенном через вершину треугольника.

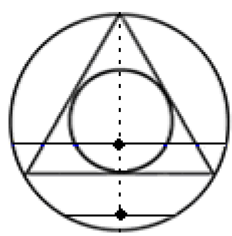


Схема определения вероятностей для первого случая.

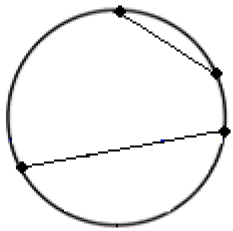
Нетрудно видеть, что хорда длиннее стороны вписанного равностороннего треугольника, если случайная точка попадает внутрь окружности, вписанной в треугольник, и меньше стороны треугольника, если случайная точка попадает вне этой окружности. Значит, вероятность того, что построенная таким образом хорда будет длиннее стороны треугольника равна отношению площади малого круга к площади большого круга. Простыми геометрическими построениями можно показать, что диаметр внутренней окружности вдвое меньше

[38] **Жозеф Луи Франсуа Бертран** (1822 –1900), французский математик, профессор знаменитой парижской Политехнической школы, член Парижской Академии наук.

диаметра внешней окружности, а, следовательно, искомое отношение площадей равно отношению квадратов диаметров.

Итак, вероятность того, что случайная хорда окажется длиннее стороны правильного вписанного треугольника, равна ¼ .

Но ведь случайную хорду можно построить и иначе. Почему бы, например, не выбрать наугад две точки на окружности и не провести через них хорду? Чем хуже эта хорда, чем предыдущая? Построим и в этом случае две хорды.



Хорды, построенные на двух случайных точках, брошенных на окружность.

Длина хорды определяется взаимным положением точек относительно друг друга. Не меняя длины хорд, переместим их так, чтобы один и концов каждой из них совместился с вершиной правильного треугольника, как это представлено на рисунке.

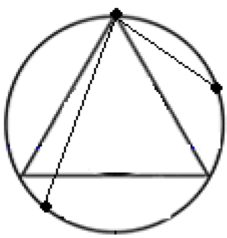
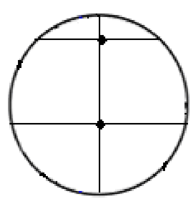


Схема определения вероятностей для второго случая.

Из рисунка видно, что если точка попадает на часть окружности, лежащую под основанием треугольника, то хорда оказывается длиннее стороны треугольника, а если на остальную часть окружности, то меньше. Основание треугольника отсекает ровно треть всей длины окружности. Иначе говоря, вероятность того, что хорда длиннее стороны вписанного правильного треугольника, равна 1/3... А ведь только что мы нашли, что эта вероятность равна ¼ !

Что-то здесь не так! А давайте-ка построим случайную хорду иным способом: построим диаметр круга, выберем на нем наугад точку и проведем через нее хорду, перпендикулярную этому диаметру.

Теперь, взяв тот же самый диаметр за ось симметрии, построим пра-



Хорды, построенные на случайных точках, брошенных на диаметр.

вильный шестиугольник[39], составленный из двух вписанных правильных треугольников, как это представлено на рисунке.

Из рисунка видно, что вертикальный диаметр делится шестиугольником на три части: верхнюю, длиной ¼ диаметра; среднюю длиной ½ диаметра; и нижнюю, длиной опять ¼ диаметра. Из построения видно, что случайная хорда окажется длиннее стороны вписанного правильного треугольника, если наугад выбранная точка лежит на средней части диаметра. Это означает, что случайная хорда оказывается длиннее стороны правильного треугольника с вероятностью ½.

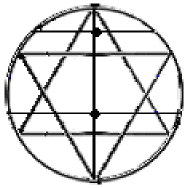


Схема определения вероятностей для третьего случая.

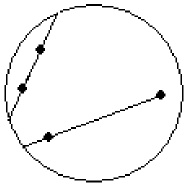
Вот, что называется, «приехали»!

В этом и заключается так называемый «парадокс Бертрана»... Вы, конечно же, догадались, что никакого парадокса здесь нет: в каждом из трех случаев «случайность была разная», а говоря языком теории вероятностей равномерное распределение («выбор точки наугад») задавалось на различных множествах! Это были простонапросто разные задачи! Как говорят американцы, «не путайте яблоки с апельсинами». (В Одессе, правда, говорят четче: «Мухи отдельно, котлеты отдельно»!)

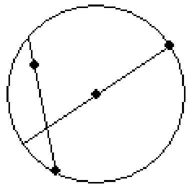
Можно, конечно, придумать и другие способы случайного построения хорды в круге, например:

(1) В круг бросаются независимо две точки «наугад» (в прежнем смысле), затем через эти две точки проводится хорда
(2) Одна из точек бросается в круг, а вторая – на окружность, затем через них проводится хорда.
(3) В круг бросаются «иглы Бюффона», которые оказываются отрезками, на которых строится хорда;

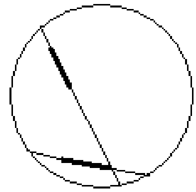
[39] Эта фигура обычно известна, как «Звезда Давида» (или «Щит Давида»), который был, если верить Ветхому Завету, израильским царем где-то около 1000 до н.э.



Хорды, построенные на двух случайных точках, брошенных на диаметр.



Хорды, построенные на случайных точках: одна брошена внутрь круга, а вторая на окружность.



Хорды, построенные на случайно брошенных «иглах Бюффона».

Можно придумать и другие способы построения «случайных хорд». Представляется, что Бертран ограничился первыми тремя, поскольку для них решение оказывается предельно простым на геометрическом уровне практически при умозрительных построениях.

В заключение заметим, что Бертран вообще был любителем изобретать парадоксы. Например, хорошо известен и другой его парадокс, но уже из области экономики.

Этот парадокс показывает, как два соперника в условиях рыночной экономики (не путать с «базарной экономикой»!) достигают равновесного состояния, только лишь когда ... прибыль каждого равна нулю!

Действительно, рассмотрим две компании, скажем, А и В, которые продают идентичный продукт. Естественно, потребитель выбирает того производителя, который предлагает более низкую цену. Если одна из компаний установила цену своей продукции выше, чем цена конкурента, то весь рынок переходит к конкуренту. Если обе компании установили одинаковую цены, то они поделят рынок между собой. Однако свободный рынок предполагает свободу действий: одна из компаний на чуть-чуть снижает цену, и рынок становится завоеванным! Второй компании ничего не остается, как только назначить цену ниже цены конкурента. В конце концов, обе компании «успокоятся», достигнув ситуации, когда цена обоих продуктов упадет до себестоимости...

Конечно, в жизни такой парадокс не случается, поскольку продукция отличается не только ценой: возьмите кока-колу и пепси-колу – по мне, так одно и то же, хотя ярлычки разные... Я бы предпочел квас. Ведь хорошо было сказано в рекламе кваса «Никола», поднявшей шум протеста на Западе:

Квас – не «Кола»,
Пей «Николу»!

(Дело в том, что разрешается рекламировать свою продукцию, но запрещается ругать чужую.)

2.2. Парадокс с днями рождения

Вообще-то говоря, парадокс с днем рождения возникает у тех, кто родился 29 февраля...

Лука Умищев

Теория вероятностей необычайно богата парадоксами. Некоторые из них настолько противоречат здравому смыслу, что поверить в них трудно даже после того, как правильность их подтверждена доказательством.

Один из примеров – парадокс с днями рождения. Выберем наугад, скажем, 23 человека. Какова, по вашему мнению, вероятность того, что как минимум двое из них родились в один и тот же день? (Наличие близнецов в выбранной группе, конечно, исключается.) Кроме того, для конкретности рассмотрим невисокосный год и не будем учитывать неравномерность появления детей в зависимости от времени года. (На самом деле, человек, как и всякое животное инстинктивно производит больше детей в благоприятное для их начального развития время – летом или поздней весной.)

Интуиция подсказывает, что вероятность такого события должна быть очень мала: дней-то в году, как минимум, 365! То, что кто-то имеет день рождения, совпадающий с вашим, равна всего-то 1/365. А сильно ли что изменится, если добавим мы каких-то 20 человек?

Но... на самом деле вероятность того, что в группе из 23 человек окажутся хотя бы двое, у которых совпали дни рождения, даже чуть больше половины: она равна ≈ 0.507.

На самом деле, проведем цепочку простых вычислений. Зафиксируем день рождения первого человека. Шансы второму выбранному наугад человеку иметь день рождения в тот же день, что и первый, равны 1 из 365. Шансы того, что у третьего человека день рождения совпадет с одним из двух предыдущих (различающихся!), равны уже 2 из 365. Такую цепочку рассуждений можно без труда продолжить.

Теперь рассмотрим шансы несовпадений дней рождения, это окажется очень полезным для нахождения ответа на поставленный выше вопрос о вероятности несовпадения дней рождения. (Вечно эти математики отвечают не на тот вопрос, о котором их спрашивают!). Что означает, например, что не совпали дни рождения у четырех человек? Это значит, что день рождения второго не совпал с днем рождения первого – это 364 шанса из 365 возможных, т.е. с вероятностью $\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}\cdot\frac{362}{365}\approx 0.984$. Видно, что вероятность того, что дни рождения не совпадут, падает с ростом размера группы. Вообще говоря, это понятно и на интуитивном уровне: если взять 367 человек, то дни рождения совпадут хотя бы для одной пары наверняка! Конечно, если кто-нибудь не родился 30 февраля ☺.

Интересно понаблюдать, как вероятность несовпадения дней рождения зависит от размера группы.

Размер группы	**Вероятность несовпадения**	**Вероятность совпадения**
1	1	0
2	0.998	0.002
3	0.992	0.008
4	0.984	0.016
5	0.973	0.027
6	0.960	0.040
7	0.944	0.056
8	0.926	0.074
9	0.906	0.094
10	0.884	0.116
11	0.859	0.141
12	0.833	0.167
13	0.806	0.194
14	0.777	0.223
15	0.748	0.252
16	0.717	0.283
17	0.685	0.315
18	0.654	0.346
19	0.621	0.379
20	0.589	0.411
21	0.557	0.443

22	0.525	0.475
23	0.493	0.507

Одновременно заметим, что для любого размера группы сумма вероятностей несовпадения и совпадения равна единице – действительно, ведь ничего третьего произойти не может! Из таблицы видно, что при размере группы в 22 человека искомая вероятность еще меньше 0.5, а при размере 23 – уже ее превосходит.

Кстати, вероятность того, что хотя бы у двух людей дни рождения совпадут, растет очень быстро.

Размер группы	**Вероятность несовпадения**	**Вероятность совпадения**
10	0.884	0.116
20	0.589	0.411
30	0.294	0.706
40	0.109	0.891
50	0.030	0.970
60	0.006	0.994
70	0.001	0.999
...	**...**	**...**

Все строго, все посчитано, а все равно плохо верится, не правда ли?

Для иллюстрации рассмотрим дни рождения американских президентов.

Номер	***Фамилия***	***День рождения***	***День смерти***
1	Вашингтон	22 февраля 1732	14 декабря 1799
2	Адамс-1	30 ноября1735	**4 июля 1826***
3	Джефферсон	13 апреля 1743	**4 июля 1826 ***
4	Мэдисон	16 марта1751	28 июня 1836
5	Монро	28 апреля 1758	**4 июля 1831***
6	Адамс-2	11 июня 1767	23 февраля 1848
7	Джексон	15 марта 1767	8 июня 1845
8	Ван Бурен	5 декабря 1782	24 июля 1862
9	Харрисон-1	9 февраля 1773	4 апреля 1841
10	Тайлер	29 марта 1790	18 января 1862
11	Полк	**2 ноября 1795**	15 июня 1849
112	Тэйлор	24 ноября 1784	9 июля 1850
13	Филмор	7 января 1800	**8 марта 1874***
14	Пирс	23 ноября 1804	8 октября 1869
15	Букэнан	23 апреля 1791	1 июня 1868
16	Линкольн	12 февраля 1809	15 апреля 1865
17	Джонсон-1	29 декабря 1808	31 июля 1875
18	Грант	27 апреля 1822	23 июня 1885
19	Хэйс	4 октября 1822	17 января 1893
20	Гарфильд	19 ноября 1831	19 сентября 1881
21	Артур	5 октября 1829	18 ноября 1886
22	Кливленд-1	18 марта 1837	24 июня 1908

23	Харрисон-2	20 августа 1833	13 марта 1901
24	Кливленд-2	18 марта 1837	24 июня 1908
25	McKinley	29 января 1843	14 сентября 1901
26	Рузвельт-1	27 октября 1858	6 января 1919
27	Тафт	15 сентября 1857	**8 марта 1930***
28	Вильсон	28 декабря 1856	3 февраля 1924
29	Хардинг	**2 ноября 1865**	2 августа 1923
30	Кулидж	4 июля 1872	5 января 1933
31	Гувер	10 августа 1874	20 октября 1964
32	Рузвельт-2	30 января 1882	12 апреля 1945
33	Трумэн	8 мая 1884	**26 декабря 1972****
34	Эйзенхауэр	14 октября 1890	28 марта 1969
35	Кеннеди	29 мая 1917	22 ноября 1963
36	Джонсон-2	27 августа 1908	22 января 1973
37	Никсон	9 января 1913	22 апреля 1994
38	Форд	14 июня 1913	**26 декабря 2006****
39	Картер	1 октября 1924	-
40	Рейган	6 февраля 1911	5 января 2004
41	Буш-1	12 июня 1924	-
42	Клинтон	19 августа 1946	-
43	Буш-2	6 июля 1946	-
44	Обама	4 августа 1961	-
45	**???**		

Для удобства просмотра таблицы совпадающие дни рождения (и дни смерти) закрашены серым цветом, а повторяющиеся даты отмечены соответствующим числом звездочек.

Из таблицы видно, что в списке уже к тридцатой позиции появляется пара президентов США с одинаковым днем рождения (Полк и Хардинг родились 2 ноября). Еще более поразительная картина совпадений дней смерти: уже в первой пятерки по списку совпали три смерти (Джефферсон, Адамс и Монро), причем дата их смерти совпала с Днем Независимости США, который приходится на 4 июля... Если бы такое произошло в России и три российских монарха (или рядовых генсека) почили бы в бозе в один и тот же престольный праздник, никто бы не удивился – ну подумаешь, перебрали слегка на праздники. Но сказать подобное про досточтимых американских джентльменов и язык не поворачивается!

Но даже если это списать просто на какое-то роковое совпадение, то все равно в пределах первой тридцатки появляется пара президентов, день смерти которых приходится на 8 марта (который они, безусловно, не отмечали ☺.)

Но попробуйте теперь «немножко» изменить вопрос: какого размера должна быть группа, чтобы шансы найти кого-нибудь именно с вашим днем рождения были бы «фифти-фифти»? Понятно, что меньше, чем для случая совпадения какой-либо пары. Но намного ли? Как вы думаете, может человек сорок или пятьдесят?

Почти наверняка интуиция вас и в этом случае подведет. Не будем утомлять вас вычислениями: в группу должно войти 253 человека! Более того, не думайте, что вас спасет, если в группе будет 365 человек – ни о каких 100% речь даже и не идет: вероятность совпадения составит всего около 37%...

Да и вообще, в принципе для любой сколь угодно большой группы существует – пусть малюсенькая-премалюсенькая – вероятность того, что в ней не найдется человека с тем же днем рождения, что и у вас. Почему? Да потому, что эта вероятность для любого размера группы *n* определяется по формуле

$$P(n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n,$$

ну, а эта величина, хоть и стремится к нулю, но все же никогда его не достигает!

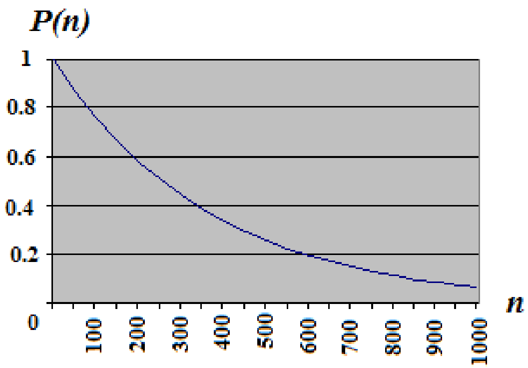


График для вероятности несовпадения именно с ваши днем рождения.

2.3. Можно ли выигрывать в лотерею?

Выиграть в лотерею практически невозможно. Особенно, если вы не купили ни одного билета.

Лука Умищев

Обратите внимание: вопрос ставится, не можно ли *выиграть*, а можно ли *выигрывать* (достаточно регулярно) в лотерею.

Честная игра, или так называемая «игра с нулевой суммой», грубо говоря, гарантирует играющим, что в среднем за длинный период времени они «остаются при своих». (Конечно, если оба игрока одинаковой квалификации: не думая, можно играть только в «орлянку».) Более точно, математическое ожидание выигрыша в такой игре равно математическому ожиданию проигрыша, т.е.

(проигрыш)×(вероятность проигрыша) =

= (выигрыш)×(вероятность выигрыша).

Говорят, что с государством в азартные игры играют только дураки... В этом есть доля истины. (Да простят нас те, кто в эти игры играет!) Действительно, ведь если даже по-честному разыгрывается какая-то сумма денег, собранных за счет купленных лотерейных билетов, то часть денег уходит организаторам на покрытие связанных с лотереей издержек (а может, и на что-нибудь еще...), а достаточно большая часть денег возвращается потом государству в виде налога за выигранную сумму.

Так что «игры с нулевой суммой» не получается вовсе; скорее всего, у игрока остается «нулевая сумма» в кармане!

И вдруг после всех этих разглагольствований мы поставили вопрос: «Можно ли *выигрывать* в лотерею?» Ну, ясно же, что нет! Это только что было объяснено! Ну, *выиграть* – можно, а вот *выигрывать*? Но давайте все же уточним, в какую лотерею можно выигрывать и почему.

Мы рассмотрим весьма популярную в бывшем Советском Союзе в конце прошлого века лотерею «Спортлото». Вам продается условно за один рубль (ну, разве это деньги?) билетик с 49 перенумерованными картинками разных видов спорта в виде таблички (7×7). Вы смотрите на малюсенькие символические картинки, и у вас перед глазами оживают любимые вами виды спорта. Что естественно делает человек? Он почему-то помечает крестиками именно те виды спорта, которые ему по душе. Что поделаешь, такова человеческая натура... А на самом деле, каких бы два вида спорта отметили бы вы среди следующих пяти: футбол, бриндсвей, шаушау, хоккей или волейбол? Наверное, любую из пар: «футбол + хоккей», «футбол+волейбол» или «хоккей+волейбол». Потому что, кто знает, что это за игры такие бриндсвей и шаушау? Да по секрету сказать, таких игр и вовсе нет – это я их просто выдумал.

Так давайте представим, что вы, учитывая психологию большинства игроков в лотерею, выбираете все же пару «бриндсвей+шаушау». Всего возможно десять всевозможных пар из пяти названных предметов:

футбол & бриндсвей,
футбол & шаушау
###футбол & хоккей
###футбол & волейбол
бриндсвей & шаушау
бриндсвей & хоккей
бриндсвей & волейбол
шаушау & хоккей
шаушау & волейбол
###хоккей & волейбол

.Мы пометили здесь знаком «###» те пары видов спорта, которые по душе «нормальным» людям..

Предполагается, что жребий вытягивается по-честному, т.е. вероятность того, что будет выбрана какая-либо определенная пара из всех 10 возможных, равна 1/10. Допустим, играет в эту игру, кроме вас, еще 99 «нормальных» людей, которые предпочитают выбирать какую-либо из трех упомянутых выше «нормальных» пар или, уж на худой конец, «подмешивают один из двух «ненормальных» видов спорта, но этим мы для простоты анализа пренебрежем. Вы же выбираете пару «бриндсвей+шаушау». Пусть лотерейный билет стоит 1 рубль, что означает, что «на кону» находится 100 рублей.

Итак, девять шансов из 10, что вы проиграете, т.е. в среднем за игру вы проигрываете (1 руб.)$\times$0.9 = 90 копеек. Выигрываете вы (в среднем) в одном случае из десяти, но уж зато весь кон, т.е. 99 рублей (за вычетом рубля, который вы заплатили за билетик)! Каков же будет ваш ожидаемый выигрыш в такую лотерею? Легко посчитать:

$$\textbf{Ваш выигрыш} = \frac{1}{10}\times 99\,руб - \frac{9}{10}\times 1\,руб = 9\,руб\ !$$

Остальные же игроки в случае выигрыша получают те же 99 рублей, но уже на целую группу, т.е. выигрыш делится между всеми «счастливчиками», кто угадал те же цифры (а таковых при трех возможных исходах оказывается в среднем 33 человека...). Значит, те же 99 рублей приходится делить на 33, а в результате средний выигрыш каждого из 99 «нормальных» игроков равен.

Выигрыш «нормального» игрока = $\frac{1}{10}\times\frac{99}{33}-\frac{9}{10}\times 1=-60$ *коп.*

Вот те на: выигрыш оказался отрицательным! Не верится даже после расчетов? Проверьте сами!

Я, читая лекции по теории вероятностей в Калифорнийском университете Сан-Диего (UCSD), провел этот эксперимент во время лекции на группе американских студентов. Я заготовил «лотерейные билетики» с пятью именами: Линкольн, Бузыкин, Вашингтон, Чичиков и Рейган. Естественно, американские студенты и слыхом не слыхивали, кто такой Чичиков, а тем паче Бузыкин, на которых я и поставил. Естественно, я выиграл! Правда, нашелся один китайский студент, который при моем объяснении перед игрой в лотерею почувствовал подвох: он тоже выбрал ту же совершенно нелепую пару. Пришлось выигрыш разделить пополам... (Я не очень переживал, поскольку играли на условные единицы, причем, конечно, даже не на бывшие в свое время российские «у.е.».)

Вся эта история основывается на якобы действительном происшествии, случившемся в Москве где-то в конце 70-х годов прошлого столетия. Два выпускника то ли ВМК[40] Московского университета, то ли МФТИ[41] работали в вычислительном центре, обслуживавшем лотерею «Спортлото». Они как-то вечерком после очередного розыгрыша лотереи проанализировали, каким образом распределяются отмеченные участниками лотереи виды спорта. Нашли около десятка таких непопулярных, которые практически никогда не выбирались. Из десяти непопулярных видов спорта можно составить $\binom{10}{7}=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}=120$ различных наборов, которые были «необычными», а потому, если выигрывали, то выигрывали всю сумму полагающегося выигрыша, поскольку выигрыш не с кем было делить!

40 **ВМК** – Факультет Вычислительной математики и кибернетики.

41 **МФТИ** – Московский Физико-технический институт

Потом рассказывали, что, мол, они выигрывали от раза к разу, были заподозрены в каком-то мошенничестве, но адвокат их выгородил, объяснив, что они на мошенники, а обычные рядовые математики...

Красивая байка! Но, к сожалению, видимо, далека от истины. Если вспомните, то какие-то серьезные суммы (типа нескольких десятков тысяч тогдашних рублей) давались только за угадывание типа «7 из 7» или «6 из 7». Заметим, что эти суммы в принципе *не имели никакого отношения* к общей сумме денег, разыгрывавшихся в лотерее. Итак, соответствующие вероятности равны:

Вероятность угадать «7 из 7» =

$$\frac{1}{\binom{49}{7}} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43} \approx 1.16 \cdot 10^{-8},$$

Вероятность угадать «6 из 7» =

$$\frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{49\cdot 48\cdot 47\cdot 46\cdot 45\cdot 44} \approx 7.15\cdot 10^{-8}.$$

Понятно, что о выигрыше при максимальных выдаваемых суммах счастливчикам порядка нескольких миллионов (порядка десяти!), еще могла бы идти речь о систематических выигрышах. Но выигрыши в «Спортлото» никогда не были столь щедрыми! Так что даже на один из 120 «необычных» билетов вряд ли можно было «в среднем» отыграть деньги, затраченные на покупку 120 билетов. А об «устойчивом» выигрыше при не так уж часто проводившихся лотереях речь и не шла...

Вряд ли выпускники-математики из МГУ, догадавшиеся до такой остроумной «психологической» игры в лотерею, не просчитали бы заранее ожидаемый средний выигрыш! А потом откуда у программистов была возможность тратить чуть ли не всю свою месячную зарплату на покупку 120 билетов «Спортлото»?

Но, что ни говорите, идея завлекательная!

2.4. Козломатика

Аленушка: Не пей, братец, из лужицы – козленочком станешь...
Братец-Иванушка: А вот за «козлёночка» – ответишь!

По мотивам русской народной сказки

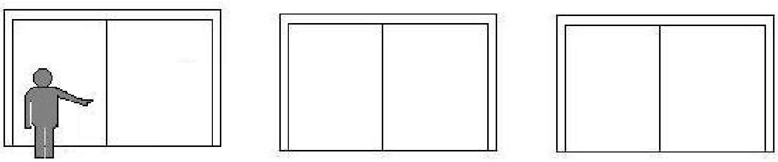
В 1990 году в американском журнале «*Parade Magazine*» была опубликована вероятностная задачка, получившая название «Парадокса Монти Холла». Мэрилин Савант[42], ведущая свой небольшой

[42] **Мэрилин Савант** (род. 1946), американская журналистка, которая с 1986 года ведет рубрику “Ask Marilyn” в американском журнале “Parade magazine”, где она отвечает на разнообразнейшие вопросы читателей.

раздел «Спросите Мэрилин», наряду с задачкой дала и ее решение, но без объяснений. Решение этой задачи на первый взгляд совершенно противоречило здравому смыслу, что и вызвало волну негодования со стороны как математиков-любителей, так и со стороны университетских профессоров математики. Редакция была завалена гневными письмами....

В чем же заключалась задача? Она звучала так: Представьте, что вы стали участником следующей игры. Перед вами трое закрытых ворот, за одними из них находится автомобиль, за двумя другими – козлы. Ваша задача – угадать машину. (Предполагается, что машина ценнее козла, хотя, впрочем, ведь говорят же в народе, что любовь зла – полюбишь о козла...)

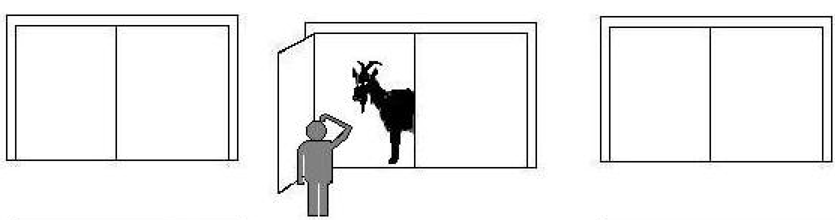
Вы выбираете одни из ворот, например, левые.



Задача о выборе ворот.

Конечно, вам хочется выбрать машину, но... Но правит всем Госпожа Удача или – не обижая обидчивых мужчин – Господин Случай. Вы выбираете ворота наугад: шансы выиграть машину – ровнехонько одна треть.

Вы делаете свой выбор наугад, но тут хозяин открывает перед вами одни из оставшихся ворот и показывает вам, что за теми, другими воротами (например, в нашем случае – средними) стоит козёл! (Такая возможность всегда есть, ибо козлов-то два!)



И вот вам показали козла...

Журнал этот издается в виде приложения почти к сотне ведущих газет США.

Ведущий спрашивает вас: «А не хотите ли сменить ваше решение? Вам дается возможность отказаться от первоначального выбора и выбрать после показа козла другие, оставшиеся закрытыми ворота».

Возникает поистине Гамлетовский вопрос: «Быть или не быть? Менять или не менять?» Сохранить свой первоначальный выбор или же переключиться на другие оставшиеся ворота (в нашем случае – правые)?

Интуитивно, кажется, что такое предложение вовсе не имеет смысла: что изменится, если вы поменяете ворота? И правда, перед вами двое ворот, за одними – козел, за другими – машина... 50 шансов из 100, что за вашими воротами козел, но 50 же шансов и за то, что за вашими воротами машина? Зачем менять, как говорится «жило на мыло»?...

Однако Мэрилин в своем решении утверждала, что в случае смены выбранных ворот вероятность выигрыша машины возрастет вдвое! Иначе говоря, вместо 1/3 она станет равной 2/3!

Ну, это же какой-то бред собачий (или даже козлячий)! Мы же твердо убеждены – это нам подсказывает наш здравый смысл! – что смена не имеет смысла! И редакцию буквально завалили письмами разгневанные читатели. Можете себе представить, что пришло около 10 тысяч писем! Я процитирую вам некоторые фрагменты из этих писем, которые помещены на вебсайте Мэрилин Савант (не приводя истинных имен писавших).

Один, видимо, весьма интеллигентный профессор написал довольно ласково:

Могу ли я посоветовать вам ознакомиться с элементарным учебником по теории вероятностей прежде, чем стараться отвечать на вопросы подобного рода в дальнейшем? **Профессор Флоридского университета.**

Некоторые замечания были, что называется, «политически некорректными»:

Возможно, что женщины смотрят на математические проблемы иначе, чем мужчины. **Джентльмен из штата Орегон.**

Иной раз попадались и откровенные хулиганы:

Сама ты коза[43]*!* **Профессор Нью-йоркского колледжа.**

---

[43] Возможно, мой перевод и не совсем точен: скорее всего, профессор имел в виду: «Сами вы козлица, мадам!» Тем не менее, заметим, что «ко-

А иногда… Впрочем, это не столько о решении, предложенном Мэрилин, сколько об американской системе образования:

Конечно, вы где-то ошиблись. Однако посмотрим на вещи с другой стороны. Если бы все эти «доценты с кандидатами» ошибались, то наша страна оказалась бы в весьма затруднительном положении. ***Доктор наук Исследовательского института Министерства обороны США***

Но ради бога, не подумайте, что все авторы писем были столь «образованы» и самонадеянны, были и другие письма:

Слышали бы вы, как дети одновременно воскликнули: «О мой боже! Она ведь права!» ***Учительница одной из школ штата Калифорния***

Должен признаться, что я сомневался в правильности вашего ответа, пока ученики пятого класса не доказали мне, что вы правы. Все, что я могу сказать теперь: «Вот это да!» ***Учитель одной из школа штата Висконсин***

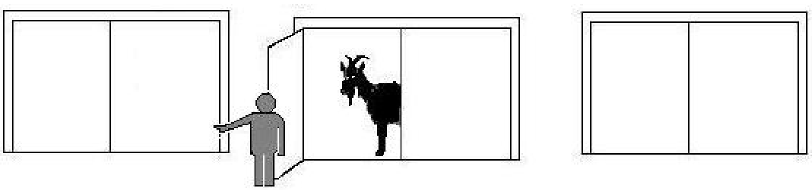
Были даже и милые шутки:

Одна из моих учениц хочет у вас узнать, были ли это дойные козочки или же старые душные козлы. Это существенно скажется на ее предпочтении, и тогда ее решение будет отличаться от вашего! ***Учительница одной из школ штата Вирджиния.***

Интересно, не правда ли, что в основном дети, не отягощенные грузом ненужных знаний и предрассудков, решили эту задачу правильно. Не зря говорят: «Устами младенца глаголет истина!»

Ну, удалось мне заинтересовать вас проблемой «два козла, одна машина»? Тогда давайте посмотрим на нее внимательнее.

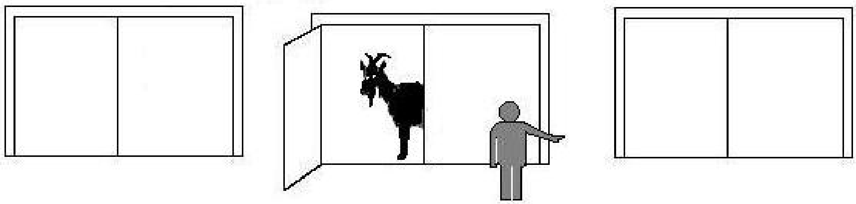
Итак, допустим, вы выбрали левые ворота. Ведущий открывает средние ворота, и вы видите козла.



Может, не менять ворота?

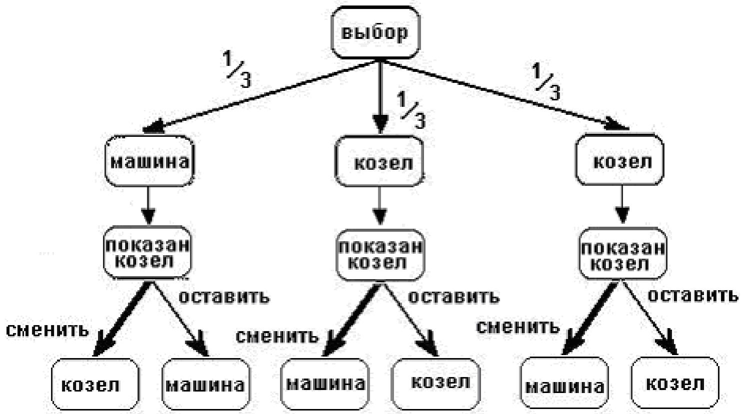
зел» в американском бытовом жаргоне не несет того оскорбительного оттенка, который это слово несет в ново-русском языке (см. «Толковый словарь ново-русского языка» под редакцией В.С. Черномырдина).

Должны ли вы изменить свой первоначальный выбор и на этот раз выбрать правые ворота?



Или все же поменять?

Чтобы объяснить ход правильных рассуждений, мы прибегнем к построению так называемого «дерева исходов», называемого иногда «деревом решений».



«Дерево решений» для задачи о выборе ворот.

На нижнем уровне «дерева решений» (растет оно почему-то всегда сверху вниз ☺) внизу расположены возможные исходы, жирными стрелками показаны исходы в случае, если вы переключились на другие ворота при показе вам козла. Чтобы сделать рисунок еще более понятным, оставим на нем лишь исходы, которые соответствуют случаю смены ворот.

Упрощенное «дерево решений» для задачи о выборе ворот.

Сразу стало видно, что при смене ворот из трех возможных исходов в двух случаях вы выигрываете машину!

Так что «слишком умный» профессор лучше бы не сидел за чашечкой кофе и критиковал Мэрилин, а взял бы да не потрудился написать простенькую формулу почти на словесном уровне:

Pr {***выигрыш машины***} =

Pr {***за воротами машина***} ×

×Pr{***выигрыш при смена ворот, когда за ними машина***}+

+ Pr{***за воротами козел***}×

×Pr{***выигрыш при смена ворот, когда за ними козел***}.

Посмотрим, что мы имеем в нашем случае:

Pr {***за воротами машина}*** = 1/3

Pr {***выигрыш при смена ворот, когда за ними машина***} = 0

Pr {***за воротами козел***} = 2/3

Pr {***выигрыш при смена ворот, когда за ними козел***} =1.

Отсюда легко находим $(1/3)\cdot 0 + (2/3)\cdot 1 = 2/3$. Так что права Мэрилин!

Тематика оказалась столь увлекательной, что мне пришла в голову мысль создать ветвь теории вероятностей – КОЗЛОМАТИКУ. Это, конечно, шутка, но студентам университета Джорджа Вашингтона, где я читал курс прикладной математики, весь раздел, касавшийся условный вероятностей, я прочел, базируясь именно на «козломатике».

Давайте и мы немножко погрузимся в эту тематику. Но чтобы заняться этой тематикой, надо заняться чуть-чуть математикой. Обещаю вам, это будет нетрудно, хотя, возможно, чуточку нудно. Но если не хотите, то пропустите следующий раздельчик.

2.5. Формула полной вероятности

Полная вероятность
лучше худого шанса.
Лука Умищев

Исчисление вероятностей началось с простых операций – сложения и умножения. Сначала речь не шла о вероятности, как о числе, лежащем между нулем и единицей: рассматривалось число шансов, получить тот или иной исход. Естественно, что от этого рукой подать до «частотного» определения вероятности: остается лишь поделить число возможных благоприятных исходов на общее возможное число исходов. Тем не менее, как ни близки были к формулировке теоремы сложения вероятностей Джироламо Кардано, Блез Паскаль, Пьер Ферма или Якоб Бернулли, впервые удалось четко сформулировать эту теорему только Томасу Байесу. Эта теорема гласит, что вероятность наступления одного из нескольких несовместных событий равна сумме их вероятностей.

Обращаясь к уже известной игре в кости, можно сказать, что вероятность выпасть либо единице, либо пятерке равна $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$ (т.е. два шанса из шести возможных).

Работа Томаса Байеса , содержащая теорему сложения вероятностей, была опубликована уже после его смерти под длинным названием «*Опыт решения задач по теории вероятностей покойного достопочтенного мистера Байеса, члена Королевского общества. Сообщено мистером Прайсом в письме Джону Кемтону, магистру искусств, члену Королевского общества*».

Томас Байес
(1702 1761)
Английский математик член Лондонского королевского общества . Обучался дома, потом семнадцати лет поступил в Эдинбургский университет. Затем Байес помогал отцу – пресвитерианскому священнику, проводить службу, а вскоре сам стал священником. Он сформулировал теорему сложения вероятностей. Его имя носит и известная теорема гипотез.

Теорема умножения вероятностей была сформулирована строго впервые Абрахамом Муавром в 1718 году в книге «*Доктрина шансов*» («*The Doctrine of Chances*»). Там он ввел понятие зависимых и независимых событий: « ... два события независимы, когда появление одного из них не оказывает никакого влияния на появление другого». Там же он ввел правило умножения вероятностей, сопроводив его следующим простым примером. Пусть имеется две колоды карт, в каждой из них разные масти от двойки до туза (т.е. по 13 карт). Тогда вероятность выбрать наугад по тузу из каждой колоды равна $\frac{1}{13}\times\frac{1}{13}=\frac{1}{169}$.

Далее Муавр определил и условную вероятность, сопроводив определение опять наглядным примером: два туза вытаскиваются наугад из колоды в 26 карт, состоящей из двух мастей. Тогда первый туз будет вытащен с вероятностью $\frac{2}{26}=\frac{1}{13}$, а поскольку второй туз вытаскивается из набора в 25 карт, где уже нет одного туза, то вероятность вытащить второго туза будет уже $\frac{1}{25}$.

Для вероятности появления зависимых событий он дал следующую формулировку: «... вероятность появления двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на вероятность того, что другое должно появиться, если первое из них уже появилось. Это правило может быть продолжено для нескольких событий».

Так в случае, описанном выше, вероятность вытащить наугад из колоды в 26 карт двух тузов равна

$$\frac{1}{13}\times\frac{1}{25}=\frac{1}{325}.$$

Байес догадался до вычисления условных вероятностей:

Но ни Муавру, ни Байсу была еще не известна формула полной вероятности, которая записывается так

$$\Pr\{A\}=\sum_{k=1}^{n}\Pr(A\mid B_k\}\cdot\Pr\{B_k\},$$

где $\Pr\{B_k\}$ - вероятность произойти событию B_k, $\Pr(A\mid B_k\}$ - вероятность произойти событию A при условии, что событие B_k уже произошло, причем события B_k образуют так называемую полную группу событий (т.е. всех событий, при осуществлении которых может произойти и событие A).

По существу, формулу Байеса в том виде, в котором мы пользуемся ей сейчас, впервые записал Пьер Лаплас. Он в своей работе «*Теория анализа вероятностей*» («*Théorie Analytique des Probabilités*») сформулировал свой так называемый принцип вероятности причин, суть которого заключается в следующем.

И все же не будем обвинять Джероламо Кардано в том, что он не изобретал формулы Кардано, которая носит его имя, а Томаса Байеса в том, что он даже и не знал о формуле Байеса (когда умер Байес, Лапласу было всего 12 лет).

Ведь не сами же они называли формулы своими именами! Это, как всегда, историческую путаницу внесли благодарные потомки...

Однако, после этого небольшого, но, возможно, немного утомительного для некоторых, экскурса в историю, как говорят французы, retournons a nos moutons[44]: продолжим рассмотрение задачи о машинах и козлах.

[44] В переводе с французского – «вернемся к нашим баранам». Слава из французской комедии XV века, ставшие поговоркой. Этими словами су-

2.6. Высшая козломатика

Козлик был ужасно зол –
Он узнал что он «козёл»...
Лука Умищев

Ну, с двумя козлами и одной машиной мы разобрались. А что будет, если ворот у ведущего будет N, спрятанных за ними козлов за ними будет M, а за остальными будут стоять машины (т.е. будет $N - M$ машин)? Стоит ли менять ворота? Думается, будь вопрос задан так, то уж в этом случае и многоопытные профессора не понадеялись бы на свою интуицию, а написали бы формулу. И не ошиблись с ответом!.

Чтобы вам не лазить по другим страницам, повторим словесную запись формулы полной вероятности выигрыша машины после смены ворот.

Pr {***выигрыш машины***} =

Pr {***за воротами машина***} × Pr {***выигрыш при смене в этом случае***}+

+Pr{***за воротами козел***}× Pr{***выигрыш при смена в этом случае***}.

Выбрать машину с первого раза машину можно с вероятностью

Pr {***за воротами машина***} $= \dfrac{N-M}{N}$.

При смене ворот, вы выбираете любые из оставшихся $N - 2$, за которыми стоит $M - 1$ козлов и $N - M - 1$ машин. (Одни ворота с козлом открыты, а за выбранными воротами, которые вы меняете, стоит машина.) Поэтому

Pr {***выигрыш при смена ворот, когда за ними машина***} =

$$= \frac{N-M-2}{N-2}.$$

дья непрерывно прерывает речь обвинителя по делу кражи баранов, когда тот в своей речи очередной раз уходит от темы. Теперь это выражение, обычно цитируемое по-французски, используется в смысле «вернемся к затронутому вопросу».

Пусть теперь за выбранными воротами стоит козел.

$$\Pr\ \{\textit{\textbf{за воротами козел}}\} = \frac{M}{N}.$$

За выбранными воротами стоит козел да еще один козел показан, т.е. остается $N-2$ ворот, за которыми стоит $M-2$ козлов и все те же $N-M$ машин. В этом случае

$$\Pr\ \{\textit{\textbf{выигрыш при смена ворот, когда за ними козел}}\} = \frac{N-M}{N-2}.$$

С учетом этих соображений приведенная выше словесная формула обретает следующий формальный вид:

$$\Pr\ \{\textit{\textbf{выигрыш машины}}\} = \frac{M}{N}\times\frac{N-M}{N-2}+\frac{N-M}{N}\times\frac{N-M-1}{N-2} =$$

$$= \frac{M(N-M)+(N-M)(N-M-1)}{N(N-2)} = \frac{(N-M)(N-M)(N-1)}{N(N-2)}.$$

Теперь осталось только убедиться, что

$$\frac{(N-M)(N-M)(N-1)}{N(N-2)} > \frac{N-M}{N}.$$

Это неравенство эквивалентно, после приведения к общему знаменателю, следующему:

$$(N-M)(N-1) > (N-M)(N-2),$$

или $(N-1) > (N-2)$, что верно всегда. Заметьте – **всегда**! Даже если за 1000 воротами стоит 999 машин и всего один козел: допустим, что вы выбрали машину (и без того шансы были 999 из 1000 – стоит ли менять?), но если вам показали единственного козла, то за любыми другими воротами машина будет уже **наверняка**.

Говоря о «высшей козломатике» интересно рассмотреть и парочку более сложных, но зато и более интересных задач, которые имеют даже слегка психологический характер.

Представим теперь, что ведущий – ваш друг, который желает вам помочь. За воротами спрятано два козла разного цвета – один черный, а другой – белый. Ведущий не может дать вам прямой подсказки, но есть договоренность, что он будет показывать черного козла, когда вам надо менять ворота и показывать белого козла, когда вам менять ворота не надо, т.е. вы и так уже выбрали машину.

Какое богатство возможностей, казалось бы, открывается! Однако прежде чем поддаваться подсказкам интуиции, давайте проведем простенький анализ возможных исходов:

1. С вероятностью 1/3 вы выбрали ворота, за которыми стоит машина. Ведущий показывает белого козла, и вы не меняете ворота. Машина ваша!
2. С вероятностью 1/3 вы выбрали ворота, за которыми стоит белый козел. Ведущий показывает черного козла, и вы меняете ворота. Машина ваша!
3. С вероятностью 1/3 вы выбрали ворота, за которыми стоит черный козел. Ведущий обязан по условиям игры показать Вам козла, но у него остался только белый козел... Он показывает белого козла, и вы не меняете ворота! Вам достается черный козел...

Так что все равно вероятность выигрыша равна только 2/3...

Допустим, что вы не верите в доброжелательность ведущего и действуете вопреки его подсказкам.

1. С вероятностью 1/3 вы выбрали ворота, за которыми стоит машина. Ведущий показывает белого козла, что означает – не меняй ворот! Но вы, не веря ему, меняете ворота. Вам достается черный козел...
2. С вероятностью 1/3 вы выбрали ворота, за которыми стоит белый козел. Ведущий вынужден показать черного козла, поскольку у него другого просто нет. По предварительной договоренности это означает – меняй ворота! Но не веря ведущему, вы не меняете ворота, и вам достается белый козел...
3. С вероятностью 1/3 вы выбрали ворота, за которыми стоит черный козел. Ведущий показывает вам оставшегося белого козла... Но вы, не веря ему меняете ворота! На этот раз вам просто неизбежно досталась машина.

Иначе говоря, ваше недоверие ведущему обходится вам уменьшением вероятности успеха вдвое по сравнению с тем случаем, если бы верили хозяину!

Рассмотрим еще один вариант: те же условия игры, но ведущий – обманщик, а вы ему доверяете. Он опять обещает показывать белого козла, если вам не нужно менять ворота, но сам поступает наоборот: если вы выбрали ворота, за которыми стоит машина, то он непременно покажет вам черного козла! Вы же (по наивности или по глупости) ему полностью доверяете. Что же получается в этом случае?

1. С вероятностью 1/3 вы выбрали ворота, за которыми стоит машина. Ведущий показывает черного козла, и вы простодушно меняете свой выбор, становясь обладателем белого козла...
2. С вероятностью 1/3 вы выбрали ворота, за которыми стоит белый козел. Ведущий вынужден показать вам черного козла. Вы, веря ему, меняете ворота. Вам и в этом случае достается машина.
3. С вероятностью 1/3 вы выбрали ворота, за которыми стоит черный козел. Ведущий показывает вам оставшегося белого козла... Простодушно веря ему, вы не меняете ворота! На этот раз вам достался козел, который стоял за воротами...

И в этом случае вы в проигрыше!

Можно построить вот такую табличку:

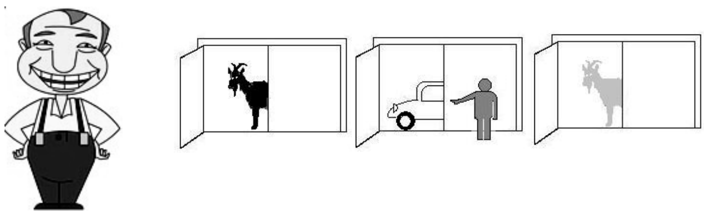
Кто ведущий на самом деле	**Ваше отношение к ведущему**	**Вероятность выигрыша**
Ваш друг	Вы верите ему	2/3
Ваш друг	Вы не верите ему	1/3
Ваш недруг	Вы верите ему	1/3
Ваш недруг	Вы не верите ему	2/3

Из этой таблицы прямо-таки напрашивается мораль: верьте честным людям – и вы выиграете. В то же время опасайтесь обманщиков – они доведут до беды. Правда, кто бы знал, как их безошибочно определять!

Очень напоминает известную мольбу: «Господи, дай мне силы изменить то, что я могу изменить…Дай мне смирение принять то, что я не в силах изменить….И дай мне разум отличить одно от другого...»

Конечно, во всех этих усложненных ситуациях результаты с более чем тремя воротами, не столь просты, но суть остается та же: не поверил честному – проиграл, поверил нечестному – тоже проиграл.

На этих увлекательных примерах давайте прервем наши занятия козломатикой – у нас осталось еще немало интересного впереди...



2.7. Мальчик или девочка?

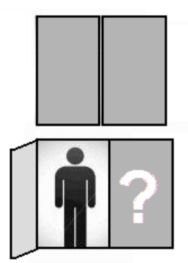
Кто больше: Мальчик-с-пальчик
или Дюймовочка?

Из «Задачника» Луки Умищева

К вам в гости пришла незнакомая вам пара с мальчиком. Во время знакомства, вы спрашиваете, сколько у них всего детей, и новые гости отвечают вам, что всего у них двое детей.

- А второй ребенок – мальчик или девочка?

- А вы угадайте!



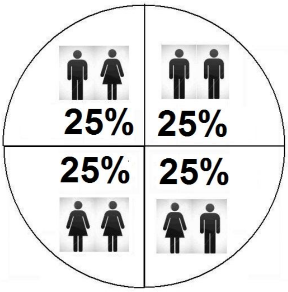
Кто второй ребенок в семье: мальчик или девочка?

- Ну, а что гадать? Фифти-фифти!

- Нет, вы ошибаетесь!

Вы недоуменно пожимаете плечами: какая может быть ошибка? Ведь в мире почти точно половина людей мужского пола, а половина – женского, и это правильно для любых возрастов. Но тут ваш гость объясняет вам «на пальцах», почему вы неправы.

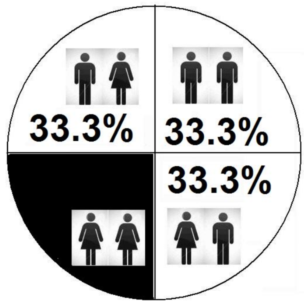
Действительно, девочек и мальчиков в мире практически поровну. Первый ребенок может быть либо девочкой, либо мальчиком с равной вероятностью. Так же и с появлением второго ребенка. Это означает, что всего возможны четыре равновероятных исхода, которые представлены на диаграмме.



Какие возможны пары детей, если всего два ребенка в семье.

Однако вы уже знаете, что один из детей пришедших к вам гостей – мальчик. Следовательно, у них не может быть двух девочек! А это меняет ситуацию. Теперь есть только три возможности: у ваших гостей могут быть либо два мальчика, либо мальчик и девочка, причем во втором случает сестра мальчика, которого вы уже знаете

Вот и получается, что вероятность того, что второй ребенок в этой семье будет мальчик, равна уже не 50%, а 66%! (Точнее, 66 и 2/3 процента).



Вот, что остается, если вам сказано, что один

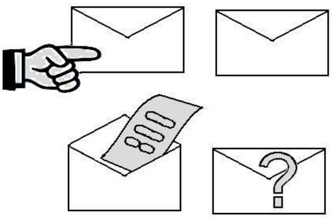
Вот если бы ваши новые гости сказали, что у нас два ребенка, но младшего мы оставили с бабушкой, то тогда вы были бы правы, сказав, что шансов за то, что второй ребенок – мальчик ровнехонько 50 из 100.

2.8. Стоит ли менять шило на мыло?

Ну, разобрались мы, наконец, с козлами и машинами да с братьями и сестрами... А тут мне мой знакомый подбрасывает этакую простенькую на вид задачку[45].

Известно, что в двух конвертах лежат некие различающиеся суммы денег. Вы выбираете один из них, а вас спрашивают: «А не хотите ли поменять свое решение и взять другой конверт, вместо выбранного?»

[45] Задача и ее решение сообщены автору российским математиком профессором Владимиром Ротарем.



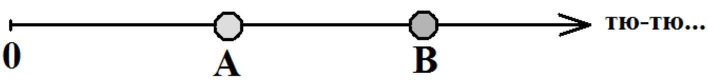
Выбор конверта с деньгами.

Я рассмеялся над шуткой: зачем имеющегося уже в руках кота менять на кота в мешке? Но мой знакомый заметил, что существует процедура выбора, базирующая на некотором вероятностном механизме, которая делает шансы получить наибольший выигрыш более чем с 50 шансами из 100. Я опять ухмыльнулся: «А какая разница, бросать монету до или после выбора?» (Почему-то сразу в голову приходят только монеты да игральные кости!)

И ... лишний раз убедился, что интуиция – вещь коварная. (А самое коварное в ней то, что она подсказывает нам верить собственной интуиции ☺.)

Я получил вот такое элегантное объяснение того, как можно-таки выбрать конверт с большей суммой!

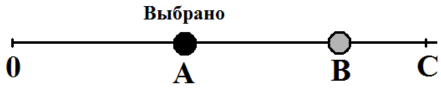
Итак, вы выбрали один из конвертов, и в нем оказалась некая сумма X. Понятно, что если в конвертах разные суммы денег, то в одном из них денег больше, чем в другом ☺. Обозначим эти две суммы через A и B, причем положим $B>A$.



Размещение большей и меньшей сумм на оси возможных значений.

Ваш первоначальный выбор одного из конвертов осуществляется с вероятностью ½ - ведь вы заранее ничего не знаете, а посему вполне можете сыграть в орлянку, поставив орла на левый конверт, а решку – на правый.

А это означает, что $\Pr\{X = A\} = ½$ и $\Pr\{X = B\} = ½$. Выберем некоторый интервал $[0, C]$ такой, что X лежит строго внутри него. Рассмотрим первую из возможных ситуаций: вы первоначально выбрали конверт с меньшей суммой денег.



Выбран конверт с наименьшей суммой.

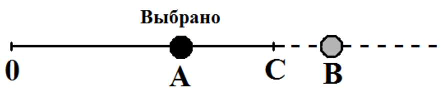
Возьмем случайное число... Откуда? Если у вас в компьютере есть программа ***Excel***, то в любой ячейке напечатайте **=rand()** и нажмите любую клавишу – в ячейке тут же выскочит случайное число. Если у вас нет этой программы, воспользуйтесь вот этой табличкой, заготовленной специально для вас, если вам захочется поиграться с циферками.

Таблица случайных чисел (равномерное распределение)

0.441381	0.396012	0.891069	0.542071	0.597732
0.750065	0.727883	0.099228	0.470205	0.079041
0.748688	0.151770	0.951628	0.842250	0.891521
0.195161	0.928112	0.168997	0.667952	0.599578
0.318439	0.258844	0.935449	0.638298	0.282296

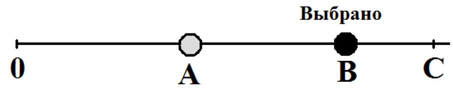
Пусть, к примеру, $X = 800$, вы выбираете некоторое большее число, например, $C = 1000$, затем проводите «нормирование», принимая C за 100%, т.е. X становится в относительных единицах равным $800 : 1000 = 0.8$. Затем берете случайное число Z (например, первое из таблицы) . И вот тут-то вы применяете «рандомизированую стратегию», как говорят в теории игр: если $Z < X$, то вы оставляете первоначально выбранный конверт, если, $Z > X$, то вы отказываетесь от выбранного конверта в пользу еще не распечатанного.

Кстати, решение в этой ситуации остается справедливым и в случае, если вы выбрали точку С правее точки А, но левее точки В. (Действительно, вы же не знаете значения В, поэтому можете выбрать С и левее.)



Выбран конверт с наименьшей суммой, причем большее значение за пределами интервала, где выбрасываются случайные числа.

То же рандомизированое правило применяется и тогда, когда выбранный вами конверт содержит наибольшую сумму.



Выбран конверт с наибольшей суммой.

Ну, и в чем же, спросите вы, «клюква»? Ведь в новом-то конверте может оказаться меньшая сумма? Да, может. Но никто и не утверждал, что вы непременно выиграете, речь шла о том, что при такой стратегии поведения ваши шансы выиграть становятся больше 50%.

А теперь проделаем небольшие вычисления. Обозначим вероятность попадания случайной точки Z в интервал [0,A] через p_A, а в интервал [0, B] через p_B. Понятно, что вероятность случайной точке попасть в больший интервал больше, чем в меньший, т.е. $p_A < p_B$.

Начнем с предположения, что вами выбран конверт с большей суммой денег. Вы отказываетесь от полученного конверта с суммой X с вероятностью $\frac{C-B}{C}$, а с вероятностью $\frac{B}{C}$ оставляете его и остаетесь в выигрыше.

Вторая возможность: вы выбрали конверт с меньшей суммой. Если $Z<A$, а это происходит с вероятностью $\frac{A}{C}$, вы отказываетесь от предлагаемой суммы X и берете другой конверт, где на самом деле сумма денег больше! Это происходит с вероятностью $\frac{C-A}{C}$.

Итак, что мы получили в результате? Полная вероятности выигрыша оказалась равной $P = \frac{1}{2}\cdot\frac{C-A}{C}+\frac{1}{2}\cdot\frac{B}{C}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{B-A}{C}\right)$, что всегда больше нуля, поскольку по условию задачи $B > A$.

Понятно, что стратегия принятия решения справедлива для любых величин C, лишь бы они были больше того, что обнаружено в выбранном вами конверте. Да и сами случайные числа не обязательно должны иметь равномерное распределение.

3. ЗАКОНОМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНОСТИ?

У людей, усвоивших великие принципы математики, одним органом чувств больше, чем у простых смертных.

Чарльз Дарвин[46]

3.1. На самом ли деле все это случай?

Случай - псевдоним Бога, когда он не хочет подписаться своим собственным именем.

Анатоль Франс[47]

И все же, что такое случайность?

Раньше всего, пожалуй, люди столкнулись с понятием «шанс», когда приходилось делать выбор наугад из нескольких равновозможных событий: Юлий Цезарь тянул жребий, выбирая из двух соломинок, понимая, что он с равными шансами перейдет Рубикон или отступит. Игроки в кости понимают, что шанс выбросить загаданное ими значение очков на верхней грани равен одному из шести... (При условии, что кости правильные, а игрок честный.)

Интересно, что идеи теории вероятностей не так уж легко осваивали даже светлые умы прошлого. Например, известный французский математик Даламбер в своей работе «*Орлы и решки*» («*Croix ou Pile*»), посвященной «анализу шансов», ошибочно полагал,

---

[46] **Чарлз Роберт Дарвин** (1809-1882), английский натуралист и путешественник, заложивший основы современной эволюционной теории и направления эволюционной мысли – дарвинизма.

[47] **Анатоль Франс** (1844-1924), настоящее имя Анатоль Франсуа Тибо, известный французский романист и литературный критик.

что серия успехов ведет к повышению вероятности неудачи, и наоборот, серия неудач ведет к повышению вероятности успеха на следующем шаге. Авторитет Даламбера привел к тому, что среди игроков было распространено «правило Даламбера», согласно которому, после каждого выигрыша нужно было снижать очередную ставку (ну, а как же иначе, коли вероятность проигрыша возрастает?), а при проигрыше – повышать ставку. Правило это дожило до наших дней и часто используется в казино игроками, которые и слыхом не слыхивали о Даламбере! Ох уж эта вера в интуицию без понимания сути явления!

Жан Лерон Даламбер

(1717-1783)

Французский математик, механик и философ. Получил своё имя по названию маленькой церкви, на ступени которой он был подброшен матерью. Жена бедного стекольщика заменила ему мать. Став знаменитостью и гордостью французской науки, Даламбер вознаградил стекольщика и его жену, следя за тем, чтобы они не оказались в нужде, и всегда с гордостью называл их своими родителями.

Вместе с Дидро, Вольтером, Руссо, Монтескьё и другими французскими энциклопедистами участвовал в создании знаменитой французской Энциклопедии, написав к ней введение, являющееся одним из самых блестящих образцов «научного стиля». В середине 1760-х годов Даламбер был приглашён российской императрицей Екатериной II в качестве воспитателя наследника престола, но отказался принять приглашение.

Видимо, на такого рода рассуждения наводит факт статистической устойчивости частоты появления событий: ведь если выпало много решек, то «для сохранения равновесия» должны начать выпадать орлы! Это напоминает закон сохранения в формулировке Ломоносова:

> «*Все перемены в Натуре случающиеся такого суть состояния, что сколько чего у одного тела отнимется, столько присовокупится к другому. Так, ежели где убудет несколько материи, то умножится в другом месте; сколько часов положит кто на бдение, столько же сну отнимет.*»

Нам теперь, конечно, понятно, что рассуждения Даламбера неверны, если не сказать, что наивны. Проведем такой простой эксперимент. Допустим некий автомат подбрасывает монету, и выпадает орел. Затем при следующем броске выпадает опять орел. Следуя Даламберу, вы ожидаете при следующем броске появления решки с вероятностью, большей чем ½, и делаете ставку на решку. Тут появляется ваш приятель, который ни сном, ни духом не ведает, что происходило. Для него бросок автомата является первым, т.е. для него шансы выпасть орлу или решке равны.

Вот и приехали! Один и тот же эксперимент, получается, будет иметь разные вероятности исходов для разных людей?

В Америке существует целая серия анекдотов, где основной фигурой является блондинка (аналог русского Василия Ивановича, но в юбке или в шортиках). Так вот одну из них, объясняя невозможные события, профессор спросил:

- Какова вероятность встретить сейчас мамонта на улице Нью-Йорка?

- Конечно 50%!

-Как?.. Почему?..

- Ну, я либо встречу мамонта, либо не встречу – вот вам и 50%!

Статистическая устойчивость относительных частот событий не давала спокойно спать многим известным математикам. Можете ли вы представить себе серьезных людей (даже очень-очень серьезных!), которые производят тысячи подбрасываний монеты, чтобы убедиться в том, что вероятность выпасть орлу (или решетке) равна именно одной второй? Так вот полюбуйтесь на этот список:

	Число	Относительная частота

Экспериментатор	испытаний	Выпадений герба
Ж. Бюффон [48]	4040	0,5085
О. Де Морган[49]	4092	0,5005
У. Феллер[50]	10000	0,4979
К. Пирсон[51]	12000	0,5046
У. Джевонс[52]	20480	0,5068
К. Пирсон	24000	0,5005
В. Романовский[53]	80640	0,4923

Вот чем занимались в свободное от отдыха время эти замечательные и совсем не глупые люди – бросали монетку!

Если усреднить (с соответствующими весами) все эти многовековые эксперименты, то результирующая цифра будет 0.497429. (Это при общем числе бросков более 150 тысяч!)

После учебных бомбометаний майор докладывает комиссии о результатах бомбометания по цели:
- Господин генерал-полковник! Учебные бомбометания завершены успешно. Вероятность попадания в наземную цель равна 0.9! Доложил майор Умищев!
- А вы не умничайте, майор Умищев: может, обойдетесь без этих ваших дурацких вероятностей?!
- Так точно, господин генерал-полковник: 90% бомб попадает в цель!
- Постой, постой!.. Так вы бомбы бросали или проценты?! Давай говори яснее!
- Господин генерал-полковник! При бросании 10 бомб по цели девять попадают, а десятая – нет...
- Так зачем же вы, идиоты, десятую бомбу бросаете?!!

---

48 **Жорж Луи Леклерк Бюффон** (1707–1788), французский естествоиспытатель, популяризатор науки.

49 **Огастес де Морган** (1806 - 1871), шотландский математик и логик.

50 **Уильям Феллер** (1906 - 1970), крупный американский вероятностник.

51 **Карл Пирсон** (1857 - 1936), один из выдающихся статистиков, в 1911 организовал первую в мире кафедру статистики в Университетском Колледже Лондона.

52 **Уильям Стэнли Джевонс** (1835 - 1882), английский экономист, статистик и философ-логик.

53 **Владимир Иванович Романовский** (1879 - 1954), русский статистик, основатель Ташкентской школы теории вероятностей.

3.2. Игла Буффона

Многие до сих пор пытаются найти Бюффонову иглу в стоге математического сена...

Лука Умищев

Так называемая проблема «иглы Бюффона» является одной из старейших задач, относящихся к области так называемых геометрических вероятностей[54]. Бюффон сформулировал свою задачу в 1777 году, указав на ее прямое отношение к экспериментальному вычислению числа π.

Жорж Луи Леклерк де Бюффон

(1707- 1788)

Французский натуралист, математик, космолог, биолог, естествоиспытатель и писатель. Оказал огромное влияние на два последующих поколения натуралистов, включая Ламарка[55] и Дарвина. Наиболее всего прославился своей энциклопедической работой «Естественная история» в 36 томах (дополнительные 8 томов вышли уже после его смерти). Этот труд включал все известное к тому времени о естественном мире.

Он первым ввел дифференциальное и интегральное исчисления в теории вероятностей. Известный эксперимент «игла Бюффона» назван в его честь.

Был Почетным членом Петербургской Академии наук.

---

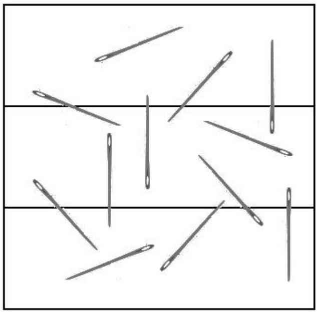
[54] Геометрические вероятности связаны со «зримыми образами»: например, попадание точки в или отрезка в заданную область на плоскости. Могут рассматриваться, конечно, и геометрические объекты большей размерности.

[55] **Жан Батист Пьер Антуан де Моне Ламарк** (1744-1829), французский учёный-естествоиспытатель. Создатель Теории Ламарка, первой стройной и целостной теории эволюции живого мира.

Суть эксперимента состоит в следующем.

На плоскую горизонтальную поверхность наносятся параллельные равноотстоящие прямые, расстояние между которыми равно *G*.

.



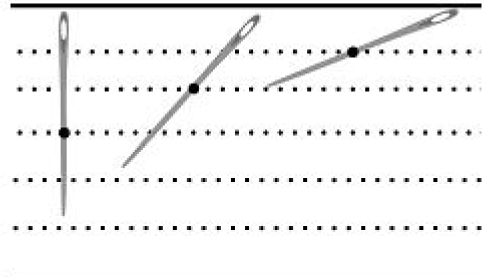
Случайное бросание иглы на разлинованную поверхность

На плоскость сверху бросается случайным образом игла. Например, она бросается с относительно большой высоты и ей дополнительно придается некоторое вращательное движения для того, чтобы усилить,эффект случайности. Длина иглы *g* меньше расстояния между параллельными прямыми. Положение упавшей на пол иглы может характеризоваться двумя следующими параметрами: положением ее центра и углом по отношению к начерченным параллельным линиям.

«Случайность» положения иглы определяется формально так: центр иглы имеет равномерное распределение на плоскости, а значение угла, образованного иглой и направлением прямой, также равномерно распределено от 0° до 180°.

После каждого броска фиксируется, пересекла или не пересекла игла одну из параллельных прямых, а число таких пересечений, *m*, фиксируется. После *n* бросков вычисляется частота пересечений.

Ясно, что если центр иглы отстоит от ближайшей линии более, чем на полдлины иглы, то игла не пересечет линию вообще, но с приближением центра иглы к линии, пересечение зависит от угла, под которым игла падает по отношению к линии.



Примеры возможных положений иглы.

Чтобы не утомлять вас выкладками (сколь просты бы они ни были, но все же связаны с интегрированием, знание которого у читателя не предполагается), мы просто укажем, что вероятность пересечения иглой линии равна:

$$\Pr\{\textbf{игла пересечет линию}\} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{g}{G}$$

А поскольку частота пересечений, равная $\frac{m}{n}$, при большом n стремится к этой вероятности, для приближенного вычисления числа π можно записать формулу:

$$\pi = 2\cdot\frac{g}{G}\cdot\frac{n}{m},$$

где по-прежнему g – длина иглы, а G – расстояние между линиями.

«Классический» опыт Бюффона производился с $g=G$, т.е. частота пересечения иглой линии должна была стремиться к величине

$$\frac{m}{n} = \frac{2}{\pi}.$$

Естественно, что опыт Бюффона заинтересовал статистиков, начались экспериментальные проверки. Но, видимо, иглу бросать труднее, энтузиастов было поменьше, чем в случае подбрасывания монет. В книге Гнеденко[56] приводится следующая таблица.

Экспериментатор	Год	Число бросков	Опытное значение
Р. Вольф	1850	5000	3,1596
У. Смит	1855	3204	3,1553
Д. Фокс	1894	1120	3,1419

Там же приводятся результаты опыта некоего Лаццарини, который в 1901 году сделал 3408 бросаний и получил опытное значение 3,1415929... Гнеденко высказывает сомнение по поводу такой подозрительной точности до седьмого знака! (Кстати, истинное значение числа π с точностью до 7-го знака после запятой равно 3,1415927.)

[56] **Борис Владимирович Гнеденко** (1912-1995), видный русский статистик, долгое время заведовавший Кафедрой теории вероятностей Московского Государственного университета.

Хоть и говорят, что о покойниках либо хорошо, либо ничего, в данном случае трудно удержаться: Лаццарини – просто мелкий математический плут... Почему, да потому, что его эксперимент – фальшивка! Проверим, сколько надо было бы получить пересечений, чтобы при 3408 бросаниях иглы получить ту частоту пересечений, которую получил Лаццарини. Для этого воспользуемся формулой, связывающей полученное значение с частотой пересечений. Обозначим неизвестное число пересечений через *x*. Тогда

$$\frac{x}{3408} = \frac{2}{3{,}1415929}$$

откуда

$$x = \frac{2 \cdot 3408}{3{,}1415929} \approx 2169.6.$$

Извините, но число *x* должно быть целым! Попробуем взять ближайшие целые числа к полученному нецелочисленному значению 2169.6 – числа 2169 и 2170. В первом случае эмпирическое значение числа «пи» оказывается равным 3.142462, а во втором – 3.141014. Иначе говоря, «не складывается» как-то результат Лаццарини: никаким образом не может быть получен его результат опытным образом. Как же было велико желание экспериментатора попасть в историю! А в результате он поистине «вляпался в историю»...

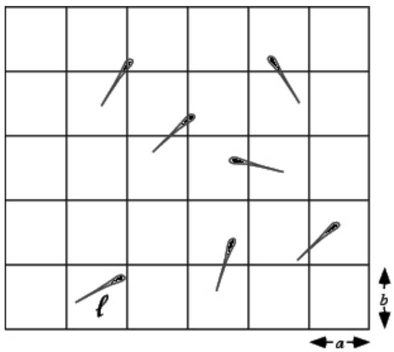
Для сравнения приведем эксперимент Бюффона, выполненный на ЭВМ. (Детали см. На сайте Евгения Скляревского www.arbuz.narod.ru/):

Число испытаний	1.000	10.000	100.000	1.000.000
Эмпирическое значение «пи»	3,1104	3,1363	3,1523	3,1439

Из таблицы видно, что сходимость процесса к некоторому «стационарному» значению крайне низка. При 1 миллионе опытов число «пи» найдено с точностью худшей, чем в античные времена: еще великий Архимед нашел это число в виде очень простенькой дроби $\frac{22}{7} \approx 3.142857$.

Но все же из приведенной таблицы видно, что с ростом числа бросков частота «стабилизируется», оставаясь, тем не менее, случайной (но все с меньшим и меньшим разбросом). Происходит то, что называется «вероятностной сходимостью». В пределе частота пересечений стремится к вероятности, которая в данном конкретном случае легко подсчитывается.

В своем трактате «*Аналитическая теория вероятностей*» («*Theorie analytique des probabilites*»), вышедшем в 1812 году, Лаплас не только скорректировал некоторые неточности, допущенные Жоржем Бюффоном, но и привел свою новую постановку задачи: «Пол разделен параллельными и перпендикулярными друг другу прямыми на небольшие прямоугольные клетки. Определить вероятность, что брошенная сверху наугад игла упадет на какую-либо из сторон любой из этих клеток».



Лаплас дал правильное решение сформулированной им задачи (хотя, однако, почему-то заменил его при последующем издании на ошибочное). Мы не приводим решения задачи с «иглой Лапласа», поскольку оно далеко не тривиально, а посему вряд ли уместно в нашей книге.

* * *

Своей задачей Жорж Бюффон не только дал рождению новому вычислительному методу (как теперь его называют, методу статистических испытаний, или методу Монте-Карло), но и окончательно ввел в теорию вероятностей геометрические вероятности.

Открытый Бюффоном вычислительный метод показался сначала многим не более, чем любопытным курьезом: зачем мудрить с бросанием иглы, если искомое число «пи» можно с любой необходимой для практики точностью вычислить при помощи рекуррентных формул? Однако жизнь доказала эффективность и полезность метода для решения многих сложных практических задач.

3.3. Монте-Карло

Бросая камни в воду, смотри на круги, ими образуемые. Иначе твое занятие будет пустою забавою.

Козьма Прутков.

Прошло «лишь двести лет» и метод, изобретенный Бюффоном, вдруг неожиданно засверкал всеми своими скрытыми до сего момента гранями!

Во время работы в Лос-Аламосе над «Манхэттенским проектом» по созданию атомной бомбы возник ряд сложнейших вычислительных задач. Задачи эти не поддавались решению ни аналитически, ни численно с использованием уже существовавших тогда первых компьютеров.

Одним из ключевых участников «Манхэттенского проекта» был американский математик Джон фон Нейман, который работал над проблемой осуществимости взрывного способа детонации атомной, а затем и водородной бомбы.

Джон фон Нейман,
или **Янош Лайош Нейман**
(1903-1957)

Венгерский математик, считающийся праотцом современной архитектуры компьютеров, а также сделавший важный вклад в квантовую физику, функциональный анализ, теорию множеств, информатику, экономику и другие отрасли науки.

Закончив в 1926 году Будапештский университет, он в 1930 году при угрозе прихода к власти фашистов эмигрировал в США и стал сотрудником Принстонского института перспективных исследований.

Архитектура первых двух поколений ЭВМ с последовательным выполнением команд получила название «фон Неймановской».

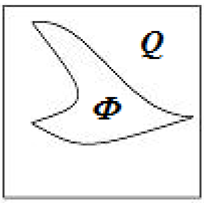
Подробнее см. главу «Пантеон».

Необходимость проведения очень сложных расчетов натолкнула фон Неймана на изобретение метода, который оказался эффективным в тех случая, когда «чисто вычислительные» аналитические методы не срабатывают.

И вот тут-то и получила свое второе рождение идея Бюффона использовать статистические испытания для решения вычислительных задач.

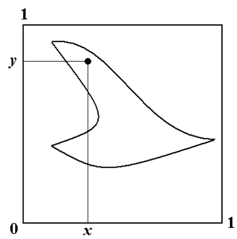
Суть метода, предложенного Нейманом, состояла в замене решаемой задачи соответствующей статистической моделью, многократная прогонка которой дает приближённое решение исходной задачи.

Рассмотрим простенький пример нахождения площади некоторой фигуры *Ф*, вписанной в единичный квадрат *Q*.



Измеряемая площадь фигуры *Ф*.

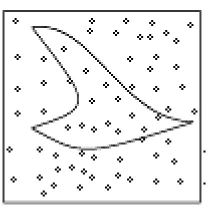
Понятно, что если бросать «наугад» случайные точки внутрь квадрата *Q*, то доля точек, попавших внутрь области *Ф*, будет пропорциональна отношению площадей Ф/*Q*. После рассмотренного выше парадокса Бертрана надо, прежде всего, договориться, что мы понимаем под словами «точки бросаются наугад».



Брошенная случайным образом точка.

Будем считать, что каждая точка (*x*, *y*) генерируется следующим образом: на отрезке [0, 1] по оси X выбирается точка *x* имеющая равномерное распределение, а затем то же делается с отрезком [0, 1] по оси *Y*.

Вот таким образом и продолжается бросание случайных точек в единичный квадрат.



Квадрат покрытый случайными точками.

Одна из трудностей такого вычислительного эксперимента заключалась в то время в том, что тогда еще не было таблиц случайных чисел и не было способов генерации случайных чисел на ЭВМ.

Как рассказывали коллеги фон Неймана, он предложил оригинальный выход из положения: арендовать в одном из казино Монте-Карло несколько рулеток, которые можно было использовать в качестве датчиков случайных чисел! Несмотря на кажущуюся абсурдность и экстравагантность предложения, Министерство обороны США, учитывая непререкаемый авторитет Неймана, выделило на это необходимые средства.

Джон фон Нейман со своим сотрудником Станиславом Уламом[57] стали разыгрывать на рулетках процессы, необходимые при расчётах детонации бомбы. (Злые языки поговаривали, что между делом Нейман и Улам вдоволь наигрались в казино за государственный счёт. Но ведь сами знаете: дай злым языкам волю, и они опошлят все на свете...)

Однако эта работа, как рассказывают, мало помогла самому Нейману на поприще азартных игр. Работая в Лос-Аламосе, он как-то во время игры в покер разъяснял свою теорию и ... тут же проиграл 10 долларов, выдав две 5-долларовых банкноты своему коллеге! Тот, получив выигрыш, купил за 5 долларов книгу Джона Неймана и Оскара Моргенштерна[58] «Теория игр и экономического поведения», наклеил на нее оставшиеся 5 долларов и попросил у тора автограф с упоминанием этого проигрыша.

Именно место проведения первых серьезных статистических испытаний и дало методу название «метод Монте-Карло».

Нейман, конечно, понимал, что с таким «первобытным» методом генерации случайных чисел сама идея подобного вычислительного метода не найдет развития и может заглохнуть. Для генерации случайных чисел необходимо было новое вычислительное средство, которое и генерировало бы случайные числа, и проводило бы необходимые вычисления на их основе. Именно это и натолкнуло Неймана на идею создания электронного компьютера.

---

[57] **Станислав Мартин Улам** (1909–1984), польский математик, ученик крупнейшего польского математика Стефана Банаха (1892-1945). Переехал в Принстон в 1934 году и позднее участвовал в создании водородной бомбы в Лос-Аламосе.

[58] **Оскар Моргенштерн** (1902-1977), американский экономист немецкого происхождения, один из создателей теории игр, профессор Принстонского университета.

Так что, в некотором смысле, «брак» «Манхэттенского проекта» с казино в Монте-Карло дал рождение современному компьютеру!

Заметим, что генерация случайных чисел на самом деле не так уж проста. Большая часть программ основана на различных рекуррентных процедурах, что не дает возможности с уверенностью утверждать, что полученные числа действительно будут случайными: возможно, например, возникновение циклов, т.е. чередования последовательностей одних и тех же групп цифр (типа периодических дробей)..

Один из первых и наиболее простых датчиков был предложен самим Джоном фон Нейманом. Он основан на следующем вычислительном приеме. Выбирается произвольное $2n$-значное двоичное число, которое возводится во вторую степень, т.е. получается число, состоящее из $4n$ цифр. В новом числе выбирается «средний сегмент»: n-значное число, стоящее в середине, т.е. начиная с $(n+1)$-го знака до 3n-го знака. Затем процедура повторяется. После многократного повторения возникает некоторая последовательность псевдослучайных чисел (правда, с распределением, отличающимся от равномерного).

Пример построения такого набора псевдослучайных чисел (для небольших исходных чисел) приведен ниже.

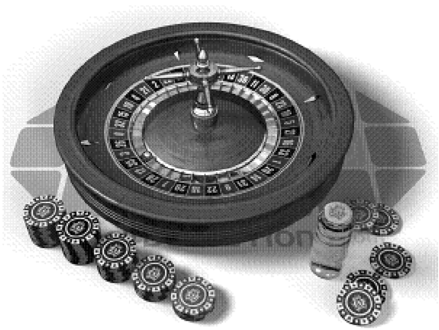
Исходное число	**Квадрат**		**Исходное число**	**Квадрат**
4763	22**6861**69		5956	35**4739**36
6861	47**0733**21		4739	22**4581**21
0733	00**5372**89		4581	20**9855**61
5372	28**8583**84		9855	97**1210**25
8583	73**6678**89		1210	01**4641**00
6678	44**5956**84		4763	22**6861**69
. . .	. . .		. . .	. . .

В настоящее время имеется довольно много хороших программ генерации случайных чисел. Например, программа RANDU имеет длину цикла 2^{29}, чего с головой хватит практически для любых научных и инженерных приложений не на одну человеческую жизнь.

3.4. Что же такое рулетка?

Не за то отец сына бил, что играл,
а за то, что отыгрывался.

Народная пословица.



Рулетка – это самая популярная игра в любом казино. Русское слово «рулетка» это перевод слова «roulette», что означает колесо.

Игра ведется с помощью шарика и игрового колеса с пронумерованными ячейкам. Дилер раскручивает колесо рулетки и бросает в него шарик. Суть игры – угадать ячейку с номером, на которой остановится шарик.

Так выглядит рулетка в казино.

Существует версия – впрочем, никто не утверждает категорически, – что рулетка была придумана и реализована в виде механического устройства неугомонным Блэзом Паскалем, одним из увлечений которого был поиск устройства «вечного движения». Называется даже год, когда он ее изобрел – 1665.

Но каких-либо подтверждений того, что сам Паскаль играл в рулетку, не найдено, хотя сам Паскаль не был чужд азартных игр (вспомните его дружбу с шевалье де Мере). Скорее всего, кому-то еще пришла в голову удачная мысль использовать данное приспособление с чисто коммерческих позиций.

Но, видимо, история рулетки уходит в глубокую древность. Так, еще в Древней Греции воины вращали щит на острие меча и загадывали его положение в момент остановки. Римский император Август делал подобные же упражнения с колесом от повозки. По свидетельствам древних историков, в одном из залов дворца на вертикальной оси крепилось колесо, вращая которое император определял жребий.

Упоминается подобная игра и в Древнем Китае, и в индейских племенах Америки – везде вращали колеса на оси и наблюдали их случайную остановку.

Впервые в азартных целях специальное колесо с пронумерованными гнездами и шариком было применено в предшественнике современной рулетки, игре под названием «хока». В конце XVIII века во Франции открылось первое казино с игрой в «хоку». Прибыль от казино была чрезвычайно высока, т.к. из 40 гнезд три были помечены значком "0" (зеро), а когда шарик падал в одно из них, то все ставки забирал дилер.

Эти ранние разновидности рулеточных колес были значительно грубее и примитивнее современных, они были плохо сбалансированы и центрированы, поэтому наблюдая их продолжительное время можно было найти вполне разумную систему ставок. Ну, я уж хозяева игорных домов, могли и вдоволь помошенничать, помещая «зеро» на соответствующие позиции.

Колесо фортуны остановила Великая Французская революция, разразившаяся в 1789 году. Уже в 1791 году Национальное собрание Франции запретило все азартные игры, установив жестокие наказания не только для содержателей игорных домов, но и для тех, кто не донесет на своих соседей, играющих азартные игры.

С приходом к власти Наполеона игорные дома были открыты вновь. Но игорный бизнес процветал более тридцати лет. В это время на горизонте появились два предприимчивых, а можно сказать, и жуликоватых братца – Франсуа и Луи Бланк. Оба они были игроками по натуре и не только содержали в Париже казино, но и с успехом проворачивали дела на Французской фондовой бирже. Более того, их изобретательность граничила с мошенничеством: они придумали подвижное дно в рулетке, прижимая которое крупье мог подставить под шарик нужную лунку.

Не зря, видимо, гуляла версия, что рулетку мсье Франсуа Бланку получил от самого Диавола в обмен на свою более, чем грешную душу! (Досужие умы заметили, что сумма номеров всех секторов (от 1 до 36) равна «666», которое, как о том вещает богодухновенная книга Библия, есть не что иное, как «число зверя».)

Но вот в 1839 году все игорные дома во Франции были вновь закрыты, а азартные игры были вновь объявлены вне закона. Запрет игорных домов во Франции мог привести братьев к разорению. Они вынуждены были переехать в Германию, где в Гамбурге открывают казино с рулеткой. Вскоре братья Бланки пускают в обиход новую рулетку: на 37 ячеек они устанавливают единственную ячейку «Зеро» («0»), вместо трех, которые достались в наследство от «хоки». Вероятность выигрыша хозяина казино упала с прежних $3/40 \approx 7.5\%$ до $1/37 \approx 2.7\%$, однако... прибыль казино резко подскочила вверх! Дело в том, что игроки повалили в казино, как говорится, валом: разнесся слух о частых выигрышах! Рулетка стала модной игрой и быстро завоевала игорные дома Парижа.

Казино братьев Бланков приобретает известность во всей Европе.

В 1861 году светлейший князь княжества Монако приглашает братьев Бланков в свои владения. Нет, сам он не был игроком: он понял, что игорный дом поможет скудному бюджету его карликового государства.

Монако представляет собой узенькую полосочку на юге Французской Ривьеры, длиной около двух с половиной километров и шириной менее километра (общая площадь – всего около 2 км^2). Зато это государство занимает первое место в мире по плотности населения – около 20 тысяч человек на один квадратный километр! (Если бы представить, что Россия имеет такую же плотность населения,то в ней должно было бы проживать более трех триллиардов человек, т.е. в 500раз больше, чем проживает сейчас на всей нашей старушке-Земле!)

Казино в Монте-Карло.

И вот в 1861 году Франсуа Бланк получает концессию на открытие игорного дома в княжестве Монако. Сами понимаете, что такие вещи даются не за красивые глаза: Блан заплатил микро-монарху два миллиона франков, взял на себя все расходы по содержанию правительства княжества, а также выделил в казну 15% дохода от рулетки. Другими словами, Франсуа Бланк купил все княжество с потрохами! Он сменил весь государственный аппарат, предоставив места в нем своим друганам.

И тут очередное везение: в 1873 году по всей Европе закрываются все игорные дома, кроме Монако, и Франсуа становится королем игорного бизнеса. Монако становится поистине столицей азартного мира.

К тому же в это время открывается пароходное сообщение Ницца – Монако и строится железная дорога Франция –Монако. В дополнение к этому семейство Бланков организовал акционерное Общество морских купаний (Societe des Bains de Mer), которое было одним из первых курортных организаций в мире...

А совершенно потрясающее казино в Монте-Карло в здании, представляющее собой этакий гибрид дворца и административного учреждения, породило увлечение рулеткой, которая быстро перекочевала почти во все другие казино мира...

Свое победное шествие по США рулетка начала в начале XIX века в Новом Орлеане, куда игру привезли эмигранты из Франции. И здесь рулетку запрещали, казино закрывали... Но дело Франсуа и Луи Бланков живет и побеждает!

А совершенно потрясающее казино в Монте-Карло в здании, представляющее собой этакий гибрид дворца и административного учреждения, породило увлечение рулеткой, которая быстро перекочевала почти во все другие казино мира...

Деловитые американцы добавили еще один сектор «00»– так называемое «двойное зеро». Правда, сначала в ранней американской рулетке данный сектор стыдливо изображался в виде американского орла.

* * *

Говоря о рулетке, нельзя обойти молчанием «русскую рулетку». Так называется экстремальная азартная игра, состоящая в следующем. По стандартным правилам игры в пустой барабан револьвера заряжается один патрон, после чего барабан несколько раз проворачивается так, чтобы игроки не знали, где располагается единственный патрон. После этого игроки по очереди подносят дуло револьвера к собственной голове и нажимают на спусковой крючок.

Словосочетание «русская рулетка» впервые появилось в 1937 году в статье малоизвестного журналиста Джордж Сурдеза «Русская рулетка», опубликованной в американском журнале «Кольер» («Collier»).

Этот термин вошел в обиход на многих языках, хотя к России он и не имеет никакого отношения!

Ну да что здесь удивительного? Ведь это русские придумали название «американские горки» – в Америке они называются «русские горки»! И то же – почему?

В классической русской литературе нет ни одного упоминания этой игры. Единственный трюк, отдалённо похожий на русскую рулетку, описан в «Герое нашего времени» Михаила Лермонтова.

* * *

И наконец, о грустном – о патологической склонности к азартным играм. Это признанная во всей медицинской практике форма психического заболевания, у которой даже есть свое название гэмблинг от английского «gamble», также лудомания от латинского «ludus», где оба иностранных слова переводятся как «азартная игра». Полная русификация термина привела к уродливому русскому варианту – «игромания».

Болезнь эта проявляется «в частых повторных эпизодах участия в азартных играх, что доминирует в жизни субъекта и ведет к снижению социальных, профессиональных, материальных и семейных ценностей, не уделяется должного внимания обязанностям в этой сфере»[59].

Недавно российские медики из Центра имени Сербского в Москве определили, какая зона человеческого мозга ответственна за принятие решений, связанных с риском решений. Учёные надеются даже найти медикаментозные средства борьбы с гэмблингом.

. Значит, недалек час, когда отец не будет бить сына за то, что тот отыгрывается, а будет давать ему таблетки, чтобы тому вообще было неповадно играть в азартные игры!

3.5. Частота и вероятность

Чаще всего происходят
маловероятные события.

Лука Умищев

Частота сходится к вероятности... Это мы видели и на примере бросания монеты, и на примере с иглой Бюффона. Да, вероятность – это предел, к которому в пределе стремится частота какого-либо «устойчивого» события.

Когда такой серьезный математик, как Карл Пирсон, подбрасывает монетку 12 тысяч раз, а потом еще (видимо, вдоволь не наигравшись) подбрасывает ее еще 24 тысячи раз, это заставляет задуматься... Ведь если на каждый бросок и на регистрацию результата положить всего 3 секунды, то Пирсон свой второй эксперимент должен был проводить 24 часа, не отвлекаясь на еду-питье и прочие естественные нужды...

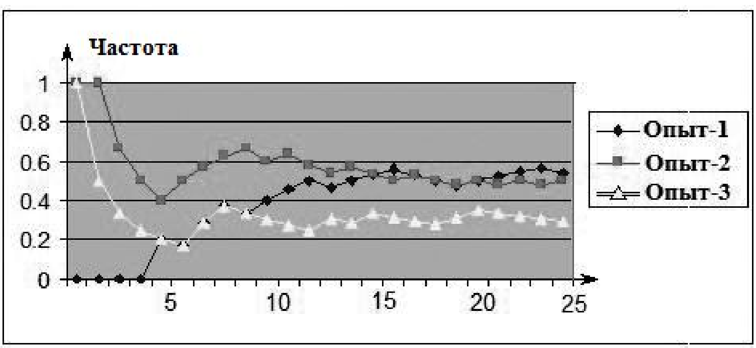
[59] Цитата из «Международной классификация болезней» (раздел «Психические расстройства и расстройства поведения»).

Заметим, что сам факт сходимости частоты к вероятности был доказан еще Якобом Бернулли[60] почти за двести лет до изнурительных экспериментов Пирсона!

Почему-то представляется, что тех, кто сам с собой играл в «орла-решку», более интересовал не сам факт сходимости частоты к вероятности, а скорость этой сходимости. Правда, ни один из них не построил эмпирической зависимости наблюденной частоты выпадения от числа наблюдений. Но это и понятно: брось монетку, потом запиши результат, потом обработай результаты – и все вручную!

Экспериментальное изучение поведения частоты по мере роста числа бросков монеты (или проведения любого иного статистического эксперимента) стало фактически возможно лишь с появлением электронных вычислительных машин.

Не утомляя вас особенно цифрами, покажем пример поведения трех серий бросаний монетки, полученных на очень простой математической модели, реализованной на программе Microsoft Excel. На графиках представлено изменение частоты выпадения орла с ростом числа бросков. Естественно, что каждая траектория начинается либо с нуля (первой выпала решка), либо с единицы (первым выпал орел).

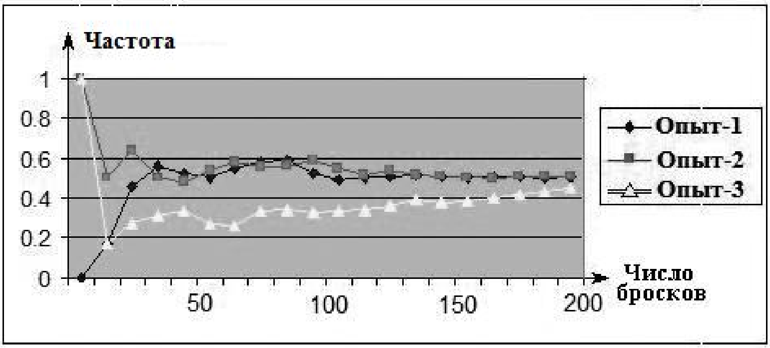


Примеры траекторий поведения частоты при 25 бросках в серии.

---

[60] **Якоб Бернулли** (1654-1705), швейцарский математик, профессор математики Базельского университета. ***Подробнее см. в главе «Пантеон».***

Конечно, на 25 бросках монеты ждать хорошего совпадения экспериментальной частоты с ½ не приходится. Но уже при 100 бросках монеты частота выпадения орла оказывается достаточно стабильно «болтающейся» около значения ½.



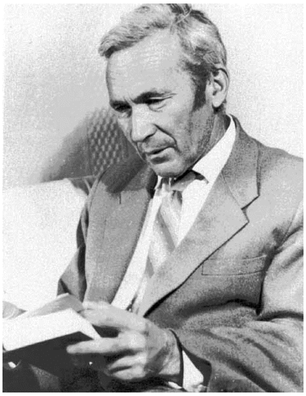
Те же серии бросков, продолженные до 200 наблюдений.

Стало почти очевидным, что одной частотной интерпретации случайности недостаточно. Естественным образом возникла проблема превращения теории вероятностей в строгую математическую ветвь, в которой должны быть своя аксиоматика, свои теоремы и свои специфические методы.

Проблема аксиоматизации теории вероятностей была включена Давидом Гильбертом в формулировку его шестой проблемы «Математическое изложение основ физики», когда он делал свой исторический доклад о проблемах, которые ждут своего решения в наступавшем тогда XX веке:

> *«С исследованиями по основаниям геометрии близко связана задача об аксиоматическом построении по этому же образцу тех физических дисциплин, в которых уже теперь математика играет выдающуюся роль: это, в первую очередь, теория вероятностей и механика. Что касается аксиом теории вероятностей, то мне казалось бы желательным, чтобы параллельно с логическим обоснованием этой теории шло рука об руку строгое и удовлетворительное развитие метода средних значений в математической физике, в частности, в кинетической теории газов».*

Эту проблему Гильберта в части аксиоматизации теории вероятностей решил выдающийся русский математик Андрей Николаевич Колмогоров.



Андрей Николаевич Колмогоров

(1902 - 1987)

Великий русский математик, основоположник современной теории вероятностей, также работал в области топологии, логики, теории турбулентности, теории сложности алгоритмов.

Основатель и первый заведующий Кафедрой теории вероятностей Московского Государственного университета, Академик Академии Наук СССР.

Подробнее см. в главе «Пантеон».

Базируясь на идеях теории множеств и теории меры, в 1929 году Колмогоров предложил строгую математическую теорию вероятностей, которая окончательно была им завершена через четыре года.

До Колмогорова попытки аксиоматизировать теорию вероятностей предпринимали многие. Среди них следует выделить попытку Бернштейна[61] , который в 1917 году разработал первую аксиоматику теории вероятностей, а также частотную концепцию Мизеса, представленную им в 1919 и 1928годах.

Колмогоров, чья конкурирующая аксиоматика теории вероятностей была признана наилучшей, отмечал:

> *«Основа для применимости результатов математической теории вероятности к реальным случайным явлениям должна зависеть от некоторой формы частотной концепции понятия вероятности, неизбежная природа которой была весьма вдохновенно установлена фон Мизесом».*

---

[61] **Сергей Натанович Бернштейн** (1880-1968), русский математик, академик АН СССР. Почетный член нескольких европейских Академий наук и университетов. Его диссертация 1904 года была посвящена решению 19-ой проблемы Гильберта. В теории вероятностей Бернштейном в 1917 году была предложена первая аксиоматика

Рихард Эддлер фон Мизес (1883-1953)

Австрийский математик и механик, работавший во многих областях: механике жидкостей, аэродинамике, аэронавтике, статистике и теории вероятностей. В теории вероятностей предложил и отстаивал частотную концепцию понятия вероятности. Был удивительно универсальным специалистом, особенно сведущим в области технологии. Одновременно – признанный эксперт в поэзии Райнера Марии Рильке.

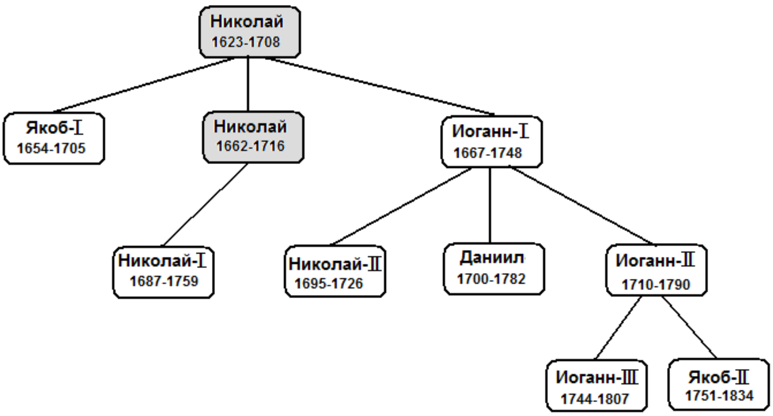
В 1933 году, с приходом к власти нацистов, Мизес эмигрирует в Турцию, где возглавляет созданную им кафедру математики в Стамбульском университете. В 1939 году эмигрирует в США, где в 1944 году становится профессором аэродинамики и математики в Гарвардском университете.

Сам же Мизес, будучи не только первокласснейшим статистиком, но и весьма остроумным человеком, позволил себе однажды произнести такой каламбур: «Существует вынужденная ложь, которая простительна, намеренная ложь, для которой нет оправдания, и статистика».

ПАНТЕОН

Древо Бернулли

Возможно, в истории человечества не было ни одной такой семьи, где математика была бы «семейным бизнесом». Возможно, такой семьи никогда уже больше и не появится на свете: теперь же в моде либо мелкий бизнес, либо крупномасштабная фарца, либо грязные политические игры... Не до математики!



Генеалогическое дерево математической части семейства Бернулли.[62]

Купеческая протестантская семья Бернулли жила в Антверпене, крупнейшем городе Фландрии – провинции Бельгии. В связи с религиозными погромами многие протестанты были вынуждены покидать страну из-за угрозы физического уничтожения, большинство беженцев направлялось в Германию, где была свобода вероисповедания. В 1582 году семья Бернулли оказалась во Франкфурте-на-Майне. Глава семьи, Якоб Бернулли, скончался во Франкфурте в следующем же году.

[62] Серым цветом помечены не-математики, причастные к математическим отпрыскам.

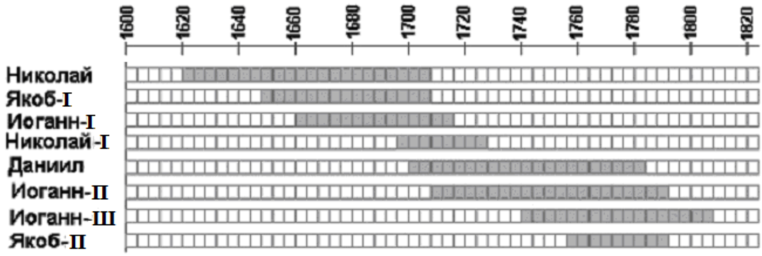
Но и в Германии бушевала вражда между католиками и протестантами. Нужно было искать более спокойного места, и вот в 1622 году Якоб Бернулли, внук первого Якоба, переехал в Базель и принял гражданство Базельской республики. Здесь семья Бернулли обосновывается надолго.

Среди Бернулли по семейной традиции некоторые имена повторяются из поколения в поколение. В связи с этим тех из них, чьим призвание была математика, принято различать, присоединяя к имени соответствующую цифру (буквально так же, как это делается в царствующих домах).

Вот родословная Бернулли, начиная с базельского периода:

- **Николай** (1623-1708), сын Якоба, родился в Базеле. Крупный базельский аптекарь, член городского совета Базеля и член суда. Имел 11 детей.
- **Якоб I** (1654-1705), сын Николая, родился в Базеле. С 1687 года профессор математики Базельского университета. Его учениками были: его младший брат Иоганн I, его племянник Николай I, ставший впоследствии членом Петербургской Академии наук, а также Пауль Эйлер, отец великого Леонарда Эйлера.
- **Николай** (1662-1716), сын Николая. Был членом городского суда и был известен как неплохой живописец. (Без номера, поскольку не принадлежит к математикам.)
- **Иоганн I** (1667-1748), сын Николая. По образованию врач, но с 1695 года стал профессором математики Гронингенского университета в Голландии. С 1705 года профессор математики Базельского университета. Почетный член Петербургской Академии наук.
- **Николай I** (1687-1759), сын «Николая Николаевича», т.е. сын Николая, сына Николая. Будучи по образованию юристом, стал профессор математики в Университете Падуи, а затем профессором логики и права в Базеле.
- **Николай II** (1695-1726), сын Иоганна I. По образованию юрист, ставший сначала профессором права в Берне, а затем профессор математики в Петербургской Академии наук.
- **Даниил** (1700-1782), сын Иоганна I. По образованию врач. С 1725 по 1733 годы работал на кафедрах физиологии и механики в Петербургской Академии наук, членом которой был избран. Вернувшись в Базель, стал профессором по кафедре механики в Базеле. Почетный член Петербургской Академии наук.
- **Иоганн II** (1710-1790), сын Иоганна I. По образованию юрист, работал профессором математики в Базеле.
- **Иоганн III** (1744-1807), сын Иоганна II. По образованию юрист, был астрономом Берлинской Академии наук, где одновременно читал математику.
- **Якоб II** (1759-1789), сын Иоганна II. По образованию юрист. Математик Петербургской академии наук. Утонул в Неве.

В дополнение к генеалогическому дереву «математической семьи» Бернулли, представим развитие этого рода во времени



Математики семьи Бернулли

Представители рода Бернулли живут в Базеле и по сию пору...

* * *

Наиболее значимый след в математике оставили три Бернулли, о которых вкратце и пойдет речь ниже.

Якоб Бернулли
(1654-1705)

Внес существенный вклад в разработку основ дифференциального и интегрального исчислений, аналитической геометрии, теории вероятностей и вариационного исчисления. Решил проблему Лейбница об изохронной кривой, исследовал логарифмическую спираль, ввел полярные координаты. Сформулировал и доказал закон больших чисел.

Якоб Бернулли окончил Базельский университет, где изучал философию, богословие и языки (немецкий, французский, английский, итальянский, латинский и греческий), поскольку отец хотел видеть его протестантским священником. В 1671 году получил степень магистра философии.

Побывав во Франции, Бельгии и Англии, он в 1682 основал семинарию экспериментальной физики в Базеле, т.е. занялся наукой, «не отходя от церковной кассы». С увлечением самостоятельно занимаясь математикой, достиг определенной известности. Поэтому когда в 1686 году в Базельском университете освободилась должность профессора математики, Сенат университета единодушно утвердил Якоба Бернулли на этой позиции. Это знаменовало собой вековое «царствование» представителей семейства Бернулли на кафедре математики этого университета. Заметим, что члены семьи Бернулли имели различные профессорские должности (не обязательно математические) на протяжении почти четверти тысячелетия, вплоть до второй половины XX века.

Якоб внес существенный вклад в разработку основ дифференциального и интегрального исчислений, аналитической геометрии, теории вероятностей и вариационного исчисления. Он ввел полярные координаты, которые потом эффективно использовались в теории комплексного переменного. В 1685 сформулировал, а позднее и доказал закон больших чисел (названный так позднее Пуассоном).

Умер Якоб Бернулли в Базеле в 1705 году.

Его главный труд «*Искусство предположений*» («*Ars conjectandi*»), посвященный теории вероятностей, был опубликован лишь спустя восемь лет после его смерти.

Иоганн Бернулли

(1667-1748)

В 1697 Иоганн опубликовал работу по экспоненциальному исчислению, в которой впервые сформулировал задачу о брахистохроне. Ему принадлежит также ряд открытий в области интегрального и дифференциального исчислений.

Одним из учеников Иоганна был великий математик Леонард Эйлер.

Иоганн родился в 1667 году. Математику он начал изучать под руководством старшего брата Якоба.

Когда в 1682 году Иоганн окончил школу, его отец отправил его для торговой практики и совершенствования во французском языке во франкоговорящую часть Швейцарии. Однако через год Иоганн возвратился домой и поступил в университет. Вскоре он защитил написанную латинскими стихами диссертацию на степень бакалавра, а в 1685 году – диссертацию на степень магистра искусств, написав на этот раз ее опять в стихах, но уже на греческом языке.

В том же году по совету и под руководством старшего брата он начинает заниматься математикой. За два года он догоняет брата, и они уже вместе занимаются самостоятельной разработкой дифференциального исчисления.

Параллельно неугомонный Иоганн изучает еще и медицинские науки, так что уже в 1690 году защищает диссертацию и по медицине. Через несколько дней после защиты Иоганн женился и вместе с семьей в 1695 году уехал в Гронинген, где становится профессором университета, читая курсы по математике и экспериментальной физике.

После смерти Якоба, Иоганн «наследует» кафедру математики Базельского университета. Одним из учеников Иоганна был великий математик Леонард Эйлер.

В 1697 Иоганн опубликовал работу по экспоненциальному исчислению, в которой впервые сформулировал задачу о брахистохроне[63].

Брахистохрона.

Ему принадлежит также ряд открытий в области интегрального и дифференциального исчислений.

Умер Иоганн Бернул-

[63] **Брахистохрона** (от греческих слов «брахистос» , что означает «кратчайший» и «хронос», что означает «время») – так называемая кривая скорейшего спуска: кривая на плоскости, соединяющая две точки, лежащие в одной вертикальной плоскости, двигаясь по которой под действием только силы тяжести материальная точка проходит путь за кратчайшее время.

ли в Базеле в 1748 году.

Даниил Бернулли

(1700-1782)

Впервые ввел понятия работы и коэффициента полезного действия. Представил уравнение стационарного движения идеальной жидкости и изложил идеи кинетической теории газов. Внес значительный вклад внес в математику: в численные решения алгебраических уравнений, в теорию рядов. Велик его вклад и в теорию вероятностей, где он применял методы математического анализа для решения вероятностных задач.

Даниил Бернулли родился в Гронингене, где его отец, Иоганн, преподавал математику в университете. В 1705 году семья Иоганна Бернулли переехала в швейцарский город Базель, где Иоганн получил место профессора математики, которое занимал перед этим его недавно скончавшийся старший брат Якоб.

Даниил учился в Базельской гимназии, после окончания которой отец отправил его во франкоязычную часть Швейцарии совершенствовать знание французского языка и практиковаться в торговле.

Однако уже через год он возвращается домой и поступает в Базельский университет, где в 1716 году получает звание магистра философии.

Отец наставляет его на занятия медициной как наиболее практичной из профессий. Даниил учился в Гейдельберге, в Страсбурге и после защиты диссертации в 1720 году получает диплом медика.

Однако его влечет только к математике. Уже в 1724 году выходит в свет первый научный трактат Даниила Бернулли «*Матема-*

тические упражнения». В этом же году он становится членом Академии наук Болоньи, а затем получает предложение возглавить Академию Генуи. Буквально одновременно ему пришло приглашение из России поступить на службу в только что созданную Петром I Петербургскую Академию наук.

Несмотря на заманчивость последнего предложения, Даниил медлил с ответом, ссылаясь на то, что он не может расстаться с любимым братом. Решение Президента Петербургской академии было удивительно простым: он пригласил обоих братьев...

Отправляя своих сыновей в дальнюю дорогу, Иоганн Бернулли напутствовал их: «Лучше несколько потерпеть от сурового климата страны льдов, в которой приветствуют музы, чем умереть от голода в стране с умеренным климатом, в которой муз обижают и презирают».

В октябре 1725 года братья прибыли в Петербург. Даниил получил кафедру физиологии, а Николай – кафедру математики. Братья активно включились в научную жизнь академии. Но «суровый климат страны льдов» оказался слишком суровым: через восемь месяцев после переезда в Петербург, Николай, простудившись, умер...

Тяжело переживая потерю любимого брата, Даниил боролся с горем, заваливая себя работой. Он был избран российским академиком. Он проработал в Петербурге еще семь лет, до конца лета 1733 года.

Вернувшись в Базель, Даниил получил в университете кафедру анатомии и ботаники, но больше занимался экспериментальной физикой. В 1750 году он возглавил кафедру физики, которую и занимал до последних дней своей жизни. Наука была единственной страстью Даниила Бернулли.

Это был человек удивительной доброты и доброжелательности, поэтому его очень огорчали трения с отцом по поводу научного приоритета: отец и сын независимо занимались одними и теми же проблемами и одинаково успешно.

Дело доходило до курьезов. Так в 1732 году Парижская Академия наук объявила конкурс на тему «О взаимном наклонении планет». Работы подавались анонимно, снабженные только авторам известными девизами. Две работы из поступивших на конкурс были признаны лучшими, и премию было решено разделить между их авторами. Когда вскрыли конверты с соответствующими девизами, то оказалось, что авторы-победители – это отец и сын Бернулли!

По этому поводу Лейбниц писал Иоганну Бернулли: «Я радуюсь, что и твой сын носит печать Бернулли и хранит наследственный блеск фамилии».

О доброте Даниила Бернулли ходили буквально легенды: он жертвовал Базельскому университету крупные суммы денег, построил дешевую гостиницу для путешествующих студентов, помогал нуждающимся...

Научный авторитет Даниила Бернулли был чрезвычайно высок: он был избран членом многих иностранных академий наук (в том числе Берлинской и Парижской, а также Лондонского королевского общества).

Он продолжал работать до последних дней своей жизни.

Христиан Гюйгенс

(1629 -1695)

Крупнейший голландский ученый-энциклопедист, сделавший огромный вклад в самых различных областях математики, физики и инженерного дела. Первый Президент Парижской Академии наук.

Христиан Гюйгенс родился в Гааге в семье дочери амстердамского купца, который занимал высокий пост секретаря принца Фридриха Генриха Оранского, а затем и принца Вильгельма Второго Оранского. Помимо этого, он был еще литератором, автором театральных пьес и ученым-любителем. Он был близко знаком со многими известными в то время учеными, среди его близких друзей был Рене Декарт.

Христиан получил хорошее домашнее воспитание: домашние учителя обучали его арифметике, музыке, латыни, греческому, французскому и итальянскому языку. К девяти годам он уже говорил на латыни, а к двенадцати годам играл на скрипке, лютне и клавесине. Христиан сам построил себе токарный станок, на котором творил настоящие чудеса... Иными словами, это был чрезвычайно развитый и одаренный ребенок. Однако нужно отметить,что особую склонность он проявил к математике.

Родители решили готовить его к дипломатической карьере, отдав шестнадцатилетнего Христиана на юридический факультет Лейденского университета. Но его влечение к математике не ослабевало. Особенно сильное впечатление на Гюйгенса производили работы Декарта, которого он знал еще с детства. Во время учебы в университете у него началась недолгая переписка с парижским математиком Мерсенном, которая оборвалась со смертью последнего. Переписка эта оказала на молодого Гюйгенса большое влияние. Мерсенн был поражен способностями Христиана и в письме отцу Гюйгенса даже сравнивал его с Архимедом. Возможно, что именно поэтому в семье Христиана стали называть «наш Архимед».

Через два года Христиан перешел из Лейденского университета в Оранский колледж, где он, как надеялся его отец, должен был продолжить свое юридическое образование. Однако и здесь Христиан в основном занимался математикой. Закончить колледж он не успел, поскольку отец вернул домой его и его брата, учившемуся вместе с ним, поскольку брата Христиана дрался на дуэли с одним из студентов, а посему ему грозили серьезные неприятности.

Тем не менее, несмотря на неполное образование, двадцатидвухлетний Гюйгенс в 1651 году публикует свою первую работу под названием «*Теоремы о квадратуре гиперболы, эллипса и круга*». Еще через три года выходит его работа «*Открытие о величине круга*», где он, используя алгебраический подход, уточнил значение числа «пи». Эти работы ввели его в круг математиков того времени, и Гюйгенс решил полностью посвятить себя математике, не занимая никакой официальной должности. Единственный раз он с дипломатической миссией ездил в Данию, да и то лишь потому, что надеялся там встретиться с Декартом. Однако этой встрече не суждено было сбыться: Декарт умер перед самым визитом Гюйгенса.

В пятидесятых годах семнадцатого столетия Гюйгенс проявлял интерес к физике. Он изложил результаты исследования поведения сталкивающихся тел в работе «*О движении тел под действием удара*», которую доложил в 1655 году на заседании Лондонского Королевского общества. (Работа эта была опубликована лишь посмертно.)

Другой сферой интересов Гюйгенса была оптика. Он при этом стремился к практической цели: усовершенствовать существовавший тогда телескоп, не ограничиваясь теоретическими изысканиями. Не будучи удовлетворен качеством имевшихся в его распоряжении линз, он начал сам шлифовать линзы, в чем сильно преуспел – его линзы превосходили по качеству все, что тогда существовало в этой сфере. Он же спроектированный окуляр, состоящий из двух линз (окуляр Гюйгенса).

Используя сконструированный им самим телескоп, в 1655 году Гюйгенс обнаружил спутник Сатурна, который позднее был назван Титаном, и определил период его вращения вокруг планеты. Несколько позднее на основании своих наблюдений он дал объяснение загадочной природы кольца Сатурна.

В 1655 году Гюйгенс впервые побывал в Париже, где познакомился со многими выдающимися людьми того времени, участвовал в обсуждении различных проблем математики и естествознания. Здесь же он заинтересовался исчислением вероятностей.

Блез Паскаль, ознакомившийся с работой Гюйгенса, уговорил его написать книгу по теории вероятностей. В 1657 году выходит в свет трактат на латинском языке «*О расчетах при азартных играх*» («*De ratiociniis in ludo aleae*») – первая в мире книга, посвященная теории вероятностей.

Вернувшись в Голландию, Гюйгенс погрузился в разработку математической теории вероятностей и одновременно занялся разработкой конструкции точных часов, которые были насущной необходимостью в навигации. Кстати, за удачное решение этой проблемы была установлена большая премия королем Испании, страны с наиболее развитым в Европе морским флотом.

Уже в 1657 году по чертежу Гюйгенса были сконструированы маятниковые часы. Сама идея использования маятника для измерения времени не была новой: об этом писал еще Галилей. Однако именно Гюйгенс был первым, кто сконструировал работающие часы с маятником. В 1658 году вышла его книга «*Часы*» («*Horologium*»).

Работая и дальше над проблемой конструкции часов, Гюйгенс в 1665 году опубликовал «*Краткое руководство для использования часов в целях определения долготы*», а еще через десять лет он приспособил маятниковые часы для использования их на море. В этих часах вместо маятника использовался балансир, а вместо гирь – спиральная пружина.

Узнаете? Эта та самая конструкция, которая используется и поныне и пока успешно конкурирует с электронными часами. (Но ведь и лошадь не сразу, да и не везде, уступила свое место автомашине!) Во всяком случае, Гюйгенс обеспечил человечество возможностью точного определения времени почти на полтысячелетия!

Когда в 1660 году Гюйгенс вновь отправился в Париж, он был известен настолько, что аудиенцию ему дал сам король Франции – Людовик XIV[64]. Более того, Гюйгенс оказался в числе тех немногих иностранных ученых, которым французский король благоволил дать стипендию на значительную по тем временам кругленькую сумму в 1200 ливров.

В работе, представленной на конкурс в только что основанное Лондонское Королевское общество Англии в 1669 году, Гюйгенс исследовал соударение упругих тел и вывел его законы. После победы в конкурсе, тридцатичетырехлетний Гюйгенс был приглашен в Лондон, где его торжественно приняли в Королевское общество.

Между тем, «Король-Солнце» решил возвеличить Францию, сделав ее центром культуры и науки. Он основал Академию наук по примеру Лондонского Королевского общества. Гюйгенсу было предложено исключительное место в этой академии, его ежегодное жалование составляло 6000 ливров – больше, чем у какого-либо другого члена академии. Кроме того, ему выделили шикарные апартаменты в здании Королевской библиотеки, которая была местом сбора членов Академии.

Став первым Президентом Парижской Академии, Гюйгенс долгое время жил в Париже, лишь дважды выезжая в Голландию для поправки своего здоровье после тяжелой болезни.

В 1673 году в Париже вышел фундаментальный труд Гюйгенса «*Качающиеся часы, или о движении маятника*» («*Horologium oscillatorium, sive de motu pendulorum ad horologia aptato demostrationes geometrica*»), в котором рассматривалось движение тяжелых тел, а также давалось устройство часов иного типа – с круговым маятником.

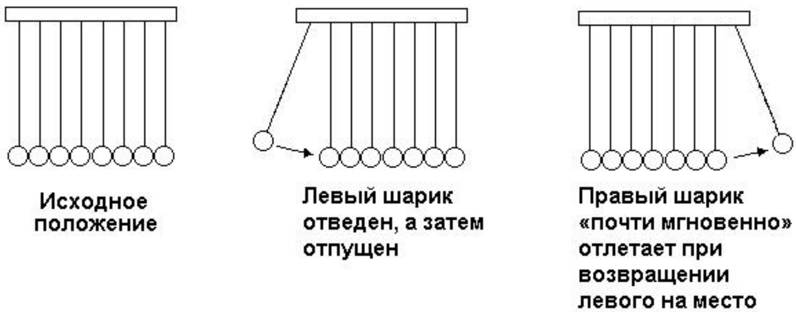
В 1678 году Гюйгенс представил в Парижскую академию наук «*Трактат о свете*» («*Traité de la lumiére*»), в котором излагалась совершенно новая теория света – волновая. Ему удалось в рамках этой теории объяснить многие загадочные в то время оптические явле-

---

[64] **Людовик XIV де Бурбон**, или **Людовик XIV Великий**, также известный как «Король-Солнце» (1638 - 1715), король Франции. Царствовал дольше, чем какой-либо другой монарх (72 года). Ему приписывается высказывание «Государство – это я!»

ния: механизм распространения света, принципы отражения и преломления света, атмосферную рефракцию и др.

Он предположил существование во вселенной промежуточной материи – «эфира», состоящего из плотно размещенных очень маленьких твердых частиц. Гюйгенс использовал для объяснения отражения и преломления разработанную им ранее теорию соударения твердых тел. По его мнению, распространение света напоминало цепное соударение этих частиц. Всем, наверное, известен любопытный приборчик вот такого вида, который в определенном смысле отражает Гюйгенсову теорию соударения твердых тел:



Опыт с соударением подвешенных металлических шариков.

Для распространения света Гюйгенс предложил аналогичную, по сути, модель, но только трехмерную, в которой от источника соударений распространяется сферическая волна.

В 1676 году Оле Рёмер[65] на основании своих наблюдений над спутниками Юпитера пришел к заключению, что скорость света конечна. Гюйгенс не только поддержал эту смелую идею, но на основании наблюдений Рёмера даже оценил, что скорость света немного превышает 200 тысяч километров в секунду (истинная скорость света в вакууме является физическим эталоном и равна 299 792 км/сек).

---

[65] **Оле Кристенсен Рёмер** (1644 - 1710), датский астроном, долгое время работавший в Париже, где принимал участие в создании фонтанов Версаля.

Заканчивая рассказ о работах Гюйгенса в сфере оптики, заметим, что он является и изобретателем диаскопического проектора, так называемого «волшебного фонаря».

В 1681 году Гюйгенс заболел так серьезно, что ему пришлось уехать в Голландию. Через два года он поправился, но за это время «заболела» Франция: религиозная нетерпимость католиков к протестантам «дошла до точки кипения». Протестант Гюйгенс предпочел не покидать Голландию.

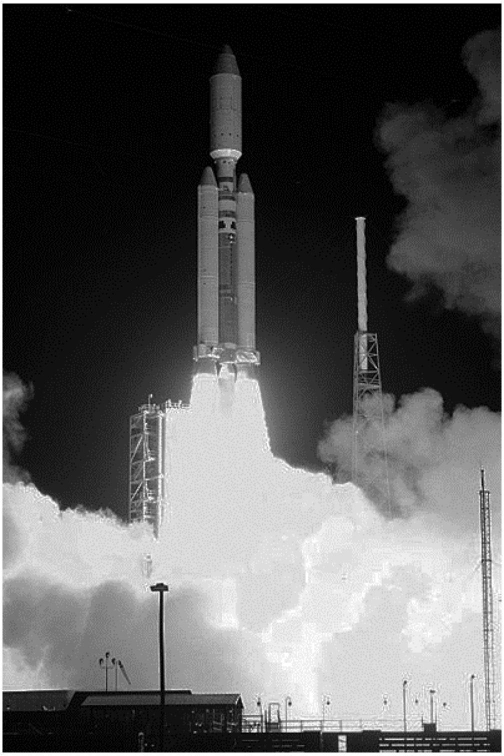
В 1689 году он предпринял долгое путешествие в Англию, где несколько раз встречался с Исааком Ньютоном, с которым у него по некоторым вопросам мнения фундаментально расходились. Так, Ньютон придерживался корпускулярной теории света, согласно которой свет состоит из потока частиц, что противоречило волновой теории Гюйгенса. Авторитет Ньютона был настолько высок, что теория света Гюйгенса была отвергнута в пользу теории Ньютона. Лишь в XIX веке на основании экспериментов ученые пришли к опять к волновой теории света, а в настоящее время считается, что свет характеризуется обоими свойствами. Не зря говорят, что в спорах рождается истина!

В последние годы жизни Гюйгенс изложил свои предположения о существовании жизни на других планетах в книге «*Космотеорос*», изданной в 1698 году уже после его смерти автора. В этой книге он считает невероятным, чтобы Земля была единственной планетой, на которой существовала бы жизнь, и даже приходит к выводу, что формы жизни на других планетах не должны сильно отличаться от земных.

Ну что же, если не принимать всерьез «Божественное создание мира», то можно, приняв теорию биополя, поддерживаемую многими учеными, полагать, что если в неорганическом мире существуют вполне определенные формы существования материи, то и в органическом мире должны быть свои формы возникновения и свои законы развития жизни!

* * * * *

НАСА[66], Европейское космическое агентство и Итальянское космическое агентство совместно создали космический аппарат, целью которого являлось изучение планеты Сатурн, а также колец и спутников этой планеты. Назван этот космический аппарат в честь двух европейских ученых – Джованни Кассинни[67] и Христиана Гюйгенса. «Кассини-Гюйгенс» был запущен 15 октября 1997 года с космодрома имени Кеннеди на мысе Канаверал (Флорида, США) и достиг системы Сатурна 1 июля 2004, став первым искусственным спутником Сатурна.



Запуск «Кассинни-Гюйгенса».

[66] НАСА (National Aeronautics and Space Administration) – национальное управление США по аэронавтике и исследованию космического пространства.

[67] **Джованни Доменико Кассинни**, или по французской версии **Жан-Доминик Кассинни** (1625 - 1712), итальянский астроном и инженер, который по приглашению Людовика XIV приехал в Париж, где с 1671 года возглавил Парижскую обсерваторию.

Иоганн Карл Фридрих Гаусс

(1777-1855)

Мои результаты мне давно известны,
я только не знаю, как я к ним приду.

Карл Гаусс

Творчество Гаусса органично сочетало исследования по теоретической и прикладной математике. Широта его исследований удивительна: здесь и высшая алгебра, и теория чисел, и дифференциальная геометрия, и теория притяжения, и классическая теория электричества и магнетизма, и геодезия, и теоретическая астрономия.

Карл Гаусс родился в семье водопроводного мастера. Он рано научился считать и выполнять элементарные вычисления, а однажды, едва трех лет от роду, даже заметил ошибку, которую его отец сделал в своих рабочих вычислениях. Отец перепроверил свои расчеты и убедился, что число, указанное сыном, было действительно неверным!

Семи лет Карл пошел в школу. В 10-летнем возрасте он решил задачу о суммировании чисел от 1 до 100, открыв для себя формулу суммы арифметической прогрессии. Мальчик заметил, что попарные суммы с противоположных концов ряда чисел от 1 до 100 одинаковы: 1+100=101, 2+99=101 и т. д., и мгновенно получил результат 50×101=5050. Естественно, учитель обратил внимание на талантливого ученика и даже начал заниматься с ним индивидуально, а затем запросил для него из Гамбурга специальный арифметический тест.

Через четыре года Карл покинул родительский дом и поступил в школу следующей ступени. В новой школе, кроме упорных занятий математикой, он в совершенстве овладел латынью, которая хорошо помогла ему впоследствии, поскольку основные математические манускрипты были изложены именно на латыни.

Говорили, что Карл Гаусс еще со школьной скамьи выделялся остротой ума. Однажды учитель сказал ему: "Карл, я хотел бы задать тебе всего один вопрос. Сколько иголок на школьной елке, украшенной к Новому году?"

– 65786 иголок, господин учитель, – немедленно ответил Гаусс.

– Хорошо, но как ты это узнал? – спросил изумленный учитель.

– А это уже второй вопрос, – быстро отреагировал ученик.

Будучи четырнадцати лет, юный Гаусс был представлен Карлу Вильгельму Фердинанду – герцогу Брауншвейгскому[68] в качестве одного из одарённейших молодых граждан. С этого момента мальчика начали приглашать ко двору, где он развлекает придворных искусством счета.. Видимо, юноша произвел впечатление на герцога: тот пожаловал Карлу стипендию в 10 талеров в год, что по тем временам было немалой суммой.

Следующие три года Гаусс провел в привилегированной школе – так называемой Коллегиум Каролинум, куда его приняли благодаря удивительным успехам в учебе. За время учебы Гаусс факультативно изучил работы Ньютона, Эйлера и Лагранжа.

[68] **Брауншвейг** – графство в Нижней Саксонии в Германии, которое до 1918 года сохраняло статус независимого государства. Город Брауншвейг до сих пор является одним из университетских центров Германии.

В 1795 году, когда ему исполнилось 18 лет, благодаря покровительству герцога, Гаусс смог поступить в Геттингенский университет.

Первое время он слушал в основном лекции по филологии, практически не посещая лекций по математике. Тем не менее, он продолжал заниматься математикой самостоятельно. Уже в это время он разработал метод обработки неравноценных данных наблюдений, на базе которого в последующее десятилетие им был развит метод наименьших квадратов.

В это же время у Гаусса появился интерес к целым числам. Гаусс уже занимался теорией «первообразных» корней (это не столь уж простая вещь из теории чисел, поэтому мы не будем даже пытаться дать объяснение). И вот однажды утром, проснувшись, он внезапно ясно и отчетливо осознал, что из его теории вытекает метод построения правильного 17-угольника. Эта работа Гаусса надолго становится недосягаемым образцом математического озарения.

Девятнадцатилетнему Гауссу удалось решить задачу, над которой безуспешно бились геометры еще со времен Евклида: как построить правильный 17-угольник с помощью циркуля и линейки? Более того, Гаусс нашел все те значения *n*, для которых такое построение в принципе возможно. (Заметим, что Гаусс нашел алгебраическое доказательство неразрешимости многих геометрических задач на построение при помощи только циркуля и линейки, которые мучили еще Пифагора.) Сам Гаусс придавал этому своему «маленькому» открытию очень большое значение: он даже завещал на своем надгробном памятнике выгравировать фигуру в виде правильного 17-угольника, вписанного в круг.

С этого самого момента, когда ему удалось сделать свое замечательно математическое открытие, Гаусс начал вести дневник, в который он заносил те свои научные достижения, которые считал важными.

Осенью 1798 года он покинул университет по непонятным причинам и вернулся в родной город Брауншвейг. Герцог согласился продолжать выплачивать ему стипендию, увеличив ее до 158 талеров в год.

Возвратившись в Брауншвейг, Гаусс опубликовал целый ряд работ, которые моментально принесли молодому математику известность в Европе.

В том же году Гаусс подготовил диссертацию, в которой он доказал так называемую «основную теорему алгебры», которая утверждает, что всякое алгебраическое уравнение имеет корень. В общем случае этот корень является комплексным, а в частных случаях может быть числом действительным или мнимым.

В 1801 году вышли знаменитые «*Арифметические исследования*» Гаусса, где на 500 страницах он изложил свои основные математические результаты. Книга была посвящена герцогу Брауншвейгскому, который милостиво субсидировал ее издание. Правда, издано было только семь частей, а на восьмую часть герцог, видимо, пожалел денег... Это сочинение до сих пор считается математическим шедевром, благодаря необычайному богатству материала, ряду прекрасных математических открытий автора, разнообразию и остроумности приведенных в ней доказательств. Эта работа во многом предопределила дальнейшее развитие таких важных разделов математики, как теория чисел и высшая алгебра. В конце книги Гаусс изложил теорию уравнений типа $x^n - 1 = 0$, которая во многом предвосхитила идеи теории Галуа.

А ведь к тому времени автору было всего лишь 24 года!..

Вскоре произошло событие, которое во многом повлияло на судьбу Карла Гаусса. В январе 1801 астроном Джузеппе Пьяцци[69], составлявший звездный каталог, обнаружил неизвестное небесное тело, имеющее яркость звезды 8-й величины. Поскольку ему удалось проследить ее путь только на протяжении всего 1/40 части орбиты, то возникла задача определения всей траектории этого небесного тела по малому объему имеющихся данных. По предположениям астрономов речь могла идти о давно предполагаемой малой планете, располагавшейся между Марсом и Юпитером.

Гаусс занялся вычислением орбиты открытого небесного тела в сентябре 1801 года, а уже в ноябре закончил вычисления, опубликовав результаты в декабре... Известный немецкий астроном

[69] **Джузеппе Пьяцци** (1746-1826), итальянский астроном, первооткрыватель первого астероида.

Ольберс[70], пользуясь данными Гаусса, в новогоднюю ночь с 1801 на 1802 год обнаружил предсказанную Гауссом планету, которую назвал Церерой[71], дав ей имя Древнеримской богини земледелия.

Так, несмотря на то, что расчеты орбиты новой планеты интенсивно велись многочисленными астрономами, Гауссу, который пользовался славой математика, но никак уже не астронома, удалось сделать самый точный прогноз! Этот успех принес Гауссу много почестей, в том числе и приглашение в Санкт-Петербург на должность директора обсерватории. Правда, это предложение Гауссом принято не было.

В марте 1802 астрономами были сделаны частичные наблюдения за еще одной аналогичной планетой – Палладой[72]. И в этом случае Гаусс быстрее всех вычислил ее орбиту. В 1809 году он изложил свои методы вычисления орбит в знаменитой монографии «*Теории движения небесных тел*».

С 1807 года Гаусс принимает кафедру математики и астрономии в Геттингенском университете, с которой была также связана должность директора Геттингенской астрономической обсерватории. На этом посту Гаусс оставался до конца жизни.

В 1809 году вышла «*Теория движения небесных тел, обращающихся вокруг Солнца по коническим сечениям*», где автором были изложены методы вычисления орбит. Для подтверждения мощности предложенного им метода, Гаусс повторяет расчеты Эйлера, которые тот проводил при вычислении орбиты кометы 1769 года. Эйлер поразил современников тем, что в свое время выполнил грандиозную работу за три дня напряженного счета (что привело, к несчастью,

---

70 **Генрих Вильгельм Маттеус Ольберс** (1758-1840), немецкий астроном, врач и физик.

71 **Церера** – карликовая планета астероидного типа. Это самое массивное небесное тело пояса астероидов: диаметр около 1000 км, масса составляет почти треть всей массы пояса астероидов, хотя в то же время более чем в 6000 раз уступает массе Земли. Длительное время Церера рассматривалась как полноценная планета Солнечной системы, однако впоследствии она была классифицирована как астероид, а в 2006 году Международным астрономическим союзом была отнесена к карликовым планетам.

72 **Паллада –** второй по величине астероид, также причисленный к «малым планетам». Размер – около 500 км. в диаметре.

даже к потери им зрения). Гауссу на те же вычисления понадобился всего час.

За работы в области астрономии в 1810 году Гаусс получил премию Парижской академии наук и золотую медаль Лондонского королевского общества. Многие европейские академии посчитали для себя честью избрать его в свои члены.

Знаменитую комету 1811-1812 годов астрономы наблюдали, также пользуясь вычислениями Гаусса. Эта комета «жила» на небесном небосклоне несколько месяцев. Про нее писал Лев Толстой в своем романе «Война и Мир». Эта комета остается и до наших дней самой «большеголовой»: ее объем почти в 10 раз превосходит размер Солнца.

В 1828 году вышел в свет основной геометрический трактат Гаусса «*Общие исследования относительно кривых поверхностей*», в котором автор предвосхитил некоторые идеи Николая Лобачевского[73].

В этом же году, будучи в гостях в доме Александра Гумбольдта[74], Гаусс познакомился с Вильгельмом Вебером[75]. Интересы обоих в то время лежали в области электродинамики и земного магнетизма, что послужило благодатной почвой для начала совместных исследований. Они создали систему электромагнитных единиц, а попутно в 1833 году сконструировали первый в Германии электромагнитный телеграф. Спустя пять лет, Гаусс издал фундаментальный труд и в этой научной сфере – «*Общая теория земного магнетизма*».

Интересно заметить, что в 1832 году Гаусс создал абсолютную систему мер на базе трех основных единиц: секунды, миллиметра и килограмма. Гауссова система лишь незначительно отличается от основной современной системы МКС (метр-килограмм-секунда)!

[73] **Николай Иванович Лобачевский** (1792-1856), русский математик, создатель геометрии Лобачевского, мыслитель-материалист, деятель университетского образования и народного просвещения.

[74] **Александр фон Гумбольдт** (1769-1859), немецкий естествоиспытатель и географ.

[75] **Вильгельм Эдуард Вебер** (1804 -1891), известный немецкий физик.

В начале 1840-х годов Гауссу поручили провести геодезическую съемку и составить детальную карту Ганноверского королевства. С целью усовершенствования оптической сигнализации при геодезических съемках, Гаусс изобрел специальный прибор – гелиотроп[76].

Как интересно, что столь много великих математиков делали своими руками приборы для подтверждения своих идей!

«Побочным продуктом» этой сугубо практической работы было создание основ высшей геодезии («*Исследования о предметах высшей геодезии*»). Созданная им так называемая «внутренняя геометрия поверхностей» послужила образцом для создания *n*-мерной римановой геометрии.

Геодезические измерения, как и вообще всякие реальные измерения физических объектов, были подвержены случайным инструментальным ошибкам. Даже после многократного измерения одной и той же величины, всегда остается неопределенность: что выбрать в качестве «истинного» значения? Для минимизации влияния ошибок измерения Гаусс разработал так называемый метод наименьших квадратов, который и по сей день широко применяется в статистике. Попутно он обосновал один из важнейших законов распределения вероятностей – так называемый нормальный закон распределения, который, кстати, часто именуют просто распределением Гаусса.

Гаусс скончался в 1855 году в возрасте 78 лет. Он до старости сохранил юношескую жажду знаний и огромную любознательность. Например, в 62 года он быстро выучил русский язык, чтобы самому разобраться в трудах своего коллеги – Николая Лобачевского.

Личная жизнь ученого, можно сказать, не была столь интригующей, как его научная карьера, однако и здесь не все было просто.

---

[76] Гелиотроп – от греческого Helios (солнце) + Tropos (поворот, направление). Прибор, основная часть которого – плоское зеркало, отражающее солнечный луч с одного пункта на другой при проведении геодезической триангуляции.

В 1805 году Гаусс женился на Иоганне Остгроф, дочери дубильщика. Спустя четыре года его молодая жена умерла во время родов, а новорожденный не прожил и месяца...

Вторая его женитьба на Фредерике Вальдек, дочери профессора Геттингенского университета, тоже не принесла ему счастья. Брак сначала был омрачен долгой и тяжелой болезнью жены на фоне конфликтов с подросшими детьми. После смерти матери в 1831 году, оба сына Гаусса, Евгений и Вильгельм, покинули отчий дом, эмигрировав в Америку.

* * * * *

Многие результаты Гаусса представляли собой незаконченные работы или были рассеяны в многочисленной переписке с коллегами. Научное наследие Гаусса вплоть до второй мировой войны было предметом тщательного изучения в Геттингенском ученом обществе, которое подготовило и издало 12-томное собрание его сочинений.

* * * * *

В честь Карла Гаусса были выпущены почтовые

Германия (GDR)

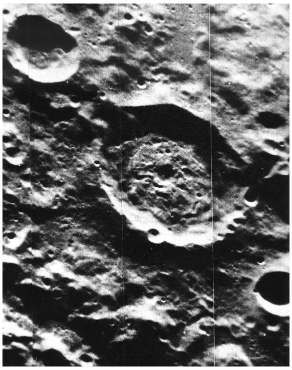
Германия (FRG)

Никарагуа

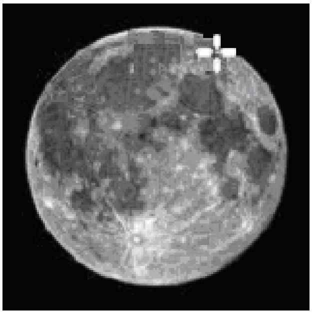
Его портрет имеется и на современной немецкой банкноте:

* * * * *

За великие заслуги в астрономии имя Карла Гаусса занесено на карту Луны: его именем назван один из крупнейших кратеров.



Кратер Гаусса на Луне.



Положение кратера.

Симеон-Дени Пуассон

(1781 – 1840)

Жизнь украшается двумя вещами – занятием математикой и ее преподаванием.

Симеон Пуассон

Выдающийся французский ученый, которого по праву считают одним из создателей современной математической физики. Он сделал большой вклад в математический анализ, теорию электромагнетизма, теорию вероятностей, а также в акустику, квантовую механику и теорию упругости.

Симеон Пуассон, отец Симеона-Дени, был солдатом саксонской армии и служил в Ганновере[77], но его военная карьера не сложилась, он фактически дезертировал, из-за притеснений со стороны офицера, после чего обосновался в маленьком французском городишке Питивье департамента Луара, где у него и родился сын. Симеон Пуассон занимал незначительную административную должность нотариуса в городе.

Мать будущего ученого имела исключительно слабое здоровье и была вынуждена отдать своего крохотного сына одной знакомой крестьянке-кормилице, жившей в деревне недалеко от Питивье. Однажды Симеон-отец задумал навестить Симеона-сына. Он явился в деревню, где жила кормилица. Не застав ее дома (она была в поле), проник в помещение и к своему ужасу увидел там такую картину: люлька с ребенком была подвязана к самому потолку. Как потом выяснилось, это было сделано для того, чтобы сберечь мла-

[77] **Ганновер** – административный центр земли Нижняя Саксония в Германии.

денца от нападения прожорливых свиней, которые табунами бродили вокруг маленького домика со слабыми запорами.

Когда сын достиг отроческого возраста, отец сам занялся домашним воспитанием сына, предполагая, что тот пойдет по его стопам. Однако сын не подавал особых надежд, и на семейном совете было решено обучать его «более простому» ремеслу – врачебному делу.

Симеона отправили в городок Фонтенбло, что находится километрах в 60 севернее, к брату отца, который был хирургом. Однако новая профессия давалось юноше нелегко. Дядюшка замучил его рутинными упражнениями (например, многочасовыми прокалываниями иголкой жилок на капустных листов для обучения кровопусканию), которые могли отбить интерес у кого угодно, даже и у тех, кто по-настоящему интересовался профессией лекаря, прошел почти год.

Однажды юному Симеону поручено было вскрыть нарыв на руке больного ребёнка. На следующий день после этой немудреной операции маленький пациент умер... Это привело Пуассона в такое глубокое отчаяние, что он наотрез отказался продолжать учение и буквально сбежал к родителям в родной Питивье.

За время, пока Симеона проживал у дяди, дома произошли серьезные изменения: отец его возглавил городской муниципалитет, а посему семья переехала в больший дом, более приличествующий новому положению в обществе. Социальная жизнь семьи стала оживленнее и интереснее: в дом приходило много интересных людей, из Парижа стали поступать журналы, среди которых оказался и «Журнал Политехнической школы», в котором предлагались различные математические задачки. Симеон легко расправлялся со всеми этими задачами, чем премного удивил отца, убежденного в ограниченных умственных способностях сына.

В результате Симеон был вновь отправлен обратно в Фонтенбло, но на этот раз уже в школу. В школе преподаватель математики был настолько поражен недюжинными способностями своего ученика, что даже стал заниматься с ним индивидуально. Он подготовил своего ученика к вступительному экзамену в знаменитую Политехническую школу (Ecole Polytechnique), куда 17-летний Пуассон успешно поступил.

Политехническая школа была создана декретом революционного Конвента в 1794 году для подготовки инженерных и офицерских кадров для Французской Республики. Школа эта была весьма престижна – ее воспитанники занимали высшие технические и государственные должности. Обучение в школе производилось по новой методике: всего за два года за счет высокой интенсивности обучения и первоклассных педагогов слушатели получали отличное образование. В Политехнической школе преподавали сильнейшие французские математики, физики и химики того времени: Монж[78], Лагранж, Фурье[79], Карно[80]. Лаплас был председателем совета школы и читал некоторые курсы.

Однажды произошел эпизод, во многом определивший дальнейшую судьбу Пуассона. Однажды Лаплас, преподававший небесную механику, дал слушателям решить далеко непростую задачу. К своему удивлению, он получил ответ, представлявший совершенно новое и изящное решение. Автором ответа оказался Симеон Пуассон. С тех пор Лаплас, а за ним Лагранж и другие профессора школы обратили внимание на молодого человека.

Впоследствии, когда Пуассон сделался украшением французской науки, он довольно часто вспоминал этот житейский случаи и свой рассказ всегда дополнял шуткой: «Без сомнения,– говорил он, – я качался из стороны в сторону и таким образом мне на роду было написано исследовать движение маятника».

Пуассону едва исполнилось 20 лет, а его имя стало уже известно в ученом мире: в ведущем научном издании Франции появилось две его ярких публикации.

После окончания Политехнической школы, Пуассон был оставлен в ней репетитором, затем в 1802 году получил должность помощника профессора, а когда в 1806 году из Политехнической школы ушел Фурье, его профессорское место занял 25-летний Пуассон.

---

[78] **Гаспар Монж** (1746 – 1818), известный французский математик-геометр.

[79] **Жан Батист Жозеф Фурье** (1768 – 1830), крупный французский математик и физик, известный названным в его честь преобразованием Фурье.

[80] **Никола Леонар Сади Карно** (1796–1832), французский физик и инженер, один из основоположников термодинамики .

Через шесть лет он был избран членом Парижской Академии наук, а с 1820 года стал членом Совета Парижского университета, где ему поручили инспектирование преподавания математики в колледжах Франции. Одновременно он был назначен экзаменатором выпускников Политехнической школы.

По словам современников, Пуассон обладал очень важными достоинствами: высокой ответственностью и безукоризненной обязательностью. Так, выпускные экзамены в Политехнической школе ежегодно отнимали у Пуассона четыре недели, в течение которых он должен был экзаменовать иногда по девять часов в день. «Только однажды, – пишет один из его биографов, – Пуассон из приличия отказался экзаменовать своего старшего сына, но воспитанники Политехнической школы, узнав об этом, послали к нему депутацию с объявлением, что они вполне верят его беспристрастию и просят не отказываться от экзамена».

Математика была для Пуассона основным жизненным стимулом. Однако он не был тем отрешенным сухарем, какими обычно рисуют математиков. Он был очень общительным человеком, большим театралом, очень любил литературу, зная наизусть многое из Мольера[81], Корнеля[82] и Расина[83].

В те бурные годы правительства Франции менялись одно за другим, однако каждое из них отмечало научные заслуги Пуассона и воздавало ему честь по заслугам: при Наполеоне он получил титул барона и был награжден орденом Почетного легиона, а при Луи-Филиппе был сделан пэром Франции.

Получил Пуассон признание и за рубежом: он был членом всех научных обществ и академий Европы и Америки, в том числе почетным членом Петербургской Академии наук.

---

[81] **Мольер** (урожденный **Жан Батист Поклен**) (1622-1673), величайший комедиограф Франции, создатель классической комедии.

[82] **Пьер Корнель** (1606- 1684), знаменитый французский драматург, «отец французской трагедии».

[83] **Жан Расин** (1639-1699), французский драматург-трагик, входивший в так называемую «великую тройку» драматургов XVII века наряду с Корнелем и Мольером.

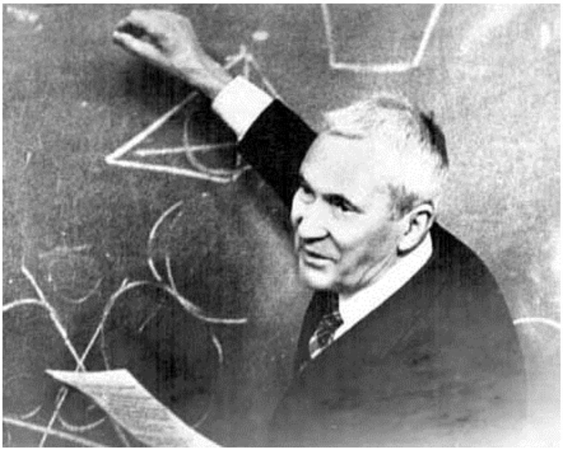
В последние годы жизни он поставил перед собой задачу написать фундаментальный курс математической физики, но выполнить эту задачу до конца Пуассон, к сожалению, не успел.

Число научных трудов Пуассона превосходит 300. Они относятся к разным областям чистой математики, математической физики и небесной механики. Занимаясь теорией азартных игр, он ввел одно из важнейших распределений вероятностей случайных величин (распределение Пуассона) и доказал теорему Пуассона, являющуюся частным случаем закона больших чисел. Эти результаты лежат в основе современной теории вероятностей.

Именем Пуассона названы широко применяющиеся в теории массового обслуживания и статистической физике случайные точечные процессы. Имя Пуассона носят многие термины математики и физики: «скобки Пуассона» (теория дифференциальных уравнений), «коэффициент Пуассона» (теория упругости), «интеграл Пуассона» и «формула суммирования Пуассона» (интегральное и дифференциальное исчисления), «уравнение Пуассона» (электростатика) и т.д.

Андрей Николаевич Колмогоров

(1903-1987)



Человечество всегда мне представлялось в виде множества блуждающих в тумане огоньков, которые лишь смутно чувствуют сияние, рассеиваемое всеми другими, но связаны сетью ясных огненных нитей, каждый в одном, двух, трех... направлениях. И возникновение таких прорывов через туман к другому огоньку вполне разумно называть «ЧУДОМ».

Андрей Колмогоров.

Вряд ли, кроме Андрея Николаевича Колмогорова, можно назвать другого математика XX столетия, который бы внес такой фундаментальный вклад в самые различные области математических знаний: теорию вероятностей, теорию случайных процессов, математическую статистику, теорию множеств, математическую логику, теорию функций, функциональный анализ, теорию приближений, топологию, геометрию, дифференциальные уравнения, теорию турбулентности, теорию стрельбы, теорию алгоритмов и автоматов, теорию динамических систем, классическую механику, теорию суперпозиций функций, теорию информации, кибернетику, математическую лингвистику и другие сферы научных знаний.

Он был блестящим теоретиком, но существенную долю в его научных исследованиях составляют работы в области приложений к физике, биологии, геологии, океанологии, метеорологии, кристаллографии и другим областям. Колмогоров говорил: «Нет математиков «чистых» и «прикладных». Есть просто математики».

И помимо всего этого, Андрей Николаевич имел труды по вопросам педагогики, стиховедения, философии, истории и естествознания; он написал множество статей в различные энциклопедии по широчайшему спектру вопросов.

По числу регалий Колмогоров вряд ли уступает даже самым знаменитым «китам» в области математики – Ньютону, Эйлеру и Лейбницу. Колмогоров был членом практически всех наиболее авторитетных научных сообществ мира: он являлся иностранным членом Академий наук Венгрии, Германии, Нидерландов, Польши, Румынии, США, Финляндии и Франции и членом Лондонского Королевского общества, а также почетным доктором многих университетов.

В мировой науке, чтобы отметить достижения в тех областях, которые не охватываются Нобелевскими[84] премиями, были учреждены Бальцановские премии[85]. В 1963 году состоялось первое присуждение Бальцановской премии по математике – ее лауреатом стал А. Н. Колмогоров. Это была высшая оценка вклада Колмогорова в мировую науку.

Кроме этого, А.Н. Колмогоров был удостоен премии имени Н.И.Лобачевского и премии имени П.Л. Чебышева, а также был лауреатом Ленинской и Государственной премий.

* * *

84 Премия учреждена **Альфредом Бернхардом Нобелем** (1833 - 1896), шведским химиком, который изобрел динамит. Он завещал использовать всё свое огромное состояние на учреждение Нобелевской премии за крупнейшие научные открытия.

85 Существует версия, что крупный шведский математик Миттаг-Леффлер (1846-1927), который мог быть безусловно одним из лауреатов Нобелевской премии (а математика была первоначально включена в список наук, представители которых могут быть удостоены этой премии) настойчиво и небезуспешно ухаживал за женой Нобеля. Узнав об этом, учредитель премии решил отомстить обидчику и его науке таким своеобразным способом.

Андрей Николаевич Колмогоров родился 25 апреля 1903 года в Тамбове. Мать его, Мария Яковлевна, умерла во время родов, и все заботы о мальчике взяла на себя ее сестра – Вера Яковлевна Колмогорова. (Отец Андрея, Катаев Николай Матвеевич, по образованию агроном, погиб в 1919 году во время Гражданской войны.)

Детство Андрей провел в имении деда в селе Туношна Ярославской области. Его тетки организовали в селе школу для детей, в которой они занимались с детьми по новейшим педагогическим методикам. В школе издавался рукописный журнал «Весенние ласточки», в котором публиковались творческие работы учеников – рисунки, стихи, рассказы. В нем же появлялись и первые «научные работы» Андрея – придуманные им арифметические задачи. Здесь же мальчик опубликовал в пять лет свою первую работу по математике, которую вполне можно было назвать научной.

Сам Андрей Николаевич так вспоминал те годы:

> «*Радость математического «открытия» я познал рано, подметив в возрасте пяти-шести лет закономерность:*
>
> $$1 = 1^2$$
>
> $$1 + 3 = 2^2$$
>
> $$1 + 3 + 5 = 3^2,$$
>
> *и так далее...* »

А одна из задач, придуманных шестилетним Андреем, звучала так: «*Сколькими способами можно пришить пуговицу?* ». (Имелось в виду, что ни одна дырочка не должна оставаться свободной,и нигде не будет двух стежков.)

Когда Андрею исполнилось семь лет, Вера Яковлевна Колмогорова вместе с ним переезжает в Москву, где определяет мальчика в частную гимназию, организованную кружком радикально настроенной интеллигенции, а потому находившуюся под постоянной угрозой закрытия. В этой гимназии мальчики и девочки учились вместе, здесь Андрей познакомился с Аней Егоровой, ставшей впоследствии его женой, с которой они прожили долгую и счастливую жизнь. Они поженились в трудном 1942 году. Анна Дмитриевна пережила своего мужа лишь на год...

Андрей уже в те годы обнаруживает замечательные математические способности, хотя путь его еще не определился: было увлечение историей и социологией, а одно время он даже мечтал стать лесничим. «В 1918–1920 годах жизнь в Москве была нелегкой, – вспоминал Андрей Николаевич. – В школах серьезно занимались только самые настойчивые. В это время мне пришлось уехать на строительство железной дороги Казань-Екатеринбург. Одновременно с работой я продолжал заниматься самостоятельно, готовясь сдать экстерном за среднюю школу. По возвращении в Москву я испытал некоторое разочарование: удостоверение об окончании школы мне выдали, даже не потрудившись проэкзаменовать».

Поступив в Московский университет, Андрей начинает заниматься у Урысона[86], Александрова[87] и Лузина[88], которого он считал своим учителем в математике.

В первые же месяцы Андрей сдал экзамены за первый курс, что дало ему как студенту второго курса право на «стипендию»: шестнадцать килограммов хлеба и килограмм масла в месяц. По тем временам это было настоящее благополучие!

На одной из лекций Лузина, Колмогоров впервые обратил на себя внимание профессора. Когда тот сказал: «Давайте строить доказательство теоремы, исходя из следующего предположения…» – в аудитории раздался голос студента: «Профессор, оно ошибочно…» Это был Колмогоров. Лузин, выслушав объяснение студента, кивнул и заметил: «Что ж, приходите на кружок, доложите нам свои соображения более развернуто». «Хотя мое достижение было довольно детским, оно сделало меня известным в Лузитании[89]», – вспоминал об этом эпизоде сам Андрей Николаевич.

---

[86] **Урысон Павел Самуилович** (1898-1924), русский математик, один из крупнейших специалистов в области топологии, создавший новое направление – теорию размерности . Был сотрудником института математики и механики Московского университета и профессором Московского университета. Погиб от несчастного случая во время купания.

[87] **Павел Сергеевич Александров** (1896- 1982), известный советский математик, специалист по топологии. Профессор Московского университета, академик АН СССР.

[88] **Лузин Николай Николаевич** (1883-1950), советский математик, академик АН СССР. Основатель московской научной школы теории функций

[89] Так называли студенты неформальный семинар Лузина.

Ко времени окончания университета у Колмогорова было уже около 15 статей по теории функций действительного переменного.

Многие годы тесного и плодотворного сотрудничества связывали его с Хинчиным[90], который в то время начал разработку вопросов теории вероятностей. Она и стала областью совместной деятельности двух ученых. («Наука о случае» еще со времен Чебышёва являлась как бы русской национальной наукой.)

Особое значение для приложения математических методов к естествознанию и практическим наукам имел закон больших чисел. Крупнейшие математики многих стран на протяжении десятилетий безуспешно старались найти необходимые и достаточные условия, когда он справедлив. В 1926 году эти условия были получены Колмогоровым, который тогда учился в аспирантуре.

Колмогоров считал, что в его жизни одним из важнейших событий была дружба с Александровым[91]. Он писал: «Наверное, математиком я стал бы и самостоятельно, но мои человеческие качества сложились в значительной мере под влиянием Павла Сергеевича. Он действительно был изумительнейший человек по богатству и широте взглядов не только у нас, но и во всем мире. Его знание музыки, живописи, его душевное отношение к людям – необычайны».

Колмогоров и Александров приобрели совместно дачу под Москвой в Комаровке, которая вскоре стала своеобразным научным центром: здесь собирались семинары для аспирантов, а позднее и для учеников знаменитой Колмогоровской школы для одаренных ребят. На доске в комнате для занятий со школьниками сохранена сделанная рукой Андрея Николаевича запись:

«MEN ARE CRUEL BUT A MAN IS KIND»...

---

90 **Александр Яковлевич Хинчин** (1894-1959), один из самых блестящих представителей Московской математической школы. Им получены основополагающие результаты в теории функций действительного переменного, теории чисел, теории вероятностей, статистической физике.

91 **Павел Сергеевич Александров** (1896-1982), академик АН СССР, основатель Российской топологической школы. Основатель кафедры высшей геометрии и топологии МГУ. Многие годы был Президентом Московского математического общества.

Начиная с 1933 года и до самой кончины, наряду с феноменальными научными разработками, А.Н. Колмогоров ведет титаническую научно-организационную работу. Вот краткий перечень:

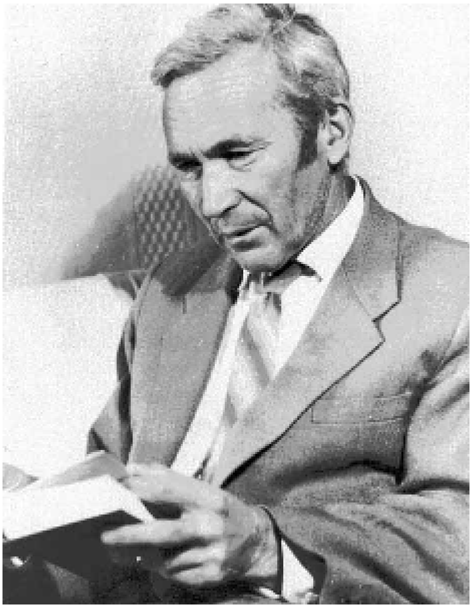
- Директор Института математики и механики МГУ (1933),
- Основатель и главный редактор журнала «Успехи математических наук» (1933),
- Основатель Кафедру теории вероятностей МГУ и ее заведующий (1935),
- Заведующий Отделом теории вероятностей в Математическом институте АН СССР им. В.А. Стеклова[92] (1938)
- Академик-секретарь Отделения физико-математических наук и член Президиума Академии Наук (1939).
- Заведующий лабораторией турбулентности в Институте теоретической геофизики Академии наук (1946)
- Декан Механико-математического факультета МГУ (1954),
- Основатель журнала «Теория вероятностей и ее применения» и его главный редактор (1956),
- Заведующий созданной по его инициативе Межфакультетской Лаборатории статистических методов (1960),
- Основатель физико-математической школы-интерната при МГУ (1963), которой в 1989 году было присвоено имя академика А.Н.Колмогорова,
- Президент Московского математического общества (1964),
- Один из основателей популярного математического журнала для юношества "Квант" и его первый зам. редактора(1970),
- Заведующий созданной по его инициативе новой кафедры механико-математического факультета – кафедры математической статистики (1976).
- Заведующий кафедрой математической логики Механико-математического факультета МГУ (1980)
- Заведующий Отделом математической статистики и теории информации Математического института им. В.А. Стеклова Академии наук (1983)

В начале 1970-х годов А. Н. Колмогоров участвовал в двух экспедициях на научно-исследовательском судне «Дмитрий Менделеев». В качестве научного руководителя этих рейсов он совместно с учениками проводил исследования турбулентности океана. Сам Колмогоров говорил: «Я – за непосредственное участие, где можно, в эксперименте вместе с физиками».

---

[92] **Владимир Андреевич Стеклов** (1864-1926), русский математик и механик. Академик Петербургской Академии наук

Умер Колмогоров в Москве 20 октября 1987 года.



Андрей Николаевич Колмогоров

<u>Современники об Андрее Николаевиче Колмогорове.</u>

Колмогоров – уникальное явление русской культуры, наше национальное достояние.

В. А. Успенский[93]

* * *

А. Н. Колмогоров принадлежит к числу тех математиков, у которых каждая работа в каждой области производит полную переоценку ценностей. Трудно найти математика в последних десятилетиях не просто такой широты, а с таким воздействием на математические вкусы и на развитие математики.

П. С. Александров

* * *

[93] **Владимир Андреевич Успенский** (р.1930), русский математик, заведующий кафедрой математической логики и теории алгоритмов МГУ.

Андрей Николаевич Колмогоров занимает уникальное место в современной математике, да и в мировой науке в целом. По широте и разнообразию своих научных занятий он напоминает классиков естествознания прошлых веков.

***Н. Н. Боголюбов*[94]*, Б. В. Гнеденко, С. Л. Соболев*[95]**

* * *

Андрей Николаевич принадлежал к числу тех несравненных гениев, которые украшают жизнь уже самим фактом своего существования.

***В. М. Тихомиров*[96]**

* * *

Колмогоров дарил окружавшим его людям ни с чем не сравнимое, почти физическое ощущение непосредственного соприкосновения с гением.

В. А. Успенский

* * *

Поразителен тот воспитательный эффект, который на себе испытывал каждый, соприкасавшийся с Андреем Николаевичем. Поражала необычайная щедрость, с которой он делился своими идеями и знаниями, гражданственность его позиции в понимании роли ученого своей страны. Удивляла его исключительная общечеловеческая культура, знание литературы, поэзии, музыки, истории, архитектуры.

***А.Н. Ширяев*[97]**

* * *

Колмогоров был не просто ученый, он был глубокий мыслитель. Для него процесс постоянного поиска нового результата, метода, идеи был равносилен самой жизни.

Б. В. Гнеденко

---

[94] **Николай Николаевич Боголюбов** (1909-1992), выдающийся русский математик и физик-теоретик.

[95] **Сергей Львович Соболев** (1908-1989), один из крупнейших русский математик математиков XX века.

[96] **Владимир Михайлович Тихомиров** (р.1934), русский математик, профессор МГУ.

[97] **Альберт Николаевич Ширяев** (род. 1934), российский математик; член-корреспондент Российской Академии наук, действительный член Академии Европы, почетный член Королевского статистического общества Великобритании и член Международного статистического института. Сейчас заведует кафедрой Теории вероятностей в Московском Государственном университете.

Несколько личных воспоминаний об Андрее Николаевиче Колмогорове

Первая встреча с Колмогоровым

Вряд ли кто усомнится, что Андрей Николаевич Колмогоров был не только величайшим российским математиком прошлого века, но и одним из крупнейших математиков России всех времен. Почти все согласятся, что он был, возможно, и крупнейшим математиком в мире в XX веке. Его имя стоит в истории теории вероятностей наравне с именами Эйлера и Бернулли, Лапласа и Гаусса, Паскаля и Маркова.

Поэтому не написать про знакомство с Андреем Николаевичем я просто не могу. Мне не посчастливилось знать его близко, но те немногие встречи, которые мне были подарены судьбой, я опишу.

В 1963 в Тбилиси состоялась Международная конференция по теории вероятностей и статистике. Мой друг, Юра – извините, Юрий Константинович – Беляев предложил мне поехать на конференцию с группой сотрудников МГУ. Я уже и командировку оформил и билеты МГУшные друзья мне купили вместе с ними, а приглашения у меня нет! А без приглашения – не поедешь...

Тогда Юра успокоил меня и сказал, что достанет мне приглашение. Он был аспирантом Андрея Николаевича, поэтому смог придти попросить приглашение для меня у самого Колмогорова. Колмогоров сказал, что, к сожалению, у него не осталось приглашений... Но он тут же нашелся: «Я могу отдать свое – меня, надеюсь, пропустят без приглашения».

Так я стал обладателем уникального приглашения с написанным на нем именем Колмогорова! (Не сохранил, дурья голова!)

Сели мы в поезд, у нас было отдельное купе. Вдруг, минут через 15 после отправления врывается в купе достаточно пожилой человек, хотя и в прекрасной спортивной форме – поджарый, загорелый, волосы всклокочены. Он начинает громко возмущаться:

- Кто это догадался купить мне билет в вагон СВ?

Один из молодых университетских ребят признался, что он покупал все билеты и хотел для Андрея Николаевича сделать получше.

- Где ваш билет? Вот и давайте мне его, а сами пойдете спать в ваше СВ!

Так Колмогоров появился в нашем купе. Когда первое наше смущение прошло, он втянул всех нас в общий разговор. Ехали мы, кажется, почти двое суток, чуть меньше. Рассказы Колмогорова всегда были насыщены понятными описаниями сложных и далеко не таких уж понятных вещей. Он рассказывал и про свои путешествия на исследовательском бриге «Товарищ», где он экспериментально подтвердил свою хорошо теперь известную в гидродинамике теорию неподвижного слоя. И про то, как метод Монте-Карло был применен при строительстве Ингурской ГЭС при перекрытии реки; и про многое другое. У меня не хватило ума записать все по свежим следам.

Помню, кто-то спросил:

- Андрей Николаевич, а как так получается, что почти все ваши математические результаты отличаются тем, что они имеют практическое приложение?

Ответ Колмогорова я запомнил на всю жизнь:

- Я формулирую задачу в строгих математических терминах, предугадываю нужный результат, а потом начинаю решение с двух концов. Таким образом, я оставляю только те допущения, которые не противоречат физическим свойствам ожидаемого решения. Если же решать задачу обычным образом, «с начала», то всегда есть соблазн сделать такие допущения, которые приведут к весьма элегантному, но в то же время и столь же бесполезному решению.

Когда началась конференция, на которой отмечали 60-летие Колмогорова, выступал с пленарным докладом кто-то из видных американских ученых. Он сказал примерно следующее:

- Всем нам известны результаты Колмогорова в теории вероятностей, математической статистике, теории множеств, небесной механике, гидродинамике, лингвистике... Многие из нас на Западе думают, что Колмогоров, как личность, не существует, что есть коллектив ученых под таким псевдонимом, как, например, известная французская группа «Бурбаки». Однако теперь каждый может убедиться, что Колмогоров существует: вот он сидит перед нами!»

Устами младенца...

Андрея Николаевича Колмогорова я встречал много раз на днях рождения Бориса Владимировича Гнеденко – 1 января каждого года. Иногда я встречал его и в простые дни, когда я приходил к Борису Владимировичу, а у него был Андрей Николаевич, или наоборот, он приходил, когда я был у Бориса Владимировича (а у того я бывал часто по делам многочисленных редакций, где мы вместе состояли, или Кабинета надежности, коим вместе руководили).

Однажды я помогал Андрею Николаевичу нести какие-то книги от Гнеденко к нему домой – это был единственный раз, когда я побывал в квартире у Колмогорова. И он, и его жена, Анна Дмитриевна, были очень радушными людьми. Я тут же был приглашен к чаепитию.

И вот однажды на очередном дне рождения (кстати, это было 70-летие Гнеденко) ко мне подсел Андрей Николаевич и сказал:

- Борис говорил мне, что вы радиоинженер. Не могли бы вы мне помочь с небольшой проблемой? И меня сломался проигрыватель...

Тут у меня душа ушла в пятки: из меня такой же радиоинженер, как из моей бабушки вратарь! Но отказать ***самому*** Колмогорову сил не было, я промычал нечленораздельное согласие.

Условились, что недельку – две я позвоню ему, и он назначит мне день и место встречи. Проигрыватель стоял у него на даче, в Комаровке. Зимой он бывал там нерегулярно.

Я сразу же поймал за фалду пиджака Алика, младшего сына Бориса Владимировича, и рассказал ему все:

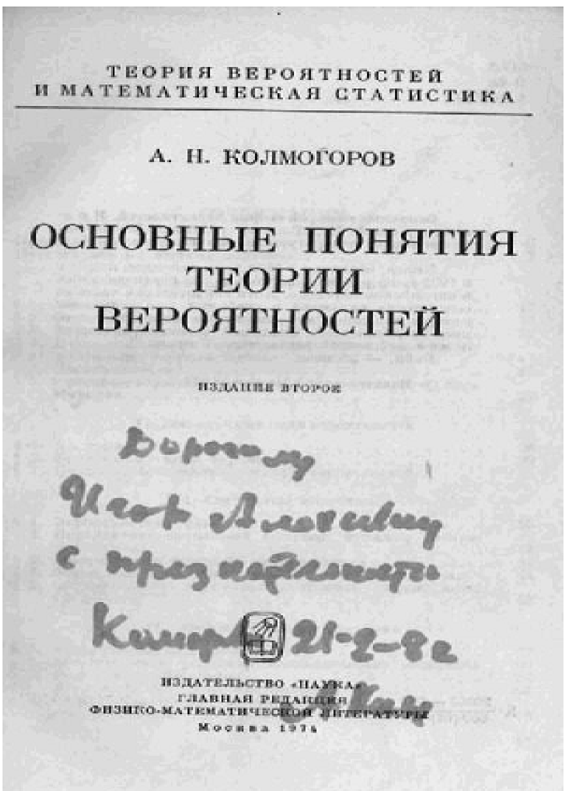
- Ты же почти радиолюбитель, выручай!

Он согласился поехать со мной и даже предложил поехать туда на машине его отца.

Подошла середина января, я созвонился с Андреем Николаевичем, и он пригасил меня к себе на дачу где-то в начале февраля. Я решил взять с собой своего сына:

- Слава, ты увидишь человека, какие на Руси-матушке рождаются не каждое столетие!

Алик Гнеденко привез нас по заснеженным подмосковным дорогам в Комаровку к даче Колмогорова. Открыл нам дверь сам Андрей Николаевич и радушно пригласил нас в дом. Оказывается, в этот день он заранее пригласил еще и прислугу (слово какое-то гадкое, но другого придумать сходу не могу), которая заранее натопила печь и приготовила обед. Перед обедом надлежало произвести ремонт треклятой радиоаппаратуры. Я решил начать сам. Смело подошел к проигрывателю, попробовал – диск не крутится. Попробовал его поднять – не поднимается! Применил силу и вытащил диск, на оси которого густым слоем был размазаны бренные останки всякой насекомой живности. Я протер ось, попросил подсолнечного масла (машинного, естественно, не оказалось), слегка смазал им ось, вставил диск на место... и о, чудо! Проигрыватель завертелся! Колмогоров страшно обрадовался и тут же поставил что-то классическое, похоже, Баха или Генделя.


ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

А. Н. КОЛМОГОРОВ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ
ТЕОРИИ
ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ

Дорогому
Игорю Алексеевичу
с признательностью
Комаровка 21-2-82

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1974

Автограф А.Н. Колмогорова

- Уж не знаю. Как мне вас и благодарить, Игорь Алексеевич!

Я был поражен, что он знает меня по имени-отчеству, хотя для педагогов хорошая память на имена - это естественно. Тут я увидел на полке стопку его книг «Основные понятия теории вероятностей» и сказал:

-А можно мне попросить вас подарить мне вашу книгу с автографом?

- С огромным удовольствием! Что бы вы хотели, чтобы я написал? «Уважаемому профессору Ушакову»? И что-нибудь еще?

- Ой, Андрей Николаевич, ну, зачем профессору... Что-нибудь попроще...

И он написал мне «Дорогому Игорю Алексеевичу с признательностью. А. Колмогоров. Комаровка. 21-2-82».

Когда я увидел это, то, конечно, смутился.

- Андрей Николаевич, я такое и показать никому не смогу: от вас и ... «с признательностью». Никто и не поверит...

- Ну, во-первых, это правда - сам бы я этого сделать не смог. А во-вторых, рассказывайте всем, как это было, если кто-то заинтересуется.

Потом Андрей Николаевич пригласил нас к столу. Был борщ, котлеты по-пожарски и компот. За обедом Колмогоров посадил рядом с собой Славу и начал разговаривать только с ним. Мы с Аликом исчезли из его поля зрения полностью. («Мавр сделал свое дело...»)

Разговор, естественно, начался с математики. Андрей Николаевич спросил Славу, которому тогда исполнилось 14 лет, нравится ли ему учебник по математике. (Колмогоров был идеологом и одним из авторов школьных учебников по математике для средней школы.) Слава немного потупившись, сказал:

- Папа говорил мне, что это вы писали учебник... Но он нам не нравится...

- Почему?

- Непонятно все... Хорошо, что у меня остались учебники моей от сестры...

- Это хорошо, что ты говоришь правду!

Нужно заметить, что Андрей Николаевич очень болезненно воспринимал критику его учебников по математике. Скорее всего, фактический их провал был обусловлен не только переформализованностью изложения, но и тем, что школьные учителя сами не были готовы к их восприятию. Дебаты велись довольно острые. Я помню, однажды Колмогоров довольно резко сказал Гнеденко: «Борис, ты ничего не понимаешь в преподавании математики в школе!»

Разговор со Славой продолжался. Мы с Аликом сидели, как в театре.

- А ты любишь математику?

- Нет...

- А что ты любишь?

- Рисовать...

Тут Андрей Николаевич оживился и сказал, что это очень здорово, что он очень любит живопись и графику. Стал показывать развешанные по стенам литографии и гравюры, рассказывая, откуда они и о чем. Коллекция Колмогорова была действительно непроста и включала редкие оригиналы.

- Вот как ты думаешь, на этом рисунке?

- Это «Нос» Гоголя...

- Правильно! Это нос Гоголя! Это шарж одного из современников Гоголя на самого Гоголя!

Фамилию художника я, к сожалению, не запомнил.

Потом он повел Славу в свой кабинет, а мы с Аликом как-то явно приглашены не были и поэтому остались в столовой. Колмогоров проводил экскурсию по дому со Славой довольно долго.

Провожая нас, Андрей Николаевич сказал мне:

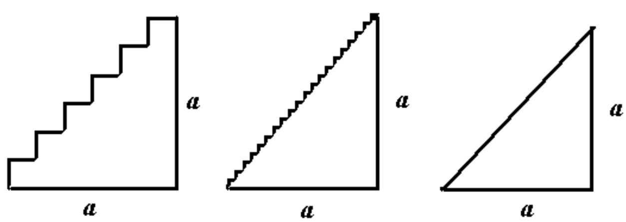
- Хороший у вас сын, открытый. Чувствует живопись. А математика ему, возможно, в жизни и не будет очень-то нужна.

Андрей Николаевич оказался прав: мой сын стал художником-мультипликатором, завоевал с десяток престижных российских и международных призов за свои мультики, а только что закончил полнометражный фильм «Белка и Стрелка: Звездные собаки», где его дочка Настя озвучивает дочку Джона Кеннеди Кэролайн, которой был подарен щеночек от Белки.

Рассказ Бориса Владимировича Гнеденко

Борис Владимирович Гнеденко – любимый ученик и впоследствии самый близкий друг Андрея Николаевича – рассказал однажды такую историю про своего учителя.

На лекции в Московском Государственном Университете профессор по матанализу рассказывает о бесконечно малых величинах. Он рисует на доске лестницу с прямоугольными ступеньками и начинает уменьшать размер ступенек.



Сделав последний рисунок, он заявляет: «Очевидно, что в результате получена гипотенуза равнобедренного треугольника длиной $a\sqrt{2}$, где а есть длина катета ”.

В тот же момент раздается звонкий голос из аудитории: «Это вовсе не очевидно! Более того, это просто неверно!» Аудитория замерла: какой-то студент осмеливается громогласно заявлять, что знаменитый профессор ошибся....

Как вы, наверное, уже догадались, это был голос Колмогорова. Профессор попросил студента объяснить, в чем же тот усматривает ошибку. На это он получил простой и исчерпывающи ответ. «С увеличением числа ступенек длина периметра остается постоянной. На самом деле, все проекции вертикальных стенок ступеней в сумме дают *a*. То же происходит и с горизонтальными участками ступеней. В результате длина периметра всегда остается равной 2*a*».

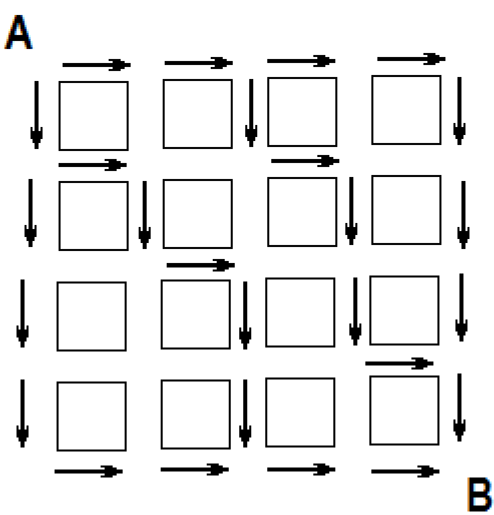
Этот факт, который был обнаружен Колмогоровым, нам теперь хорошо известен. В так называемой «Манхэттенской метрике» расстояние $d(P_1,P_2)$ между точками $P_1(x_1,y_1)$ и $P_2(x_2,y_2)$ на плоскости определяется не по так, как в Евклидовом пространстве по формуле

$$d\,(P_1, P2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\ ,$$

а по формуле

$$d\,(P_1, P2) = |x_1| + |x_2|.$$

Почему эта метрика называется Манхэттенской»? Представьте себе, что вы находитесь в районе Нью-Йорка Манхэттене, где строго с Востока на Запад проложены улицы («стриты»), а с Севера на Юг – проспекты («авеню»). Идя из точки *A* в точку *B*, вы можете выбрать один из зигзагообразных путей, причем все они будут одной и той же длины!



В американской математической литературе этот феномен называется иногда «метрикой таксиста».

СТРАНИЧКА САМОРЕКЛАМЫ

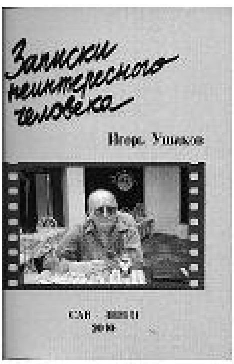
Как я уже писал, в Москве издательством URSS (УРСС) опубликованы 8 книг серии «История науки сквозь призму озарений». Эти книги прекрасно изданы и имеют вполне божескую цену.

Надеюсь, они все же попадут на американский книжный рынок, тогда отпадет необходимость в моих «самиздатских» вариантах. А пока... Мои друзья могут эти книги заказать на моем закрытом сайте. Как эти книги приобрести, написано ниже.

У меня есть еще три книги, близкие по духу тем, которые уже представлены.

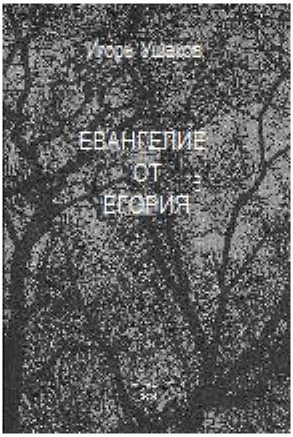
Это две книги про рукотворные и нерукотворные чудеса мира и книга о загадке жизни (теории возникновения и развития жизни на Земле).

Кроме того, есть чисто литературные вещи, которые не требуют специальных комментариев:

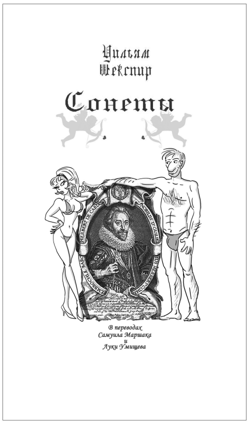


А также «джентльменский» набор:

И еще парочка книг, не предназначенных для религиозных людей.



Совсем свежее «пополнение» - шутливые переводы сонетов Шекспира.



Все эти книжки <u>можно заказать</u>: Набираете в Интернете адрес: http://www.lulu.com/shop. **В поисковой строке набираете по-русски «ушаков». Дальше – выбирайте! Литературные книги продаются по себестоимости (non-profit). Литературные книги можно скачать бесплатно.**

Если будут трудности или вопросы, пишите по адресу

igusha22@gmail.com.

Книги, изданные в Москве издательством URSS, можно купить, к сожалению, пока только в России и в Украине.

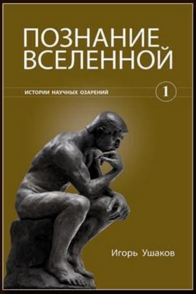
Справки по телефону: 8(499)724-25-45. Емейл: **orders@URSS.ru**.
Адрес магазина: **117335, г. Москва, Нахимовский проспект, 56.**

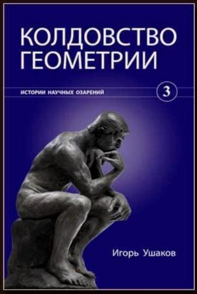
San Diego, California.

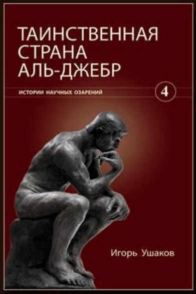
Окончил Московский авиационный институт. Доктор технических наук, профессор. Руководил научными отделами в научно-иследовательских институтах военно-промышленного комплекса бывшего Советского Союза, а затем заведовал отделом в Вычислительном Центре АН СССР (ныне ВЦ им. Дородницына РАН). Параллельно с основной работой заведовал кафедрой «Большие системы» Москов ского Физтеха, читая курсы по прикладной математике. Более 50 его учеников успешно защитили кандидатские диссертации, девять из них стали докторами наук.

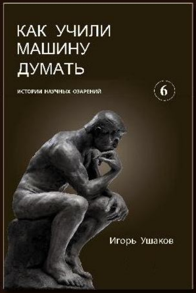
В 1989 г. был приглашен в США в Университет Джорджа Вашингтона, а затем преподавал в Калифорнийском университете (Сан-Диего). Работал в качестве главного научного специалиста в ряде крупных американских компаний.

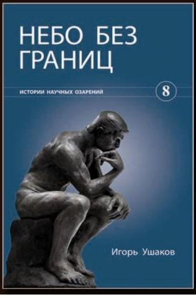
Опубликовал около 30 научно-технических монографий в России, США, Германии, Болгарии и Чехословакии. Автор около 400 научно-технических статей, опубликованных в ведущих российских и международных журналах. Издал в России дюжину научно-популярных книг, переведенных в США. Кроме того, его перу принадлежит восемь книг прозы и стихов.











ISBN 978-1-4583-8596-3
90000
9 781458 385963