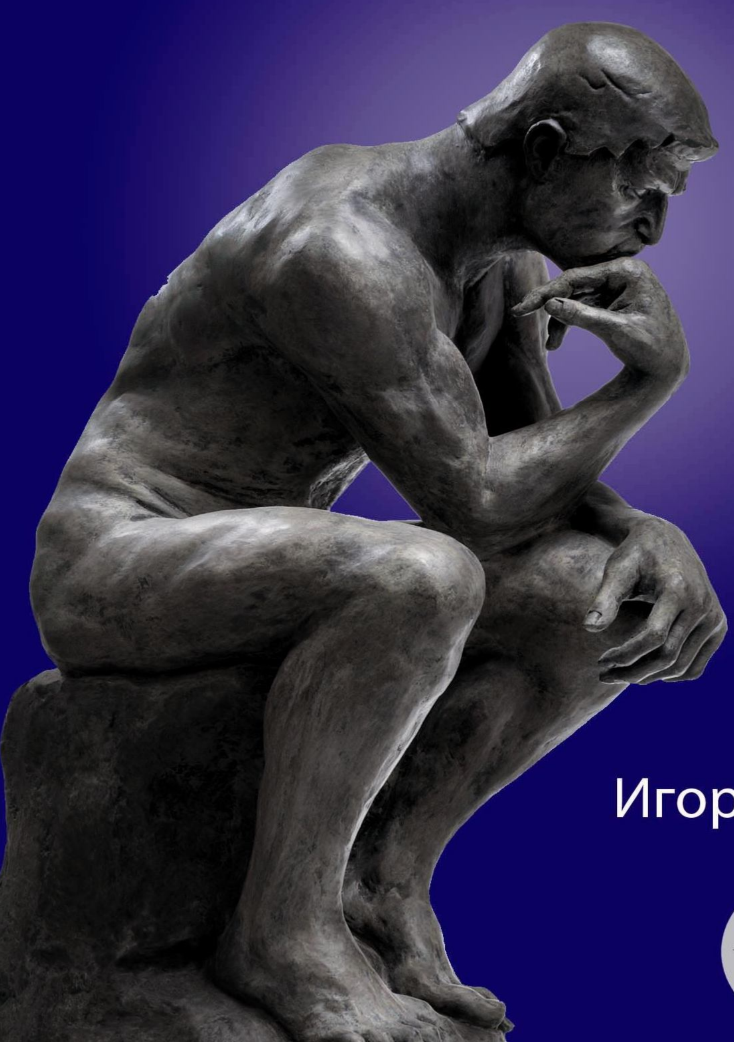
КОЛДОВСТВО ГЕОМЕТРИИ

ИСТОРИИ О НАУЧНЫХ ОЗАРЕНИЯХ

3



Игорь Ушаков

ИСТОРИИ О НАУЧНЫХ ОЗАРЕНИЯХ

(КНИГА 3)

ИГОРЬ УШАКОВ

КОЛДОВСТВО ГЕОМЕТРИИ

San Diego
2011

Дизайнер обложки: Кристина Ушакова

Художник: Святослав Ушаков

Перевод с английского.

Перечень книг, входящих в серию «Истории о научных озарениях»

1. **Пути познания Вселенной**
   Начало астрономии. Античные ученые измеряют размеры Земли, Луны и Солнца. Начало географии. Как люди учились измерять.
2. **В начале было число…**
   Как люди начали считать. Цифры разных народов. Удивительные числа. Цифры в черной магии. Арифметика – не скучная наука!
3. **Колдовство геометрии**
   Необычные и невозможные фигуры. Лист Мёбиуса. Бутылка Клейна. Фракталы. «Золотое сечение».
4. **Таинственная страна Аль-Джабр**
   Интересное об алгебре. Диофантовы уравнения. Великая Теорема Ферма, которая сводила с ума поколения математиков, наконец-то доказана!
5. **Этот случайный, случайный, случайный мир…**
   Природа случайного. Вероятностные парадоксы. Можно ли регулярно выигрывать в лотерею?
6. **Как учили думать машину**
   Как люди изобрели первые счетные машины. Первые компьютеры. Создание искусственного интеллекта.
7. **Прекрасные ученые прекрасного пола**
   Рассказы о женщинах-ученых с Античности до наших дней.
8. **Икары и Ихтиандры**
   Как человек покорил небо и подводное царство.
9. **Небо без границ**
   История покорения космоса. Триумфы и трагедии.

Эти книги помогут преподавателям сделать их занятия более увлекательными, а слушателям - узнать больше, чем знают сами учителя!

СОДЕРЖАНИЕ

**Блаженство тела состоит в здоровье,
блаженство ума – в знании.**

Фалес Милетский[1]

От автора

О чем серия этих научно-популярных книг?

Для кого она предназначена?

С самого начала заметим, что это не учебные пособия и не научные опусы. Это сборник рассказов о великих математических, научных и инженерных озарениях и о творцах новых идей в самых различных сферах человеческой деятельности.

Чтение этой книги не требует от читателя каких-либо специальных знаний, хотя, конечно, определенные знания предполагаются (практически на уровне средней школы): в этом случае книгу будет читать приятнее.

Прежде всего, книги серии «Истории о научных озарениях» должны вызвать интерес у школьников и студентов, которым захочется узнать о том, что выходит за рамки учебной программы. (А хорошие ученики всегда хотят знать больше того, что им дают преподаватели!)

Кроме того, книги серии будут полезны для преподавателей школ и профессоров университетов, которым нужно оживить сухой материал своего предмета на лекциях и семинарских занятиях.

Предварительная рассылка электронной версии книги коллегам и друзьям убедила автора, что даже школьники начальных классов находят в книге много такого, что стимулирует их интерес к различным наукам. В то же время автор получил несколько восторженных отзывов от студентов ВУЗов, нашедших в книге много нового для себя.

Возможно, книгами этой серии заинтересуются и родители учеников и студентов – ведь совсем недавно они сами были молодыми, и, возможно, жизнь еще не отбила у них былой любознательности.

---

[1] **Фалес** из Милета (625-545 до н. э.), первый древнегреческий философ. Ему приписывают изречение: «Познай самого себя».

Данная книга рассказывает, как развивалась одна из интереснейших ветвей математики – геометрия, как люди научились измерять расстояния, площади и объемы.

Здесь же читатель узнает и о биографиях великих ученых.

Хочется надеяться, что читатели получат от чтения книг этой серии такое же удовольствие, какое получил автор при написании этих книг.

Автор выражает глубокую признательность своему другу и коллеге Александру Бочкову, оказавшему большую помощь при подготовке книги к печати.

San Diego, California.

1. НОВАЯ ГЕОМЕТРИЯ

> Вдохновение есть расположение души к живейшему принятию впечатлений и соображению понятий, следственно, и объяснению оных. Вдохновение нужно в геометрии, как и в поэзии.
>
> ***Александр Пушкин***[2]

1.1. Куда кривая вывезет...

> Блох больших кусают блошки.
> Блошек тех – малютки крошки.
> Нет конца тем паразитам.
> Как говорят, ad infinitum[3].
>
> ***Джонатан Свифт***[4]

Еще со времен средней школы мы помним, что линия – имеет размерность 1, плоскость – размерность 2, а живем мы с вами в трехмерном пространстве. Это настолько очевидно, что…

Впрочем, в математике слово «очевидно» не пользуется большим спросом: то «что видно очам», еще не обязательно является правильным. Начнем с необычных кривых.

Пожалуй, эта интригующая история началась с того, что в 1890 году Джузеппе Пеано[5] разработал принцип построения на плоскости непрерывной кривой, которая оказалась... двумерной! Да,

---

[2] **Александр Сергеевич Пушкин** (1799-1937), величайший русский поэт.

[3] *Ad finitum* по латыни означает «до бесконечности».

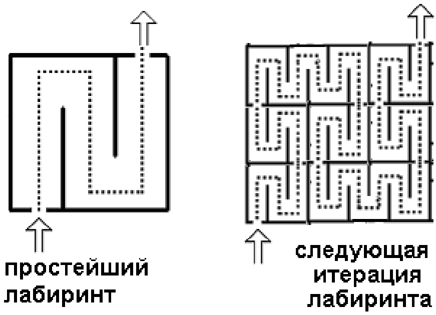
[4] **Джонатан Свифт** (1667-1745), англо-ирландский писатель, знаменитый своей книгой «Путешествия Гулливера». Один из крупнейших сатириков англоязычной литературы.

[5] **Джузеппе Пеано** (1858-1932), итальянский математик, один из основоположников символической логики. Занимался формально-логическим обоснованием математики. Внес важный вклад в арифметику, создав систему аксиом натурального ряда чисел.

да! Эта линия, к тому же, будучи бесконечной, целиком заполняла вполне ограниченный по размерам квадрат: она проходила через все его точки. Конечно, построить такую бесконечную кривую можно только за бесконечное время. Но разве это важно в математике? Главное, что в принципе можно и ясно как.

Метод построения, предложенный Пеано, заключался в следующем: квадрат расчерчивается на девять равных меньших квадратов, и в них строится *N*-образная кривая, пробегающая все квадраты.

Вот как выглядят первые итерации построения «Лабиринта Пеано».

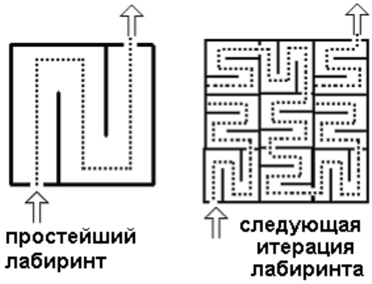


Построение «лабиринта Пеано».

Строится этот лабиринт следующим образом. В исходном квадрате проводится *N*-образная линия, как это показано на левом рисунке. Затем каждый малый квадрат в свою очередь развивается на девять меньших квадратов. «Выход» из «юго-западного» малого квадрата является входом в следующий (верхний) квадрат, где строится «зеркальная» *N*-образная линия в продолжение первой, и т.д. Затем подобное построение продолжается.

Помните древнегреческий миф про то, как герой Тесей убил Минотавра, жившего в Лабиринте, а потом нашел обратную дорогу по нити, которую ему дала влюбленная в него Ариадна, дочь критского царя Миноса? Хорошо, что Минотавр жил не в Лабиринте Пеано: тут бы Ариадне не хватило и всех ниток Греции!

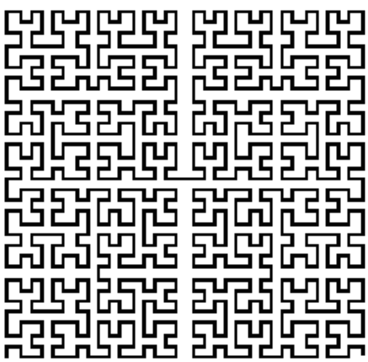
Кстати, возможно и несколько иное построение кривой Пеано, начинающееся также с первого *N*-образного фрагмента, но с иной ориентацией последующих фрагментов. Принцип построения другой конфигурации Лабиринта Пеано без лишних пояснений понятен из следующего рисунка:



Продолжение построения «лабиринта Пеано».

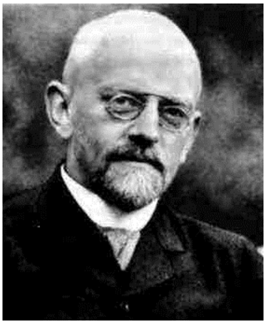
У обеих кривых Пеано, представленных выше, «вход» и «выход» лабиринтов расположены в противоположных углах исходного квадрата, поэтому эти кривые называют иногда *диагональными*.

Через год, в 1891 году Давид Гильберт построил свою знаменитую кривую – так называемый «Отель Гильберта», очень напоминающую «Лабиринт Пеано».



«Отель Гильберта».

Иногда эту кривую называют кривой Пеано-Гильберта. Это, возможно, справедливо, поскольку сама исходная идея принадлежит Пеано, однако давайте, как говорится, оставим Пеано Пеаново, а Гильберту Гильбертово.



Давид Гильберт
(1852-1943)

Немецкий математик, которого называют последним всесторонним математиком и самым замечательным учителем математиков 20 века. Он оставил заметный след во многих областях математики, создал новые направления математических исследований. Считается, что в геометрии он сделал величайший вклад со времен великого математика древности Евклида. В 1900 году на математическом конгрессе в Париже Давид Гилберт предложил список из 23 проблем (так называемые «Проблемы Гильберта»), которые необходимо решить в XX столетии, из коих решена 21 проблема.

И всё же: как строится «Отель Гильберта»? Исходный квадрат делится на четыре равных квадрата. В этих четырех квадратах строится простейший лабиринт и проводится путь, пробегающий все четыре «вложенных» квадрата:

После этого, каждый из четырех малых квадратов опять делится на четыре части. Лабиринт достраивается, как показано выше, а в новом лабиринте опять прокладывается путь.

Такое построение продолжается. Путь при каждом новом «расширенном» лабиринте проходит через все более и более мелкие квадратики, которые, в свою очередь, покрывают весь изначальный квадрат. На каждом шаге итеративного процесса начало и конец кривой Гильберта расположены у одной стенки «Отеля Гильберта» (в данном случае – у нижней). Продолжая процедуру до бесконечности, мы и получим кривую Гильберта, которая, как и обе версии кривой Пеано, будет пролегать через все точки плоскости, принадлежащие квадрату! А, как известно размерность квадрата равна 2...

Вот и получается, что бесконечная прямая, гордо раскинувшаяся от $-\infty$ до $+\infty$, одномерна, а скрюченная кривая и затиснутая в «ящик» – двумерна!

Говорят, что Давида Гильберта как-то спросили об одном из его бывших учеников.

- Ах, этот-то? - вспомнил Гильберт. - Он стал поэтом, для математика у него было слишком мало воображения.

Интересное – в некотором смысле «обратное» – построение было предложено Георгом Кантором. Он построил названное его именем Канторово бесконечное множество, состоящее из отдельных «изолированных» точек, которых «столько же», сколько и в любом отрезке действительной оси. («Столько же» написано в кавычках, поскольку на самом деле можно говорить только о том, что мощности множеств[6] эквивалентны.)

[6] Понятие *мощности* введено для характеризации множеств: множества бывают конечные (для них мощность соответствует числу элементов), счетные, как, например, множество всех натуральных чисел, и континуумы (отрезки числовой оси, сама бесконечная ось).

Георг Фердинанд Людвиг Филипп Кантор

(1845-1918)

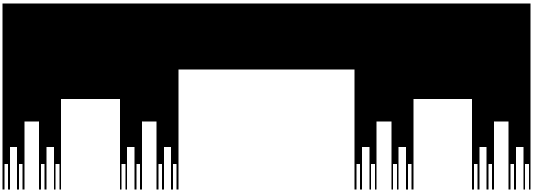
Немецкий математик, «отец» теории множеств. Разработал теорию бесконечных множеств; доказал несчетность множества всех действительных чисел; сформулировал общее понятие мощности множества. Он доказал существование трансцендентных чисел, развил теорию иррациональных чисел, сформулировал аксиому непрерывности, названную его именем. Созданная Кантором теория множеств привела к общему пересмотру логических основ математики и повлияла на всю современную структуру математики.

Давид Гильберт сказал о нем: «Никто не может выгнать нас из рая, который Кантор сотворил для нас».

Процедура построения Канторова множества, обозначаемого часто *K*, состоит в следующем. Возьмем отрезок, например, единичной длины. Разделив его на три равные части, исключим среднюю часть. С оставшимися двумя отрезками проделаем ту же процедуру и в результате получим 4 отрезка в 1/9 длины каждый и т.д.

Теперь предположим, что процедура эта повторена бесконечное число раз. Полученное множество и будет Канторовым множеством *K*. Между любыми двумя точками Канторова множества есть точки, не принадлежащие ему. Итак, повторение указанной операции до бесконечности ведет к образованию так называемой «*канторовой пыли*», длина которой в сумме равна 0.

По тому же принципу Кантор построил также «гребень Кантора», начальное построение которого приведено ниже.



Гребень Кантора.

По мере роста числа зубцов гребня, гребень превращается, по сути дела, в «метлу», длина которой неограниченно растет.

Кстати, такую «метлу Кантора» удобно использовать разве что для того, чтобы выметать «Канторову пыль»… Впрочем, бесконечно тонким прутиком невозможно попасть в бесконечно маленькую пылинку!

Но вернемся к построению бесконечных кривых, ограниченных некоторой областью на плоскости.

1.2. Снежинки, салфетки, пирамиды...

Если бы природа не была прекрасной,
ее не стоило бы познавать.

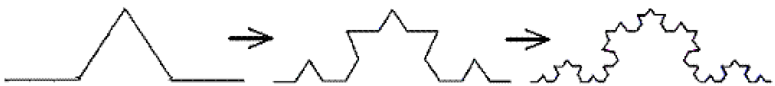
Анри Пуанкаре [7]

В самом начале двадцатого века веке шведский математик Нильс Кох[8], изучая работы Георга Кантора и Карла Вейерштрасса[9],

---

[7] **Жюль Анри Пуанкаре** (1854 - 1912), французский ученый широкого профиля, которого современники называли высшим авторитетом своего времени. Внес большой вклад во многие разделы математики, физики и механики. Сформулировал до А. Эйнштейна основные положения специальной теории относительности

натолкнулся на описания некоторых странных кривых с необычным поведением. Это его заинтересовало, и сам он построил следующую кривую: он взял отрезок прямой, разделил его на три равные части, затем на средней построил равносторонний треугольник, стороны которого равны трети длины большего отрезка, а затем продолжил эту процедуру с вновь полученными четырьмя «внешними» отрезками, и т.д.



Кривая Коха.

Заметим, что в пределе (т.е. при бесконечном числе шагов!) кривая Коха непрерывна и всюду недифференцируема. Вот такая получилась причудливая кривая!

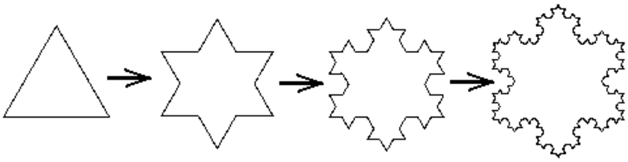
Кох же затем построил так называемую «*Снежинку Коха*», или «*Звезду Коха*». «Звезда» строится следующим образом. Берется равносторонний треугольник. Каждая из его сторон делится на три равные части, и на средней части строится новый равносторонний треугольник, в результате чего получается фигура, известная под названием «Звезды Давида[10]». Подобное построение продолжается, как это показано ниже.

---

[8] **Нильс Фабиан Хельге фон Кох** (1870-1924), шведский математик, специалист по теории чисел.

[9] **Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс** (1815-1897),- немецкий математик, работы которого имели огромное значение для развития математики.

[10] **Звезда Давида**, или точнее, **Щит Давида** - «Маген Давид», представляет собой гексаграмму, составленную из двух равносторонних треугольников. Маген Давид служит эмблемой иудаизма. Однако происхождение этого символа неизвестно даже евреям. Дело в том, что иудаизм запрещает изображения предметов и символов. Потому щит, или звезда Давида не упоминается ни разу ни в Библии, ни в талмудической литературе.



Снежинка Коха.

«*Снежинка Коха*» представляет собой линию бесконечной длины, которая ограничивает конечную площадь. Эта непрерывная кривая (опять же в пределе!) нигде не имеет производной.

У Коха, естественно, нашлись последователи: вскоре появился «*Крест Минковского*», названный так по имени предложившего его Германа Минковского[11].

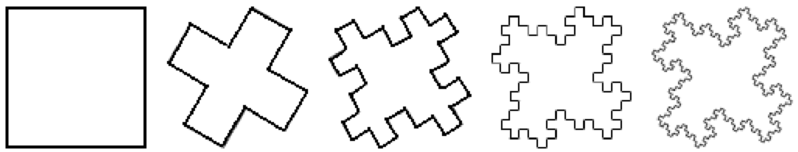
Герман Минковский

(1864-1909)

Литовский математик, впервые рассмотревший «пространственно-временной континуум», т.е. четырехмерное пространство, где четвертой координатой является время. В одной из его последних работ был сформулирован «принцип относительности». Когда Минковский преподавал в Цюрихе, одним из его слушателей был Альберт Эйнштейн, на которого работы его учителя оказали сильное влияние при создании теории относительности.

Это бесконечная всюду недифференцируемая кривая, построение которой понятно из следующего рисунка:

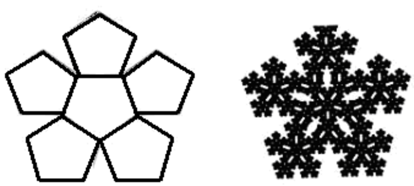
[11] **Герман Минковский** (1864-1909), литовский математик, впервые рассмотревший «пространственно-временной континуум». В одной из его последних работ был сформулирован «принцип относительности». Когда Минковский преподавал в Цюрихе, одним из его слушателей был Альберт Эйнштейн, на которого работы его учителя оказали сильное влияние при создании теории относительности.



Крест Минковского.

Есть и смешное название этой кривой – «*Колбаса Минковского*», название, безусловно придуманное кем-то из поздних остроcловов-математиков. Как видно из рисунка, если в снежинке Коха «генерирующим элементом» является равносторонний треугольник, то здесь эту роль выполняет квадрат.

Несколько более сложное построение так называемой «*Звезды Дюрера*», в основу которой положен «расширенный» пятиугольник. Имя великого немецкого графика XVI века Альбрехтам Дюрера эта фигура носит в честь того, что тот изобрел правило построения правильного пятиугольника. Описание построения Звезды Дюрера мы опускаем, ограничившись иллюстрацией.



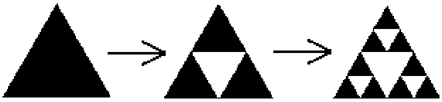
Звезда Дюрера.

Вскоре начались построения различных экзотических геометрических объектов не путем увеличения длин отдельных сегментов, а путем «изъятия» замкнутых подобластей из некоторой исходной области.

В 1915 году Вацлав Серпинский[12] предложил построение объекта, названного позже «*Салфеткой Серпинского*»:

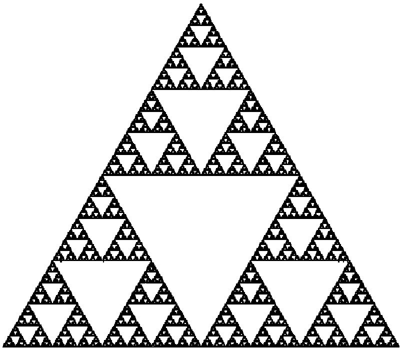
[12] **Вацлав Серпинский** (1882–1969), польский математик, действительный член и в последствии Вице-президент Польской Академии Наук. Основные труды по теории множеств и теории функций действительного переменного.

Три первых шага в построении этой фигуры ясно изображены ниже.



Построение салфетки Серпинского.

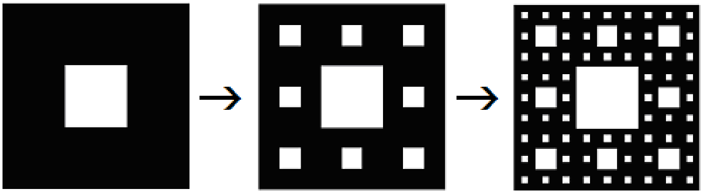
После пятого шага построения салфетки Серпинского» получается такая вот фигура:



Салфетка Серпинского.

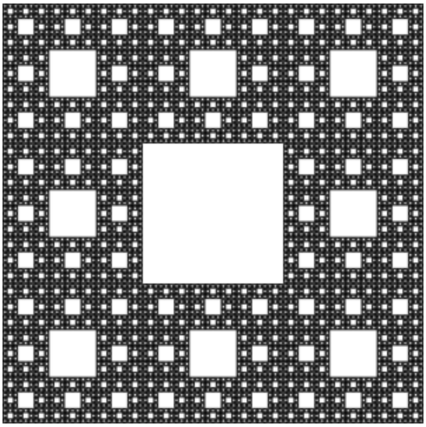
Число треугольных отверстий все меньшего и меньшего размера в нем бесконечно. Число черных треугольников в этом построении растет как 3n, где *n* – номер шага, а длина их стороны уменьшается как 2^{-n}. В пределе суммарная площадь всех белых «дыр» равна площади исходного треугольника, из которого они вырезались.

Аналогичным объектом является и «*Ковер Серпинского*». Чтобы построить его, возьмем квадрат, разделим его на девять квадратов, а средний вырежем. То же сделаем и с остальными, меньшими квадратами.



Построение ковра Серпинского.

Уже на пятом шаге процесса ковер Серпинского представляет собой весьма дырявый объект.



Ковер Серпинского.

В конце концов, образуется плоская сетка, не имеющая площади, но с бесконечными связями. Иногда этот объект называют «*Решетом Серпинского*».

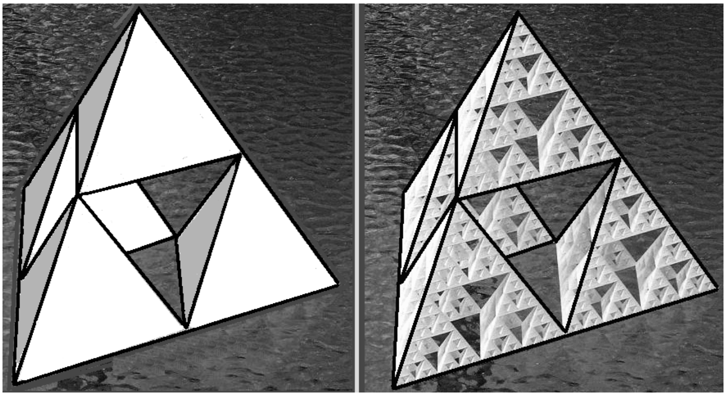
Кстати, еще у Мартина Гарднера[13] упоминается, что в 1905 году на ежегодной математической олимпиаде в Венгрии предлагалась задача: «Квадрат разделён на 9 частей (как для игры в «крестики-нолики») и центральный квадрат удалён. Затем каждый из оставшихся 8

[13] **Мартин Гарднер** (р. 1914) – известный американский популяризатор науки (можно сказать, «американский Перельман»). Любителям математики хорошо известен перевод его книги *«Математические головоломки и развлечения», Москва, Мир, 1971*.

квадратов разделён, в свою очередь, также на 9 частей, из каждой из которых опять удален центральный квадрат. Процедура повторяется бесконечно. Задача: найти предел, к которому стремится площадь полученной фигуры». Бедные школьники! Так шутить с ребятами нельзя...

Но на подобных плоских интригующих фигурах все еще не заканчивается. Оказывается, подобные же построения можно делать и в трехмерном пространстве!

Например, трехмерную версию «Салфетки Серпинского» – «*Пирамиду Серпинского*» можно получить, используя правильную пирамиду (тетраэдр) и вырезая в нем все меньшие и меньшие тетраэдры:



Построение пирамиды Серпинского.

По мере вырезания новых пирамид на следующих шагах, пирамида становится состоящей из одних только «дыр», хотя «каркас» ее продолжает существовать!

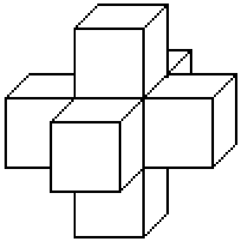
Посмотрите в Интернете сайт

http://fractals.nsu.ru/method.htm,

где приведен коротенький мультик, как такая пирамида строится пошагово (авторы А.Кравченко и Д. Мехонцев). Очень увлекательно!

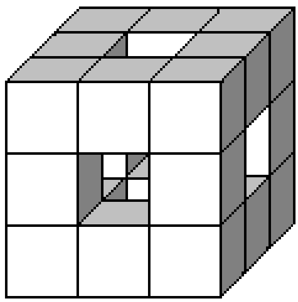
«Решето Серпинского» для трехмерного пространства переходит в «*Губку Серпинского*», которая строится по аналогии с

«Пирамидой Серпинского»: на первом шаге процесса из исходного куба вырезается «трехмерный крест» вот такого вида,



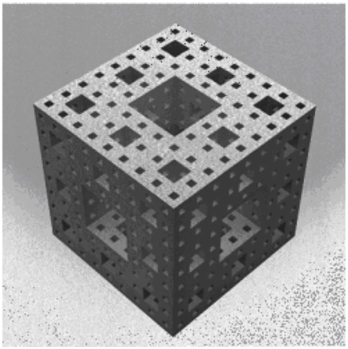
Трехмерный крест

при этом оставшаяся часть разбивается на 20 меньших кубов:



Губка Серпинского после первой итерации.

с каждым из которых повторяется та же процедура. «Губка Серпинского» после трех итераций имеет вид представленный ниже.



Губка Серпинского.

И в этом случае происходит нечто трудновообразимое: куб, в конце концов, становится совершенно дырявым! Грубо говоря, масса куба в процессе построения «Губки Серпинского» стремится к нулю, а куб остается в виде утоньшающегося (но все же связного!) каркаса.

1.3. Фрактальная геометрия

Нет столь великой вещи, которую не превзошла бы величиною ещё большая. Нет вещи столь малой, в которую не вместилась бы ещё меньшая.

***Козьма Прутков*.**

Но вот в мир диковинных построений уже напрямую вторглась математика. В начале прошлого века два математика – Пьер Фату[14] и Гастон Жюлиа[15] – одновременно и независимо занимались

[14] **Пьер Жозеф Луи Фату** (1878 - 1929), французский математик, работавший в области функций комплексного переменного. В 1905 году сформулировал рекуррентную процедуру, которую затем плодотворно развил Б. Мандельброт.

[15] **Гастон Жулиа** (1893-1978), французский математик, обнаруживший свойство самоподобности для границ множеств Фату и впервые построивший сами границы.

одной и той же проблемой: они изучали асимптотическое (предельное) поведение множеств порождаемых на комплексной площади определенными рекуррентными (последовательно применяемыми) процедурами.

Напомним, что комплексное число $z = a+bi$ состоит из реальной и мнимой части. Мнимая часть содержит так называемую «мнимую единицу»: $i = \sqrt{-1}$. Так же, как реальные числа отображаются на числовой прямой, комплексные числа отображаются на комплексной плоскости. На комплексной плоскости по оси абсцисс откладывается реальная часть, а по оси ординат – комплексная, т.е. каждому комплексному числу соответствует точка на этой плоскости.

Вернемся, однако, к рекуррентной процедуре, упоминавшейся выше. В общем виде она описывается уравнением вида

$$z_{n+1} = f(z_n).$$

Пусть $z_{n+1} = z_n^2 + c$,

где c – комплексный параметр. Напомним, как производится возведение в степень комплексного числа $z = a+bi$:

$$z^2=(a+bi)\cdot(a+bi)=a^2+abi+abi+(bi)^2=a^2+2abi-b^2=(a^2-b^2)+2abi.$$

Начнем с простейшего из возможных значений константы c, а именно $c = 0$. Тогда при каждой итерации вычисляется точный квадрат числа:

$$z_0 \Rightarrow z_0^2 \Rightarrow z_0^4 \Rightarrow \ldots .$$

Для этой последовательности, в зависимости от начально выбранной на комплексной плоскости точки z_0, имеются три возможности:

1. Если начальная точка z_0 находится на расстоянии, меньшем 1 от начала координат, то все последующие степени числа z_0 приближаются к своему *аттрактору*, т.е. точке притяжения, – нулю.

2. Если начальная точка z_0 лежит вне круга единичного радиуса с центром в начале координат, то все последующие степени числа z_0 разбегаются к бесконечности, становясь все больше и больше. В этом случае аттрактором для процесса является бесконечность.

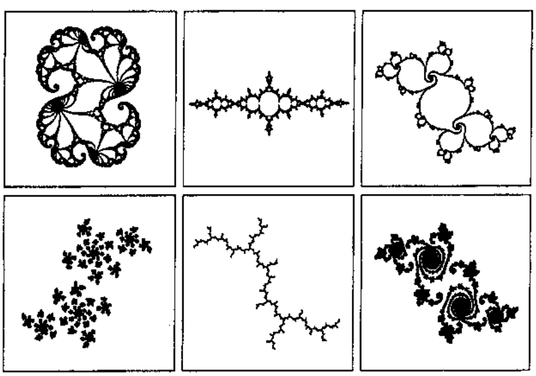
3. Если начальная точка z_0 лежит на упомянутой выше окружности, то все последующие степени числа z_0 будут лежать на самой этой окружности, т.е. она сама и будет аттрактором.

Иначе говоря, плоскость делится на две зоны влияния (притяжения), а границей между ними является окружность единичного радиуса.

Но если выбрать ненулевое значение параметра c, например,

$$c = -0{,}12 + 0{,}56i,$$

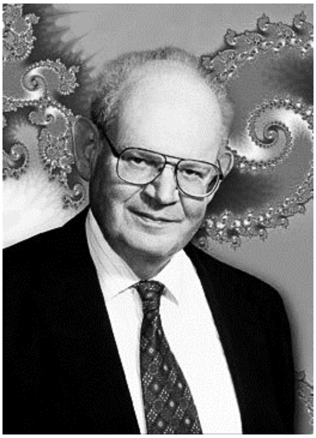
то для последовательности имеются все те же три возможности, но внутренний аттрактор уже не является нулем, а граница уже не является гладкой, она сильно изломана. Одной из характерных особенностей такой границы является ее самоподобие. Если взглянуть на любой из ее фрагментов, то можно увидеть, что практически одна и та же форма (во всяком случае, почти подобная) встречается в разных местах и имеет разные размеры. Наибольший интерес как раз представляет граница перехода функции от порядка к хаосу. Границы такого рода в математике называют множествами Фату-Жюлиа.



Множества Фату-Жюлиа.

Вот мы и подошли к понятию *фрактала*. Что это такое? Чтобы это лучше понять, вспомним сначала об их «родственниках». Жюлиа писал о возможных самоподобных свойствах границ таких множеств, даже строил простейшие геометрические фигуры, но не мог и предполагать, насколько удивительно эти границы выглядят. Посмотреть на эти границы удалось лишь почти через пятьдесят лет, когда появились компьютеры. Примеры таких границ приведены ниже.

Можно сказать, что кривые Пеано и Гильберта были родителями множеств Фату-Пеано, а те уже были непосредственными родителями фракталов Бенуа Мандельброта. Однако понадобилось около полувека, чтобы на свет появились фракталы Мандельброта: иначе и быть не могло, поскольку построение фракталов невозможно без современных вычислительных машин.



Бенуа Мандельброт
(1924-2010)

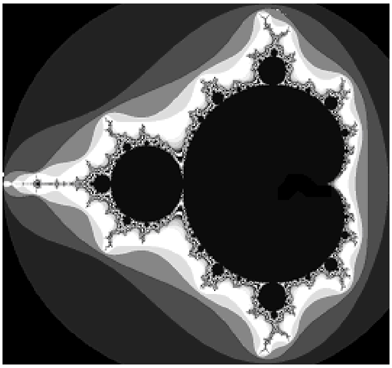
Американский математик, создатель нового направления в компьютерной графике – фрактальной геометрии. Родился в Варшаве (Польша), получил образование во Франции, где его дядя входил в известную группу математиков, работавших под общим псевдонимом Бурбаки. Был профессором Йельского Университета и сотрудником Исследовательского центра американской компьютерной компании IBM. Член Американской Академии Искусств и Национальной Академии наук США.

И всё же: что такое фрактал? Прежде всего – для нематематиков – это такие загадочные геометрические объекты, которыми вот уже около пятидесяти лет поражаются, восхищаются, изумляются... – какие еще есть подходящие слова? – и стар, и млад, особенно, если он, хоть немного, интересуется математикой.

Сам термин «*фрактал*» придумал Бенуа Мандельброт – «отец» фрактальной геометрии. Слово «фрактал» происходит от латинского прилагательного «*fractus*», что означает фрагментарный, состоящий из фрагментов. Мандельброт дал такое определение: «Фракталом называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому».

Мандельброт хорошо знал работы Жюлиа и Фату и успешно развил их идеи. Более того, незаслуженно забытое имя Густава Жюлиа всплыло из забвения именно благодаря публикациям Мандельброта.

Обратившись к работам Жюлиа, Мандельброт стал строить на компьютере свои замечательные фракталы. Фигура, представленная ниже, была его первым детищем и называется не иначе, как «*фрактал Мандельброта*». Она представлена на рисунке ниже.



Фрактал Мандельброта.

Но по-настоящему он заинтересовался тем, что позже будет названо им фракталом, ознакомившись с работой Льюиса Ричардсона[16], который заметил, что длина береговой линии западного побережья Британии сильно зависит от масштаба карты.

Представим себе вот такую кусочно-линейную аппроксимацию побережья Англии с уменьшающимся масштабом в отрезков: 200, 100 и 50 километров соответственно.

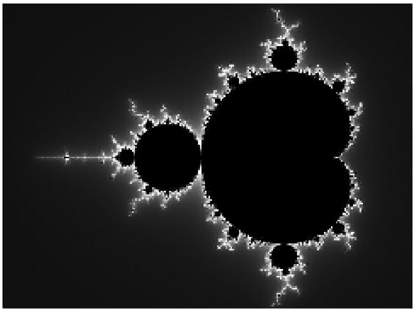
---

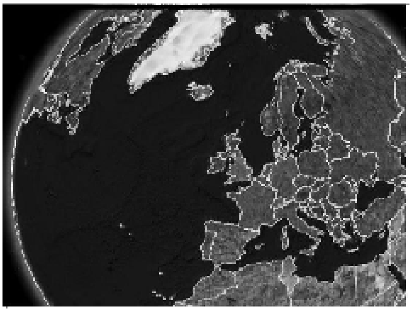
[16] **Льюис Фрай Ричардсон** (1881-1953) – английский математик и метеоролог, опубликовавший в 1922 году работы, в которой заметил отображение большого в малом в окружающей природе. В частности, он обсуждал и зависимость длины береговой линии Англии от масштаба.

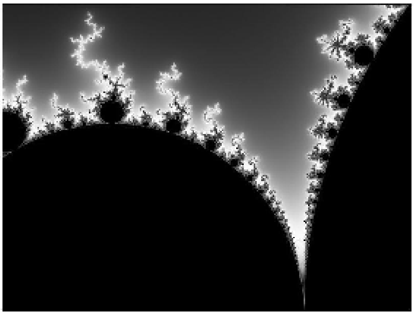
Эффект изменения масштаба контура.

Чем крупнее масштаб карты, тем больше видно на ней деталей: изгибов, небольших мысков и бухточек. На картах же с мелким масштабом, все эти детали сглаживаются, спрямляются, т.е. исчезают, становясь неразличимыми. Одним словом, длина береговой линии оказывается зависимой от того, по карте какого масштаба вы ее измеряете!

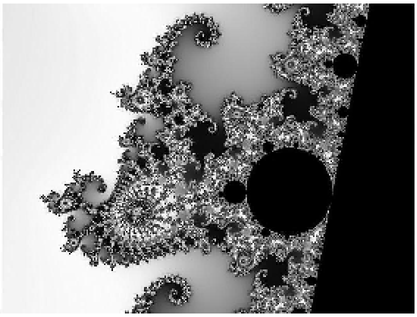
И вот, если мы будем шаг за шагом увеличивать изображение, то перед нами будут открываться изумительные по красоте орнаменты. Ниже дается подборка рисунков с постоянно увеличивающимся масштабом, причем мы решили «убить сразу двух зайцев»: показать изменение географической карты запада Британии (что так поразило Мандельброта) и одновременно изменение фрактала при укрупнении масштаба. Заодно будет убит и «третий заяц»: будет продемонстрирована несравненная красота фрактала Мандельброта. На каждом из последующих рисунков часть фрактала, которая представлена увеличенной на следующем рисунке, ограничена рамкой. Для случая географической карты все очевидно и без таких пояснений.



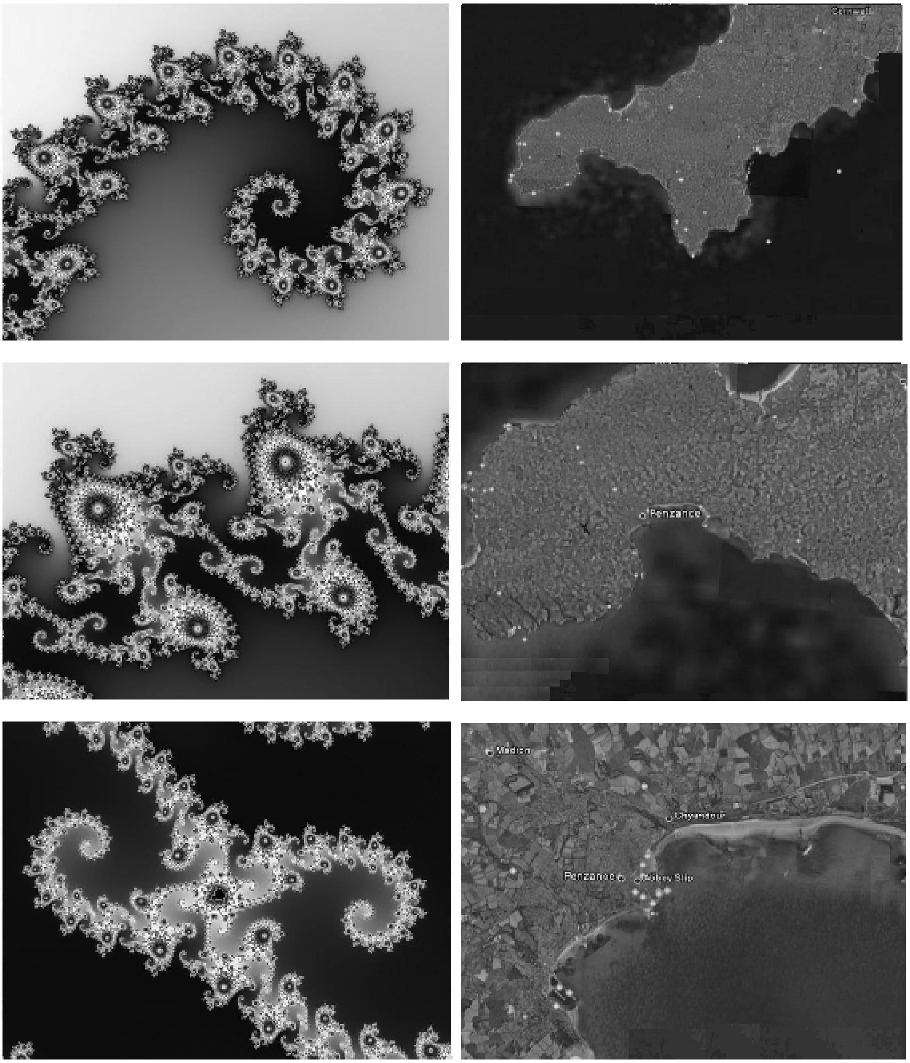





Douglas
Dublin
United Kingdom
Bristol Channel
London
English Channel
Guernsey
Saint Helier




Bristol Channel
Plymouth



Последовательное увеличение масштаба карты Великобритании и фрактала Мандельброта.

Понятия фрактала и фрактальной геометрии впервые было введено Мандельбротом в 1977 году в книге «Фрактальная геометрия природы», в которой он обобщил работы своих предшественников и сделал огромный рывок вперед. Поэтому Бенуа Мандельброта по праву считают отцом новой ветви математики – фрактальной геометрии.

Автору посчастливилось знать этого замечательного ученого: еще в 1969 году на Конференции ИФОРС[17] в Венеции Мандельброт делал сообщение о специальных свойствах береговых линий на секции, которой руководил автор. Затем с появлением Интернета началась электронная переписка. В частности, Бенуа Мандельброт, прочитав английский вариант раздела о фракталах, посоветовал использовать аналогию фракталов и береговой линии, рассматриваемой в разном масштабе.

Одна из интереснейших «вебсайтских историй» о фракталах опубликована в Интернете на прекрасном вебсайте «Арбуз», который ведет Евгений Семенович Скляревский

(http://www.arbuz.uz/index.php).

На том же «Арбузе» расположена Java-программа, позволяющая рисовать фракталы.

А тем, кто интересуется фракталами, можно порекомендовать найти в Интернате сайт

http://www.enchgallery.com/fractals/fracthumbs.htm,

на котором размещены десятки красивейших и необычнейших фракталов.

1.4. Хаос

Земля же была безвидна и пуста, и тьма носилась над бездною...

***Библия**, «Бытие».*

Казалось бы, что может быть общего между хаосом и аккуратнейшей из наук – математикой? Но именно математики нашли «математическую структуру» хаоса и дали строгое объяснение того, что же такое хаос.

[17] **ИФОРС** (IFORS) – Международная Федерация обществ по исследовани1 операций. Основана в 1959 году.

Начнем с известных всем вещей. Вы, наверняка, наблюдали так называемый «микрофонный эффект». Как только микрофон бывает поднесен близко к динамику, раздается омерзительный, режущий ухо резкий свист и скрежет. Происходит это из-за того, что незначительные шумы принимаются микрофоном, усиливаются в усилителе, практически мгновенно выходят через динамик, опять принимаются микрофоном... Это повторяется с огромной скоростью, усиливая начальный незначительный звук в тысячи раз. В результате этого лавинообразного процесса и возникает оглушительный шум. Такой процесс вызывается так называемой *положительной обратной связью*. (Иногда и положительное вызывает отрицательные эффекты!) Такая обратная связь с повторным воздействием (итерациями) лежат в основе известного «эффекта бабочки[18]».

Первым, кто постарался определить хаос с математических позиций, был все тот же Бенуа Мандельброт. Работая в американской компьютерной компании IBM[19], он пытался построить модель, объясняющую шумы в телефонных линиях, которые вызывали проблемы в компьютерных модемах. Факт, что сбои передачи, казалось, не следовали многим известным моделям, сделал бы «классического» математика беззащитным. Но Мандельброт, изучая хаотическое распределение случайных сигналов, решил поискать признаки самоподобия.

Например, незначительное ежедневное локальное изменение погоды отражает изменение погоды в регионе в тот же момент времени, а региональное изменение погоды в той или иной степени повторяет поведение погоды в большей зоне. В человеческой истории «Ренессанс» (или же наоборот – общий упадок цивилизации) составлен из меньших событий, не только составляющих глобальный процесс, но и напоминающий его. Иначе говоря, каждая, казалось бы, хаотическая система, внутри себя

---

[18] Имеется в виду философское изречение, утверждающее, что «даже такая мелочь, как взмах крыла бабочки, может вызвать тайфун на другом конце света».

[19] **IBM** (*International Business Machines*) – транснациональная корпорация, один из крупнейших в мире производителей и поставщиков аппаратного и программного обеспечения для больших ЭВМ.

содержит самоподобные части, которые, в свою очередь, состоят из более мелких частей, подобных им самим[20].

Большинство из нас воспринимают слово «хаос» как нечто характеризующее полную беспорядочность и непредсказуемость. Но на самом деле, это не совсем так. Можно даже сформулировать такой необычный вопрос: «Насколько хаотичен хаос?» Как ни странно это кажется с первого взгляда, хаос, в действительности, достаточно упорядочен и подчиняется определенным законам. Проблема состоит в том, что очень сложно отыскать эти законы. В последние десятилетия развилась новая и очень интересная Теория Хаоса, целью которой является предсказание закономерностей в так называемых динамических системах, поведение которых может казаться непредсказуемыми и абсолютно хаотическими.

Динамическая система – это такая система, состояние которой меняется во времени в соответствии с фиксированными математическими правилами, которые обычно задаются уравнениями, связывающими будущее состояние системы с текущим. Такая система детерминирована, если эти правила не включают явным образом элемента случайности. Однако, если поведение системы очень сложное, то оно начинает приобретать черты случайности, а порой становится как бы совершенно непредсказуемым.

Вплоть до 1960-х годов многим специалистам в механике казалось совершенно естественным, что динамическая система, описываемая простыми детерминистическими уравнениями, должна вести себя относительно просто. Однако вскоре математики и естествоиспытатели обнаружили, что хаос вездесущ.

Для изучения хаоса используют общие математические принципы и компьютерное моделирование.

Одной из важнейших черт всякой динамической системы является *итеративность*, т.е. повторяемость поведения в соответствии с определенным алгоритмом. Это означает, что одно и то же математическое правило изменения применяется к каждому текущему

[20] Вот и появились те самые свифтовские кусающие друг дружку блошки!

состоянию системы, или, что то же самое, этот алгоритм многократно применяется к некоторому исходному состоянию.

Состояние обычно описывается числом или набором чисел (так называемые *фазовые координаты*), но это может быть также некоторая геометрическая фигура или совокупность точек (конфигурация).

Например, координаты системы могут от шага к шагу меняться по правилу: «возвести в квадрат начальное значение». Применяя это правило к начальному числу 1/3, получаем последовательность 1/3 →1/9→ 1/81 →..., которая следует очевидной закономерности, причем процесс «притягивается» к нулю.

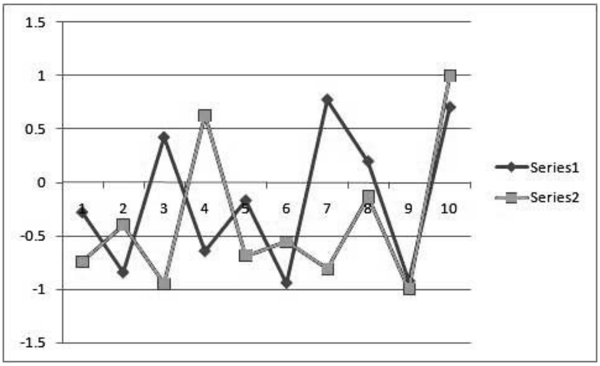
То же правило, примененное к числу, большему единицы, приводит к последовательности, уходящей в бесконечность: например, 1.2→ 1.44→ 2.0736→ 4.018…

Если правило: «возвести в квадрат и вычесть единицу» применить к 0, то получим последовательность –1, 0, –1, 0,..., представляющую собой регулярные скачки от 0 к –1 и обратно.

Однако если то же правило, казалось бы, слегка изменить: «возвести в квадрат, удвоить и затем вычесть единицу», и начать применять это правило, скажем, к значению 0.4, то будет порождена последовательность, представленная в столбце *A* таблицы, представленной ниже. В столбце *B* стоят числа аналогичной последовательности, в которой произведено возведение не во вторую, а в четвертую степень.

A	**B**
-0.28	-0.7408
-0.8432	-0.39767
0.421972	-0.94998
-0.64388	0.62889
-0.17084	-0.68716
-0.94163	-0.55409
0.773322	-0.81149
0.196052	-0.13273
-0.92313	-0.99938
0.704327	0.995038

Кажется, что какую-либо очевидную закономерность усмотреть в этой последовательности чисел не удается. Во всяком случае, получилось нечто неплохо имитирующее случайное распределение точек на интервале [–1, 1].



Имитация случайной последовательности.

Одним из основных понятий теории хаоса является *аттрактор*, т.е. некая область в пространстве состояний, к которой, в конце концов, приходит в пределе система. В первом из рассмотренных выше случаев, аттрактором являются либо 0, либо бесконечность; во втором – пара чисел (–1, 0); а в третьем – весь интервал чисел между –1 и 1. В третьем случае, говорят о хаотическом аттракторе, скрытая структура которого часто становится явной лишь после графического представления. Действительно, из графиков, построенных для двух последних последовательностей, можно заметить нечто специфическое в некоторой периодичности.

Если в качестве начальной точки процесса выбрать комплексное число, то в случае хаотического аттрактора движущаяся точка формирует сложную конфигурацию с очень замысловатой структурой, которая называется *фрактал*.

Истоки самого понятия хаоса в математическом смысле можно проследить, начиная с последнего десятилетия XIX века, когда появились работы французского математика Анри Пуанкаре с анализом движения небесных тел в Солнечной системе.

Жюль Анри Пуанкаре

(1854-1912)

Французский математик, физик, астроном и философ. Им и Гильбертом замыкается шеренга великих математиков, снискавших славу универсалистов. В астрономии работы Пуанкаре относятся к небесной механике и космогонии. В труде «О динамике электрона» независимо от Альберта Эйнштейна развил математические следствия «постулата относительности». Член Французской Академии, почетный член Петербургской Академии наук.

Теория хаоса находит широкие приложения в различных науках. Пожалуй, одним из наиболее ранних стало ее применение к анализу турбулентности в жидкости[21]. Работы в области метеорологии показали, что поведение атмосферы также хаотично.

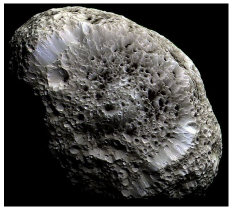
Кстати, интригующая история произошла с открытием одной из величайших теорий современной науки – теории относительности. В июне 1905 года так называемая специальная теория относительности была опубликована в двух независимых статьях, написанных практически одновременно Анри Пуанкаре и Альбертом Эйнштейном. Пуанкаре отослал свою статью «О динамике электрона» в Парижскую Академию наук 5 июня, а Эйнштейн представил статью «Об электродинамике движущихся тел» 30 июня в авторитетнейший журнал *Анналы физики.* В июле Пуанкаре опубликовал более детальную статью, а в сентябре вышла статья Эйнштейна «Зависит ли инерция тела от его энергетического содержания?». Так что не забывайте об Анри Пуанкаре, когда вы говорите о теории относительности!

[21] Движение жидкости бывает либо ламинарным (гладким и регулярным), как в полноводной спокойной реке, либо турбулентным (беспорядочным и нерегулярным), как в горном ручье.

Это означает, что долгосрочные прогнозы погоды на основе данных о ее прошлом состоянии подвержены «эффекту бабочки», а в силу этого погода не может быть предсказана достаточно достоверно более чем на три-четыре дня вперед, причем это не зависит от мощности используемых компьютеров и объемов накопленной предварительной информации.

Пуанкаре заметил, что движение объектов Солнечной системы тоже хаотично, хотя процесс изменений столь медленен в реальном времени, что непредсказуемыми являются лишь те изменения, которые произойдут через десятки миллионов лет. Один из примеров проявления хаоса в Солнечной системе: спутник Сатурна Гиперион обращается по регулярной, предсказуемой орбите вокруг своей планеты, но при этом он хаотически кувыркается, изменяя направление оси собственного вращения.

Кстати, Гиперион не только хаотически кувыркается во время своего движения по орбите, но он имеет и весьма импозантную «внешность». С такими аэродинамическими данными только и остается, что кувыркаться!



Хаос мы находим также в биологии и экологии. Популяции животных редко бывают стабильными – им свойственны нерегулярно чередующиеся периоды быстрого роста и почти полного вымирания. Теория хаоса показывает, что даже относительно простые законы изменения численности популяций могут объяснить эти флуктуации без введения случайных внешних воздействий. Теория хаоса также объясняет динамику эпидемий, т.е. спонтанное случайное изменение размеров популяций микроорганизмов.

Какой же смысл в теории хаоса, если хаотические системы все равно непредсказуемы? Во-первых, теория хаоса предлагает новые методы анализа данных и обнаружения скрытых закономерностей там, где прежде систему считали «хаотической» и никаких закономерностей в ее поведении не искали, полагая, что их просто не существует. Кроме того, теория хаоса помогает найти «предсказуемые компоненты» в хаотических системах.

Методы теории хаоса, хорошо зарекомендовавшие себя вначале в физике, химии, молекулярной биологии, позднее нашли применение в традиционно гуманитарных областях: психологии, социологии, экономике, где требуется проанализировать поведение большого числа объектов (людей, результатов их деятельности и т. д.), включенных в изучаемый процесс и ведущих себя хаотично, но образующих единое сообщество.

1.5. Самоподобие

Сын моего отца, но мне
не брат...
Загадка-шутка

Вы, конечно, слышали шутливый вопрос, который вынесен в эпиграф? И спрашивающий сам отвечает на вопрос: «Это я сам!»

К чему эти шутки? Да просто сейчас мы поговорим о самоподобии. А кто подобен кому-либо больше, чем самому себе?

Идея самоподобия малого (части большого) в большом (целом) известна всем нам с детских времен. Кто из вас ни помнит стишок о попе и его собаке?

У попа была собака,
он ее любил,
она съела кусок мяса,
он ее убил,
и в землю закопал,
и надпись написал,
что
у попа была собака,
он ее любил.
она съела кусок мяса,
он ее убил.
и в землю закопал,
и надпись написал,
что...

Известен и такой фольклорный стишок:

Жил был царь
И царя был двор,
На дворе был кол,
На колу – мочало.
Не начать ли сказку сначала?
Жил был царь
И царя был двор,
На дворе был кол,
На колу – мочало.
Не начать ли сказку сначала?
Жил был царь...

Сходство есть. Но в чем различие? Чем второй стих отличается от первого? Во втором идет обычный повтор, а в «попе и собаке» содержится бесконечная цепочка типа: «*А* содержит *А*, которое само содержит *А*, которое, в свою очередь, опять содержит *А*», и т.д.

Менее известна в России «самоподобная притча» Чжуан Цзы[22] о философе и бабочке, звучащая примерно так: «Притча о философе, которому снится, что он бабочка, которой снится, что она философ, которому снится, что он бабочка, которой снится, что она философ, которому снится…»

Может показаться, что все это шутки изобретательных виршеплетов. Но не торопитесь. И очень серьезных людей мучило это самоподобие вещей и явлений. Великий немецкий философ и математик Готфрид Лейбниц, например, предположил, что внутри капли воды могут умещаться целые вселенные со своими планетами, на которых предаются важным размышлениям философы, такие же, как и на нашей Земле.

Русский поэт Брюсов[23] в стихотворении «Мир электрона» (1922 г.) облек эту же мысль в поэтическую форму:

Быть может, эти электроны –
Миры, где пять материков,
Искусства, знанья, войны, троны

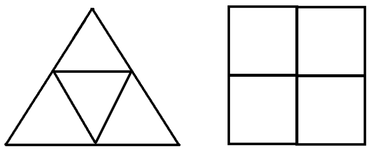
---

[22] **Чжуан Цзы** (369-286м до н.э.), один из крупнейших китайских философов.

[23] **Валерий Яковлевич Брюсов** (1873-1924) - один из самых знаменитых русских поэтов своего времени. Считается главой символистской школы в поэзии.

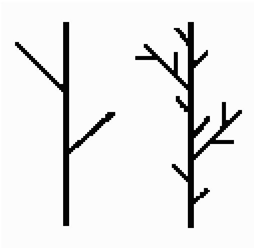
И память сорока веков!
Ещё, быть может, каждый атом –
Вселенная, где сто планет;
Там всё, что здесь, в объеме сжатом...

Но рассуждения Лейбница и Брюсова – это шутки гениев. (Хотя, кто знает... Во всякой шутке есть доля шутки!) А вот в геометрии самоподобие наблюдается безо всяких сомнений! Самоподобной геометрической фигурой называют фигуру, которую можно разрезать на конечное число одинаковых фигур, подобных ей самой. Самоподобными, например, являются правильный треугольник и квадрат.



Простейшие самоподобные фигуры.

Однако существуют самоподобные фигуры и более причудливых очертаний. Например, «ветка», построение которой понятно из рисунка.



Аналогичное свойство самоподобия обнаруживают и многие объекты в природе: коралловые рифы, ветвление деревьев, рельефы гор, формы облаков, трещины на поверхности иссохшей почвы. Самоподобие здесь не столь «прямолинейно», но, тем не менее, какое-то неуловимое сходство в каждой группе объектов, безусловно, есть. Многие из этих объектов именно таковы, что, приближаясь к ним, и наблюдая все более и более мелкие детали, мы начинаем находить их удивительное сходство с изначальным целым объектом. Напомним, что объекты, обладающие таким свойством, Бенуа Мандельброт и предложил называть фракталами.

Итак, оказывается, что математические объекты, начиная с кривой Пеано и завершая губкой Серпинского, которые мы рассматривали в предыдущем эссе, – всё это фракталы! Но если так можно выразиться, это были «первобытные» фракталы, некие «*fractus erectus*», а сейчас мы перейдем с вами к компьютерным, чисто математическим фракталам, своеобразным «*fractus sapiens*».

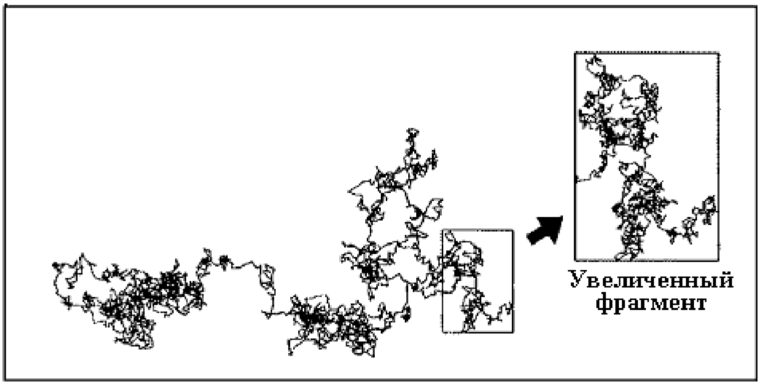
1.6. Фракталы, фракталы, кругом одни фракталы...

Несть им числа, и имя им – легион.

Евангелие от Марка.

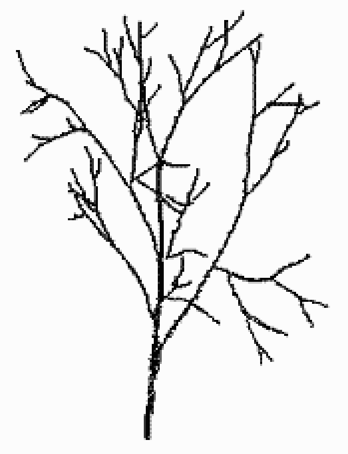
Рассмотренные выше примеры фракталов относятся к так называемым *детерминистическим*: они все построены по вполне определенному регулярному геометрическому правилу. Но существуют еще и *случайные фракталы*.

Простейшим случайным фракталом является траектория частицы, совершающей броуновское движение.



Броуновское движение.

Сама броуновская траектория имеет очень сложный и непредсказуемый характер – это случайное блуждание некоторой маленькой частички в жидкости под влиянием сталкивающихся с ней молекул. У траекторий такого типа наблюдается интересное свойство: если взять какой либо фрагмент траектории и увеличить масштаб, то выделенный фрагмент будет иметь удивительное сходство с траекторией в целом.



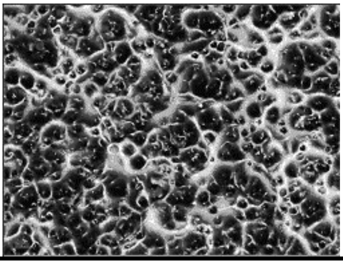
Примером фрактала «случайного, но не очень», может служить та же «ветка», при построении которой был внесен некоторый «шум».

Все эти фигуры обладают следующими свойствами:

1. каждый уровень подобен целому (если и не полностью, то, во всяком случае, хотя бы в некотором смысле).
2. любой фрагмент целого допускает бесконечное увеличение, при котором «типические свойства» объекта сохраняются.

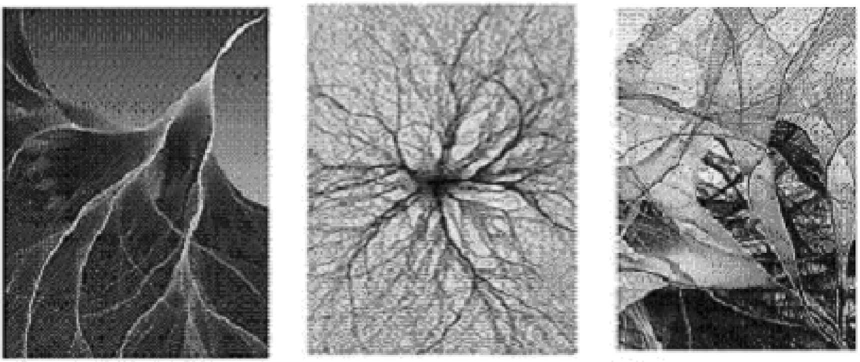
Фракталы находят все большее и большее применение в науке: реальный мир иногда с их помощью описывается даже лучше, чем методами традиционной физики или математики.

И это тоже фрактал?.. Красиво, не правда ли? Но, увы! Это легкие курильщика... Такая красота уж точно не спасет мир!



Фракталы завоевывают позиции не только в математике и инженерном деле. Естественно дошло и до искусства. Так, в

США довольно долго путешествовала по городам и весям выставка картин современного американского «передвижника» – профессора химии и физики Гарвардского университета Эрика Хеллера. Название выставки было весьма своеобразным – «Приближаясь к Хаосу». Автор вовсю использовал в своем художественно творчестве достижения современной фрактальной графики. Некоторые «картинки с выставки» представлены ниже.



Фрактальная абстрактная живопись.

Такая чисто математическая абстрактная живопись по-своему прекрасна, но после работ Мандельброта не неожиданна. А вот в то же самое время, при создании фантастических фильмов различные необычные горные пейзажи, водопады и фантасмагорическая растительность сейчас начинают создавать искусственно с помощью компьютерной графики. И это представляется гораздо более удивительным, поскольку человека всегда интриговали и интригуют попытки синтезировать «искусственный интеллект».

Пример трехмерного пейзажа, синтезированного Мартином Мерфи в пакете *Bryce*

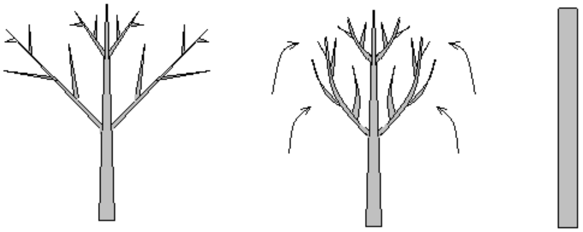
http://www.daz3d.com/i.x/software/bryce/,

существенно основанного на фрактальной идеологии, представлен ниже. Реалистичность облаков, гор, деревьев, света и тени поразительна!

Нелишним будет сказать, что в создании программы *Bryce* принимал активное участие родоначальник фрактальной геометрии – Бенуа Мандельброт и его ученики.

Интуитивно роль фрактальности в природе давно уже чувствовали многие замечательные художники.

Леонардо да Винчи даже сформулировал правило, которое на современном языке можно понять в рамках фрактальной идеологии: все ветки деревьев на данном удалении от ствола, будучи сложенными в пучок, совпадают по толщине с основным стволом, из которого они растут.



«Суммарная масса веток» у дерева.

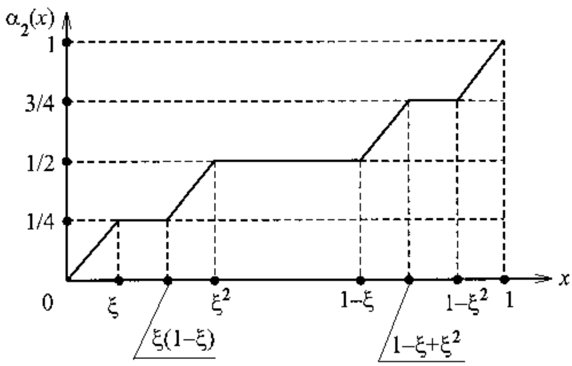
Понятно, что это наблюдение укладывается в определение размерности ветвления.

Естественно, все сказанное о живописи можно перенести и на музыку, на имитацию звуков реальной жизни.

В качестве примера «фрактальной музыки» может быть приведен фортепианный этюд Дьердя Лигети[24] «Чертова лестница». Однако сам он писал, что «...прямое перенесение положений фрактальной геометрии в музыку я считаю ребячеством. Я пытался найти аналогии фрактальным фигурам в музыкальных композициях, но без привлечения математики...».

И все же заметим, что само название этюда «Чертова лестница» – это название одной из весьма специфических функций, связанных с так называемым «канторовым множеством».

Вот как выглядит Канторова «чертова лестница» второго порядка:



Канторова «чертова лестница».

Ноты начальной части этюда Дьердя Лигети представлены ниже.

24 **Дьердь Лигети** (1923-2006) – современный венгерский композитор.

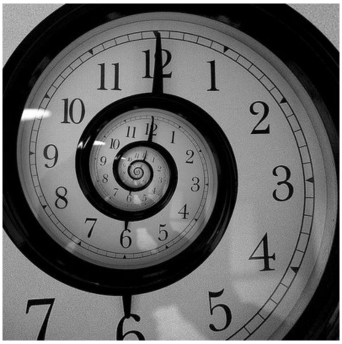
Начало этюда Лигети «Чертова лестница».

Сам этюд вы можете послушать «вживую» в Интернете на сайте http://www.youtube.com/watch?v=0OxiM9ramHM.

Таким образом, концепция фракталов становится не только частью математики и физики, но и элементом общечеловеческой культуры. И если раньше величайшие ученые посвящали свое свободное время искусству, то теперь, наоборот, композиторы и художники начали «играть на компьютерах»...

В заключение хотелось бы поместить вот такие смешные настенные часы, которые находятся на сайте Патрика Хоффа.

http://www.flickr.com/photos/patrickhoff/380789609/



Часы Хоффа.

2. НЕОБЫЧНЫЕ И НЕВОЗМОЖНЫЕ ФИГУРЫ

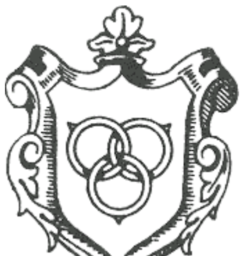
Геометрия – это искусство хорошо
рассуждать на плохо выполненных чертежах.
Нильс Абель[25]

2.1. Кольца Борромео

Воображение оказывается одною из тех
способностей или свойств, посредством
которых мы обсуждаем,
добиваемся истины или заблуждаемся.
Аристотель

Одним из первых невозможных объектов, имеющих древнюю историю, являются так называемые кольца Борромео.

Когда-то давным-давно в Италии был знатный род Борромео. Один из представителей этого рода был весьма известным человеком: Карло Борромео, живший в середине XVI века, дослужился до кардинала и даже за особые заслуги перед католической церковью был в 1610 году причислен к лику святых. (Правда, если учесть, что он был племянником папы Пия IV... Но не будем делать необоснованных догадок.)



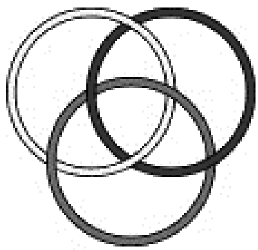
Геральдический знак Борромео.

Семейство Борромео до сих пор владеет на севере Италии на одном из больших озер тремя островами, где располагается великолепный средневековый дворец, украшенный вот таким

[25] **Нильс Хенрик Абель** (1802-1829), знаменитый норвежский математик, умерший очень рано от скоротечной чахотки. Французский математик Шарль Эрмит (1822-1901) сказал о нем: «Абель оставил математикам столь богатое наследие, что им будет чем заниматься в ближайшие 150 лет».

геральдическим знаком

Три кольца посередине – это классическая головоломка: ни одно кольцо из трех не зацеплено с другим кольцом, но расцепить их невозможно! Более отчетливо пересечение колец видно на этом рисунке.

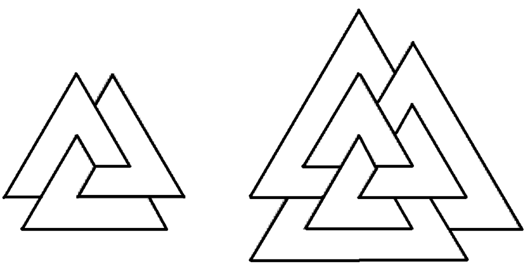


Кольца Борромео.

В предположении, что все кольца плоские, построение такой фигуры на плоскости невозможно. Для создания же этой фигуры в трехмерном пространстве необходимы либо разрывы, либо искривления колец.

Нужно заметить, что фигура, называемая сейчас кольцами Борромео, была известна еще скандинавским викингам. Он был известен как магический «символ Валькнута» скандинавского мифологического бога Одина, которого можно приравнять в римской мифологии к Меркурию (а в греческой – к Гермесу).

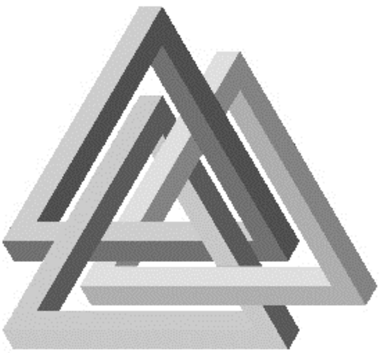
Было два типа изображения символа Валькнута: и двух треугольников и из трех треугольников:



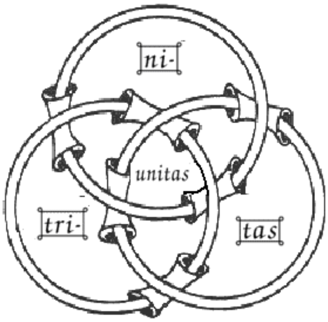
Символ Валькнута.

Вот такая выбитая на камне картинка, которую археологи отнесли к IX веку, была найдена на Готланде – самом большом шведском острове в Балтийском море.

Много позже был нарисован вот такой «трехмерный» (если только можно говорить о размерности несуществующих фигур!) символ Одина:

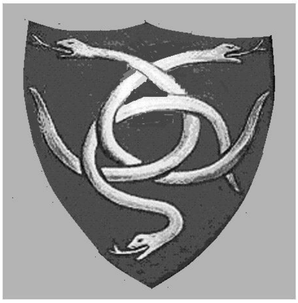


Кольца Борромео часто служат символом единства. В христианстве он иногда используется для обозначения Святой Троицы. Вот такой символ был найден в одном из манускриптов, относящихся к XIII веку.



Кольца Борромео, символизирующие Святую Троицу.

Изображались и «разомкнутые» кольца Борромео, которые, несмотря на свою простоту, также являются невозможными плоскими фигурами. Вот такой геральдический щит изображен на одном из храмов Уэллса XI века.



Можно, конечно, обойтись и без этих омерзительных змей: вот более мирный «сельскохозяйственный» герб, на котором невозможны образом сплетены три серпа

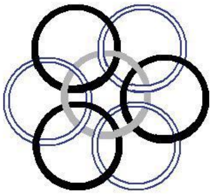
А вот такой элегантный фамильный герб имеет японское происхождение:

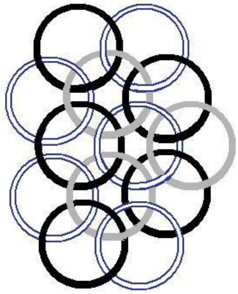
Во все времена и у всех народов кольца Борромео служили символом «силы в единстве».

В наши дни кольца Борромео часто встречаются в различных логотипах. Например, такой логотип изображен на пиве Баллантайн, которое можно найти во многих магазинах и ресторанах США.

Налюбовавшись на кольца Борромео, мне и самому захотелось внести «свой вклад». В результате удалось построить некие обобщения:

гексаэдр Борромео и «кольчугу» Борромео.



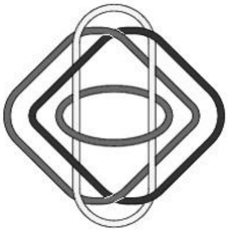


Гексаэдр Борромео. **«Кольчуга» Борромео.**

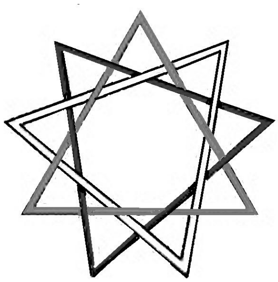
Естественно, что эти фигуры обладают свойствами, подобными свойствам традиционных колец Борромео: если из каждой из фигур удалить кольца любого одного типа, вся конструкция «рассыплется» на несвязанные кольца.

Кольца Борромео в топологии – одной из самых абстрактных ветвей математики – относятся к так называемым Брунниановым соединениям. Эти соединения названы так в честь немецкого математика Германа Брунна, который впервые описал такие математические объекты в 1892 году. Изучения подобных объектов привело даже к созданию отдельной ветви в топологии – теории узлов. (Завязывая узелок на память, следите, чтобы у него не было Брунниановых соединений с другими такими же узелками! ☺)

При таком соединении кольца (не обязательно круглые) сцеплены нетривиальным образом так, что при размыкании одного из них, все остальные становятся не соединенными между собой. Кольца Борромео являются простейшими объектами подобного типа. На рисунке справа приводится пример более сложного Бруннианова соединения.



Ну, а на «закуску" вот эта симпатичная девятиугольная «Звезда Борромео», до которой додумались уже намного позже...



Так что не все так просто даже в «плоском мире”! Чего же нам ожидать в нашем трехмерном пространстве, в котором мы живем?

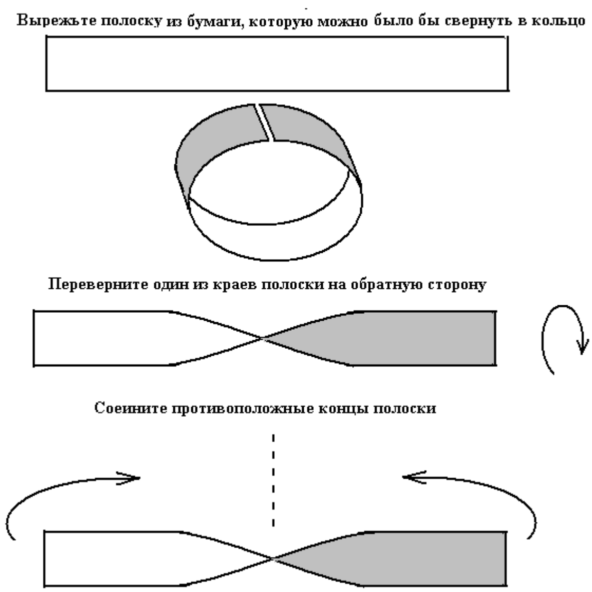
2.2. Лента Мёбиуса

Всякий знает, что такое кривая, пока не выучится математике настолько, что вконец запутается в бесконечных исключениях.

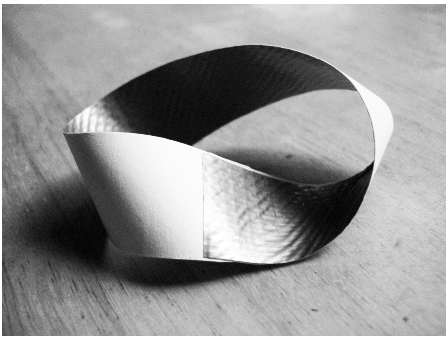
Феликс Клейн

Пожалуй, самую первую необычную фигуру придумал в середине XIX столетия Август Мёбиус. Это был так называемый «лист Мёбиуса», или «лента Мёбиуса» – весьма простая и в то же время весьма странная конструкция.

Эту фигуру очень легко можно склеить из прямоугольной полоски бумаги. Посмотрите на чертеж, как это просто делается…



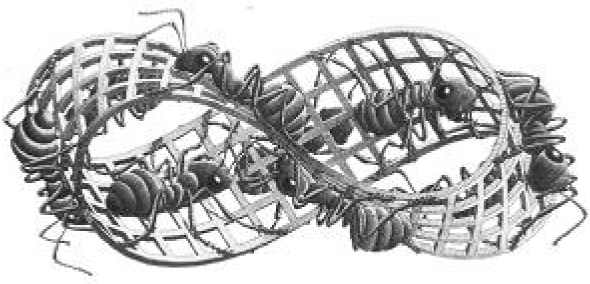
В результате получается вот такая фигура.



Лента Мёбиуса.

Легко убедиться, что у этой фигуры всего одна поверхность!

Представьте себе что, например, по ленте Мёбиуса бежит муравей. Впрочем, поступим проще: посмотрим на ленту Мёбиуса, изображенную на хорошо известном рисунке Эшера[26]. Сделав круг, муравей прибегает к тому же месту, откуда он начал движение, но при этом оказывается с противоположной стороны плоской ленты! Естественно, пробежав еще один круг, он вернется в точку старта.



Мауриц Эшер: «Муравьи».

[26] **Мауриц Корнелиус Эшер** (1898-1972), современный голландский художник, положивший начало новому направлению в графике с использованием невозможных фигур. (*Подробнее см. ниже.*)

Август Фердинанд Мёбиус

(1790 – 1868)

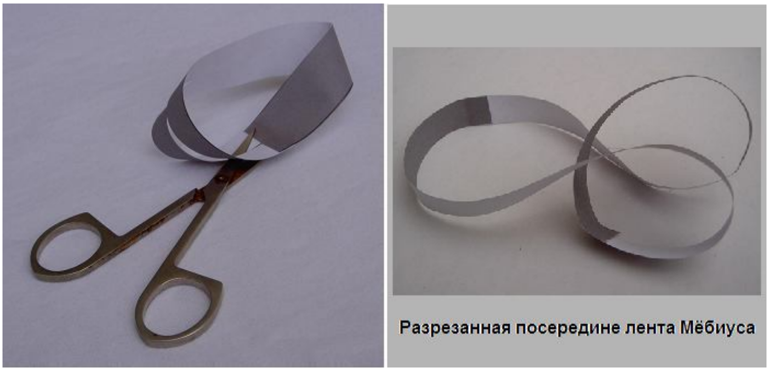
Немецкий геометр и астроном, профессор Лейпцигского университета. Основные труды по геометрии. Впервые ввел в проективную геометрию систему координат и аналитические методы исследования, получил новую классификацию кривых и поверхностей, установил общее понятие проективного преобразования, исследовал коррелятивные преобразования. Впервые установил существование односторонних поверхностей.

Ходит молва, что Мёбиусу пришла в голову идея об этой необычной геометрической фигуре, когда он увидел горничную, неправильно повязавшую свой шейный платок. Ну, что же, может быть, может быть! Ведь Исаак Ньютон тоже тянул с открытием всемирного закона тяготения, пока ему на голову не свалилось яблоко.

Справедливости ради, надо заметить, что сама фигура, называемая всеми лентой Мёбиуса, одновременно и независимо в том же 1858 году была построена и другим немецкими математиком Иоганном Бенедиктом Листингом (1808-1882), который, кстати, пустил в математический обиход и термин «топология».

Лента Мёбиуса сразу же привлекла внимание математиков. Одной из любопытных задач является следующая: какой длины (при заданной ширине) должна быть полосочка, чтобы ее можно было свернуть в лист Мёбиуса? Очень важный практический вопрос, не правда ли ☺?

Но дело не ограничивается простой «классической» лентой Мёбиуса. Склейте ленту Мёбиуса из широкой полоски бумаги и попробуйте разрезать ее вдоль по средней линии. Начальная фаза разрезания показана на левом рисунке. А когда вы разрежете это кольцо до конца, то ... увидите опять ленту Мёбиуса, правда, более «завинченную» (правый рисунок). Но муравей, начавши ползти, опять пробежит по обеим сторонам полоски и вернется в точку старта.



Разрезанная лента Мёбиуса.

Кстати, фокусники, разрезающие на удивление зрителей ленту Мёбиуса, называют получившуюся в результате фигуру почему-то «афганской лентой».

Но не думайте, что на этом чудеса с лентой Мёбиуса закончились. А что получится, если полоску повернуть несколько раз перед склеиванием? Вот какие причудливые ленты фигуры получаются в результате (исключая, конечно, первое простор кольцо, стоящее в левом верхнем углу).

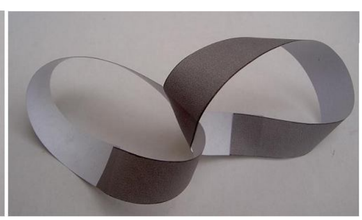
«Скрученные» кольца. **«Скрученные ленты Мёбиуса.**

Дважды перевернутая полоска дает уже не ленту Мёбиуса, а обычное кольцо, правда, «винтообразное»: по этому кольцу «муравей» может ползать либо по одной стороне, либо по другой, но не по обеим.

«Закрученное» кольцо. **«Закрученная» лента Мёбиуса.**

Конечно, можно переворачивать полоску перед «склеиванием» многократно. Просто если ленту перевернуть на $n\times 180^{\circ}$ нечетное число раз, то получается «винтообразная» лента Мёбиуса, а если на четное число раз – то будет обычное «винтообразное» кольцо.

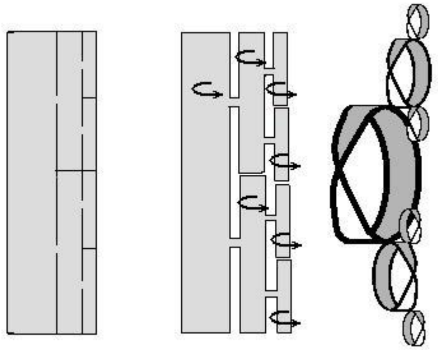
Кстати, если сделать цепочку из обычных плоских колец, то «муравей сможет ползать с внутренней поверхности первого кольца на внешнюю поверхность второго кольца и т.д. Но он никогда не попадет на внешнюю поверхность первого кольца и на внутреннюю поверхность второго кольца и т.д., т.е. два «муравья» будут ползать независимо каждый по своей поверхности.



Цепочка из колец. **Цепочка из лент Мёбиуса.**

Если же сделать цепочку из лент Мёбиуса, так, чтобы стороны соседних звеньев плотно прилегали, то «муравей» сможет побывать в любой точке на любой из поверхностей.

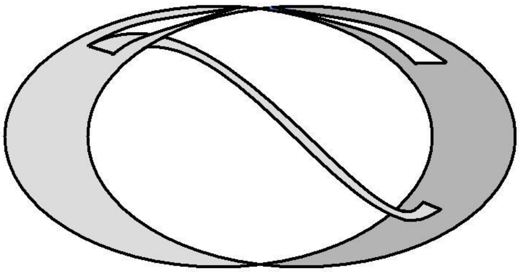
С листом Мёбиуса можно продолжить интересные эксперименты и дальше. Сделайте заготовку из листа бумаги, как показано на рисунке. Разрежьте по линиям, а затем каждую из получившихся полосочек, не отделенных от основной части, сверните в лист Мёбиуса. Получится этакая многоэтажная конструкция.



Конечно, на рисунке дано схематичное представление полученной структуры. Реальная «фракталообразная» фигура такого типа выглядит гораздо менее изящно.

Вот по такому «кусту Мёбиуса» Эшеровский муравей вдосталь нагулялся бы! Подобного рода многоярусных и вложенных друг в друга лент Мёбиуса можно понапридумать, конечно, очень много.

В заключение приведем еще образец фигуры, которая обладает свойствами ленты Мёбиуса и при этом ни одна из сторон не скручена, хотя на одной из сторон вырезана полосочка...



«Дырявое» кольцо, обладающее свойствами ленты Мёбиуса.

2.3. Бутылка Клейна

В топологическом аду мы будем писать на листах Мёбиуса и пить из бутылок Клейна...

Лука Умищев

Каких-нибудь 20-30 лет спустя после находки Мёбиуса, Феликс Клейн придумал трехмерный аналог листа Мёбиуса – так называемую бутылку Клейна.

Эта бутылка представляет собой замкнутое пространство со свойствами, аналогичными тем, какими обладает и лист Мёбиуса.

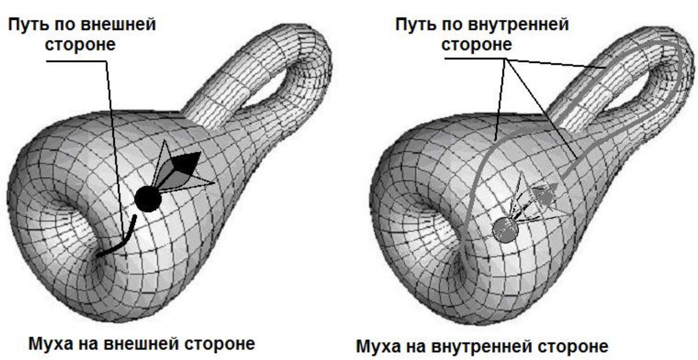
(Однако, не пытайтесь сделать бутылку Клейна сами – вряд ли это вам удастся!)

Христиан Феликс Клейн

(1849 – 1925)

Немецкий математик, иностранный член Петербургской и Берлинской Академий наук. Основные труды по неевклидовой геометрии, теории непрерывных групп и теории алгебраических уравнений. Выполнил большую работу по созданию «Энциклопедии математических наук» («Enzikiopädie der mathematischen Wissenschaften»). В течение почти 40 лет был главным редактором журнала «Анналы математики».

Представьте себе, что воронка, находящаяся в дне бутылки, переходит в полую ручку, в свою очередь, переходящую в горлышко бутылки. Можно представить себе, как по воронке, переходящей в ручку муха заползает, начиная с точки на «поверхности». (У данного пространственного тела вообще-то тоже ведь нет «внутренней» и «внешней» сторон!) Потом муха выползает на «внутреннюю» стенку бутылки и доползает «внутри» бутылки до той же точки где сидела только что, но уже с другой стороны!



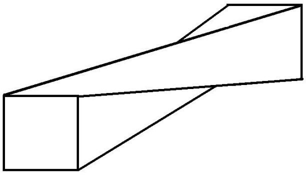
Муха, ползающая по бутылке Клейна.

2.4. «Рамки» Мёбиуса

Извольте заметить, что «рамки» Мёбиуса выходят за все рамки! А представляете, что будет, если лист Мёбиуса будет окантован такой рамкой?!

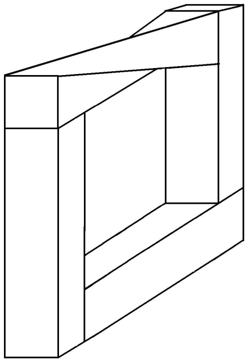
Лука Умищев.

Уж не знаю, почему у меня возникла мысль: а что если вместо полоски для листа Мёбиуса использовать брусок с квадратным сечением. Что при этом получится?

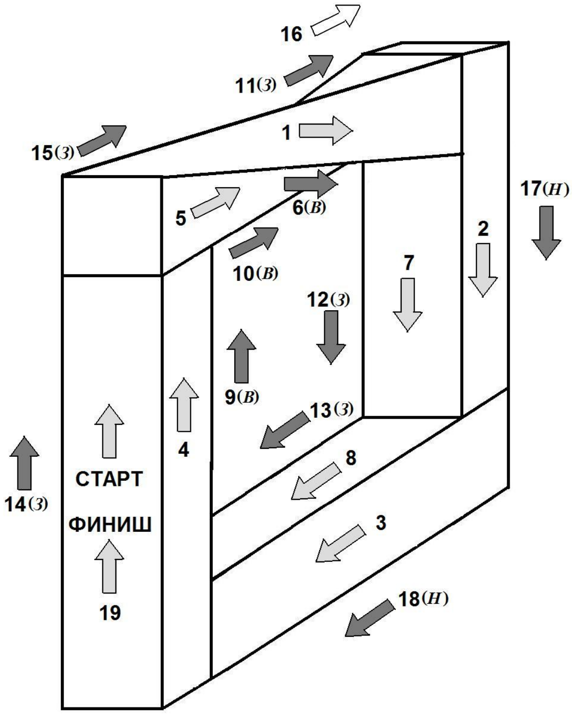


Сделайте из пластилина (или вырежьте из поролона) четыре бруска с квадратным сечением. Потом один из них поверните на 90^{o}, как показано на следующем рисунке. В результате сторона рамки окажется винтообразной.

Сделайте теперь рамку из трех обычных брусков и одного «скрученного».



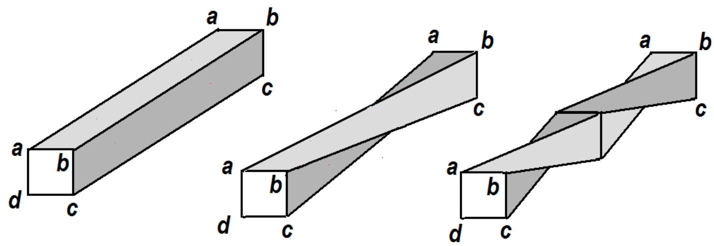
Теперь представим себе, что мы запустили бегать по сторонам такой скрученной рамки Эшеровского муравья, выстилая перед ним «ковровую дорожку», как перед президентом, спускающимся с трапа самолета. Путь, по которому была бы проложена эта лена, обозначен на следующем рисунке.



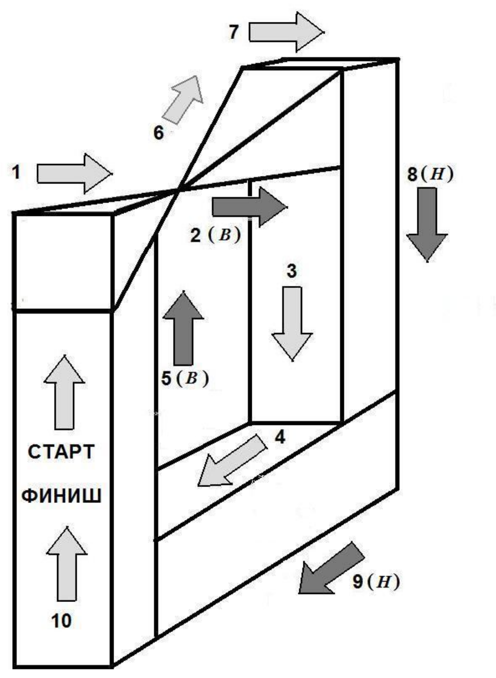
На этом рисунке номера у стрелок означают порядок движения. Светло-серые стрелки обозначают движение по видимым граням, а в темно-серые – по невидимым граням, причем для них в скобках обозначено, какая это грань - внутренняя (В), наружная (Н) или задняя (З).

Как вы могли догадаться, натянутая на рамку лента образует «закрученное» кольцо из 16 граней, но все же не ленту Мёбиуса: «муравей» по полоске пробегает по всем граням, но все время по одной стороне ленты – внешней.

Интересно, а что получится, если сторону рамки повернуть не на 90°, а на 180°? Процедура иллюстрируется на рисунке ниже.



Допустим, что опять мы произведено «скручивание» верхней стороны рамки. В результате получается рамка, представленная ниже. Если на эту рамку начать навертывать ленту, начиная с той же точки, что и в предыдущий раз, то окажется, что лента обойдет только два круга и вернется на точку старта. Оказывается, что она образовала только одно «скрученное» кольцо, включающее восемь граней.



Если начать обход граней, например, с передней стенки рамки, то получится другое кольцо, аналогичное первому.

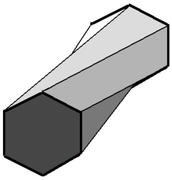
Итак, в этом случае получилось два независимых кольца.

А что если повернуть верхнюю сторону рамки на 90° по часовой стрелке, а нижнюю – против часовой стрелки на те же 90°? Оказывается, что в этом случае «ковровые дорожки» для Эшеровского муравья образуют четыре простых кольца – второй поворот в обратную сторону скомпенсирует первый поворот.

Не будем утомлять вас рисунками-головоломками, поверьте на слово: появятся четыре независимых кольца, каждое состоящее из четырех граней. Кстати, то же имеет место и для обычной рамки, у которой нет ни одной «скрученной» стороны.

Конечно, подобные упражнения с рамками, у которых сечение бруска представляет собой многоугольник, можно продолжить. В действительности, для изучения свойств «скрученных» рамок число их сторон не существенно. В принципе достаточно взять кольцо, которое в сечении имеет многогранник. Многообразие путей, по которым ползает Эшеровский муравей, зависит лишь от числа граней и от того, на какой угол брусок скручен, прежде чем он свернут в кольцо.

Например, рассмотрим брусок, сечение которого представляет собой шестиугольник. Скрутим брусок на угол $360^{\circ}/6 = 60^{\circ}$ по часовой стрелке.



Затем свернем такой брусок в кольцо и пустим «муравья» по одной из граней кольца. Вслед за «муравьем» будем укладывать ленту. Когда после возвращения мы снимем ленту, то окажется. Что это единственное кольцо, скрученное 6 раз.

Если брусок скрутить дважды, т.е. на угол $360^{\circ}/3 = 120^{\circ}$, то окажется, что рамку можно обернуть двумя кольцами, каждое из которых оказывается трижды скрученным. Если же брусок скрутить на 180°, то получится три кольца, каждое из которых дважды скручено.

Дальнейшее продолжение скручивания бруска опять будет порождать одно, два или три кольца, но они будут все более и более «закрученными».

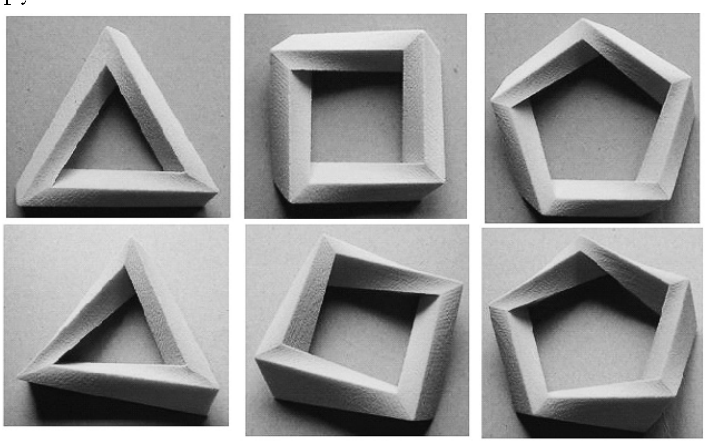
Можно заметить, что при числе граней 6, получается три типа колец, соответствующих числам, на которые число 6 делится без остатка. Понятно, что если сечение бруска является многоугольником, число граней которого есть простое число, то в результате при любом скручивании всегда будет получаться одно многократно скрученное кольцо. В общем случае, если сечение бруска правильный N-угольник, где N делится без остатка на числа K_1, K_2, …, K_n , то на них можно получить $N/\ K_1$ колец, скрученных K_1 раз, $2K_1$ раз и т.д.; или $N/\ K_2$ колец, скрученных K_2 раз, $2K_2$ раз и т.д.; или ... $N/\ K_n$ колец, скрученных K_n раз, K_n раз и так далее..

У подобного рода «толстых Мёбиусов» много интересных комбинаторных свойств, рассмотрение которых выходит за рамки данной книги.

****

Когда текст данного раздела был уже готов, удалось найти в Интернете на сайт Гершона Элбера, который разрешил использовать свои материалы: http://www.cs.technion.ac.il/~gershon/EscherForReal/.

Посмотрите, на эти отлично выполненные модели рамок, у которых закручена каждая из составляющих частей.



Как всегда, возникает резонный вопрос: НУ И ЧТО?!!!

А ничего... Никто же не задавал Мёбиусу такого вопроса? (Даже утомленные от бесконечной беготни по листу Мёбиуса муравьи и мухи ☺.) Никто же не пытался пить из бутылки Клейна? Да просто интересно. И красиво! (А один умный человек сказал, что красота спасет мир!)

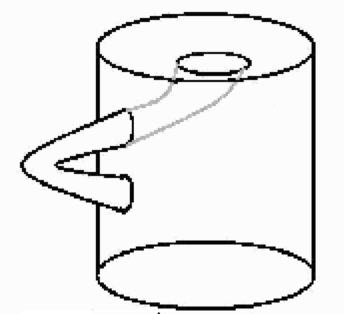
2.5. Бесконечно вложенные «кружки» Клейна …

Математика есть единая симфония бесконечного.

Давид Гильберт.

Работая над книгой, я взялся, естественно, за бутылку... Нет, нет! За бутылку Клейна, конечно.

В бутылке Клейна «муха» заползает в бутылку и может оказаться в точке старта, но с другой стороны, а возвращается она все же по тому же пути, что и пришла. А ведь «мухе» на ленте Мёбиуса повезло больше – она может перемещаться по ленте бесконечно, ползя только вперед.

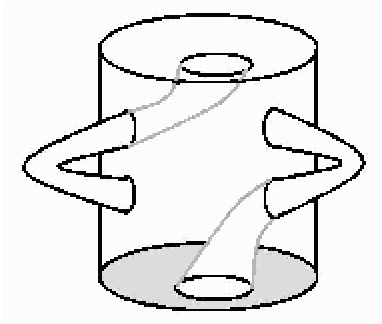


"Кружка Клейна".

Заметим, что бутылку Клейна можно представить в нетрадиционном виде (см. рис. слева).

Правда, этот объект больше напоминает пивную кружку, чем бутылку, но ведь это не суть важно? Главное, что такая трансформация бутылки Клейна окажется весьма удобной для дальнейших построений.

Подумав немного, я изобрел «дырявую кружку» Клейна, свойства которой схожи с листом Мёбиуса: по ней «муха» может ползать до



Дырявая кружка Клейна.

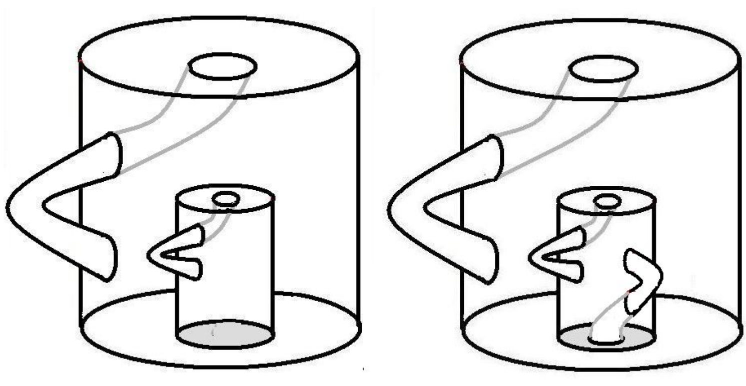
бесконечности, ползя только вперед! У этой бутылки-кружки две «воронки» – и сверху, и снизу, а к тому же каждая воронка снабжена своей «ручкой».

Оказывается, что если пустить «муху» в верхнюю воронку такой «кружки» Клейна, она вползет внутрь через левую ручку, может, в принципе, посетить точку старта (но с обратной стороны), затем подойти к туннелю, образованному правой ручкой, и оказаться опять на внешней стороне, откуда «мухе» уже ничего не стоит добраться до точки старта на внешней стороне кружки! И действительно, муха ползла все время вперед.

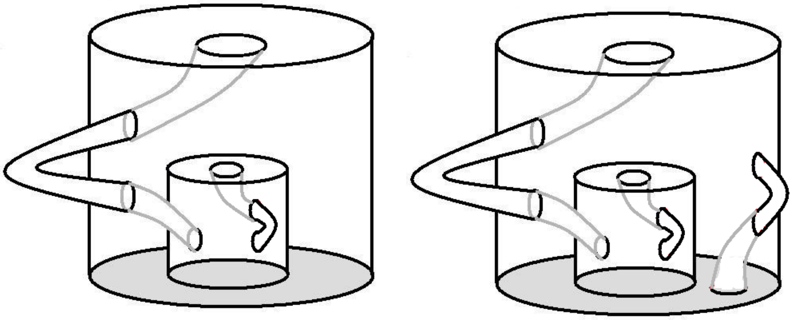
Ни дать, ни взять – этакая бутылка Клейна-Мёбиуса!

Но интереснее посмотреть, что будет с «кружкой» Клейна, если в верхнюю воронку заливать жидкость. Жидкость будет наливаться до тех пор, пока ее уровень не достигнет уровня верхней части правой ручки, после чего начнет выливаться по этой ручке через нижнюю воронку. Кружка-то оказалась «дырявой»!

А что получится, если в такую «кружку» Клейна встроить еще одну такую же кружку, но меньшего размера?

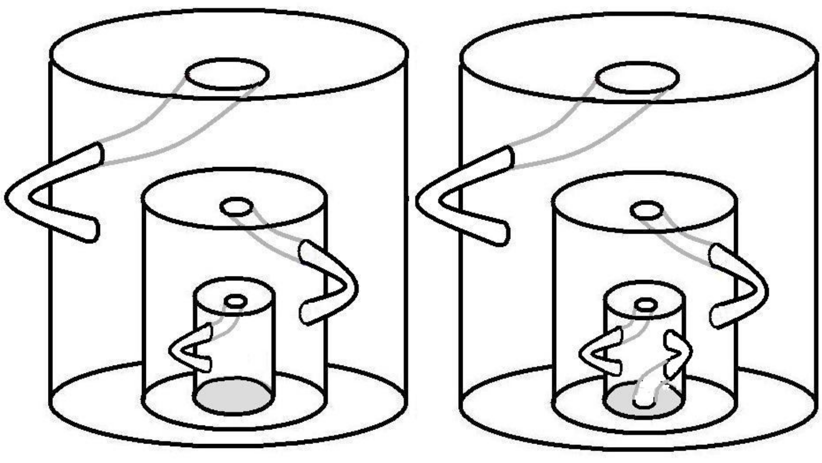


Интересно заметить, что уже при двух вложенных кружках Клейна возможно два обхода этого замысловатого пространства. Вот второй вариант построения, когда снаружи можно попасть сначала внутрь малой кружки, а уж оттуда выбраться внутрь большой кружки.



Двойная кружка Клейна с инверсным обходом: сначала внутренняя кружка, а затем внешняя (слева – обычная, а справа – «дырявая»).

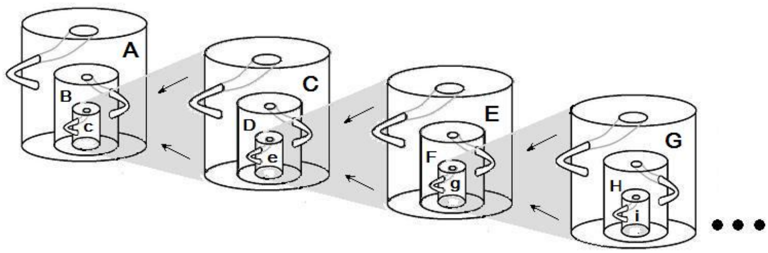
Теперь, когда уже ясна идея построения двух вложенных кружек Клейна, нетрудно изобразить и три вложенные кружки.



Порядок обхода кружек: Большая → Средняя → Маленькая.

Конечно, можно построить (во всяком случае гипотетически) сколь угодно много таких встроенных друг в друга не «дырявых» и «дырявых» кружек Клейна...

Ниже приводится схема, поясняющая возможность такого бесконечного рекуррентного построения.



Принцип построения бесконечно вложенных кружек Клейна.

Причем интересно, что с увеличением числа вложенных кружек увеличивается и число различных обходов. Нетрудно сообразить, что возможны такие порядки обхода замысловатого пространства, образованного тремя вложенными кружками Клейна:

Вход → Большая → Средняя → Маленькая

Вход → Большая → Маленькая → Средняя

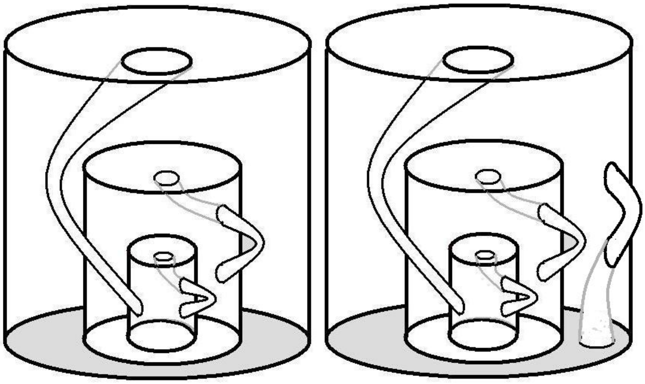
Вход → Средняя → Большая → Маленькая

Вход → Средняя → Маленькая → Большая

Вход → Маленькая → Большая → Средняя

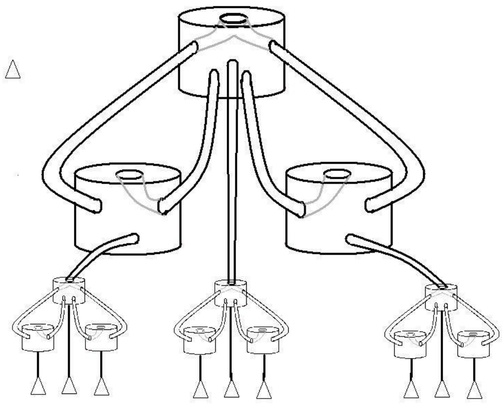
Вход → Маленькая → Средняя → Большая

Итак, как ни крути, набирается факториал возможностей для путешествия «мухи» или для разлива жидкости по различным тройным кружкам Клейна! Мы приведем рисунок лишь для последнего случая (остальные строятся аналогично).



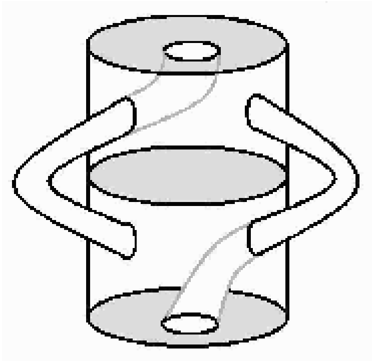
Порядок обхода кружек: Маленькая → Средняя → Большая. (Слева обычная тройная кружка, а справа – «дырявая» кружка.)

Но и на этом не заканчиваются интересные построения с кружками Клейна. Из них можно строить весьма замысловатые сети, например, вроде этой (для удобства обозрения она имеет симметричную структуру):



Ветвящаяся структура из кружек Клейна.

А можно на манер кружек Клейна делать и «бочки с двойным дном: В этой бочке можно достичь любой выбранной точки на боковых поверхностях да и на общем днище с обеих сторон.

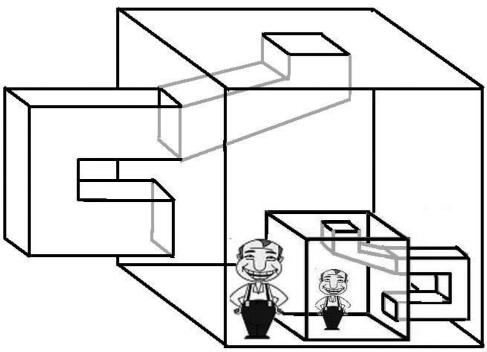


Клейновский "бочонок"
с двойным дюм.

И опять все тот же сакраментальны вопрос: «Ну и что?!» И опять тот же ответ: «А ничего... Интересно!»

***

Настало время извиниться перед читателем: книга то о научных озарениях, а я ее превращаю в некую «увлекательную математику»... Но больно уж хотелось поделиться собственным «озарением». Не является ли эта кружка четырехмерным объектом в том же смысле, в каком кривая Пеано-Гильберта является двумерным? Аж дух захватывает!..



2.6. Невозможные фигуры

Если нельзя, но очень хочется, то и невозможное возможно.

Современная пословица.

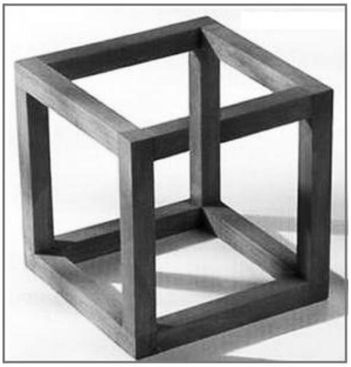
Но если необычные объекты типа листа Мёбиуса и бутылки Клейна – это реальные объекты, то совсем другое дело –

невозможные фигуры, эдакие призраки, существующие только на бумаге...

Пожалуй, начало этим невозможным объектам было положено Луисом Неккером[27]. В 1832 году он опубликовал широко теперь известную фигуру – куб Неккера. Этот куб приводит к интересной зрительной иллюзии: если на него долго смотреть, не моргая, то он как бы начинает менять ориентацию в пространстве. Он изображен в изометрической перспективе, т.е. соответствующие параллельные стороны его представлены параллельными же линиями и на чертеже. В местах, где линии пересекаются нельзя понять, которая из них находится впереди, а которая – на заднем фоне. Именно это и делает картинку загадочной: когда не нее смотришь, возникает так называемое «множественное восприятие». Действительно, посмотрим на рисунок внизу, где представлен куб с прозрачными стенками. На первых двух изображениях жирными линиями представлены те ребра куба, которые «видны» наблюдателю, а тонкими те, которые «видны» сквозь прозрачные стенки. Для удобства снизу помещены образы тех же кубов с непрозрачными стенками:

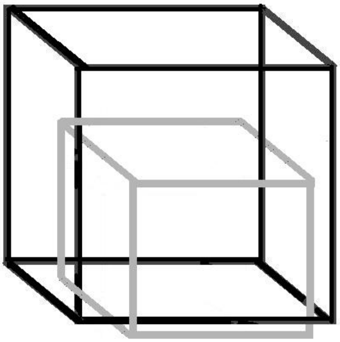
Впоследствии из этого «неоднозначного» куба и появился куб Эшера, который ввел «перспективы», что сделало куб Неккера не просто зрительным обманом, а одной из первых «невозможных» фигур.

[27] **Луис Альберт Неккер** (1786-1861), швейцарский геолог и кристаллограф.

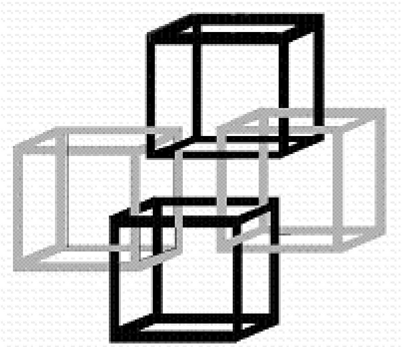


Куб Эшера.

Опять трудно удержаться и не предложить что-нибудь свое и новенькое ☺. Например, как вам нравятся два куба Эшера «вставленные» друг в друга? Или же вот этот склад «пустых ящиков» Эшера? ☺



«Вставленные» кубы Эшера.



«Свалка» кубов Эшера.

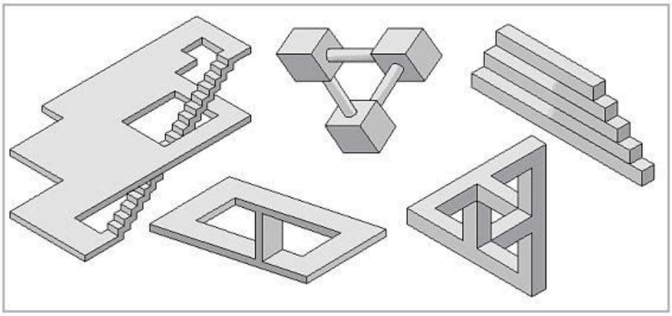
Только спустя сто лет, в 1934 году, Оскар Реутерсвард[28] создал первый «невозможный треугольник», составленный из серии

[28] **Оскар Реутерсвард** (1915-2002), шведский художник, которого называют отцом невозможных фигур.

кубиков. С тех пор Реутерсвард придумал сотни невозможных фигур. В 1980 в Швеции даже была выпущена серия марок с «невозможными фигурами» Реутерсварда (левая марка с «невозможным треугольником»).

Шведские марки с фигурами Реутерсварда.

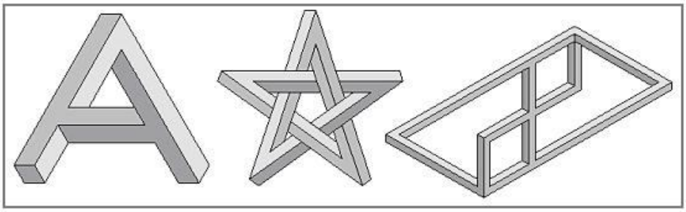
Хотя многие художники создавали невозможные фигуры, но именно Реутерсвард открыл новый мир фантазий.



Образцы невозможных фигур Реутерсварда.

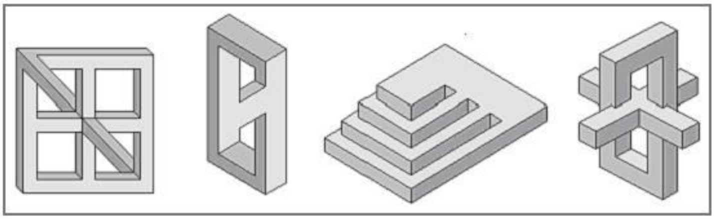
Со временем изобретение невозможных фигур стало повальным увлечением. Над созданием невозможных фигур работали и математики, и художники.

Очень интересные образцы фигур созданы нашим соотечественником Владом Алексеевым[29], помещенные на сайте http://im-possible.info/russian/articles/real/):



Невозможные фигуры Влада Алексеева.

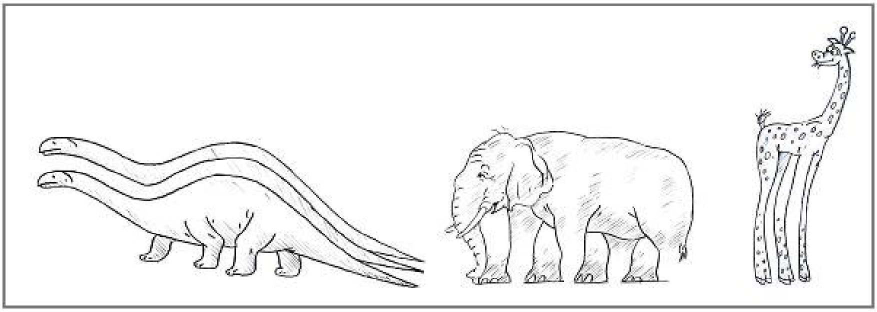
А вот ещё несколько образцов «невозможных фигур», выполненных разными авторами в последнее время:



Образцы других невозможных фигур.

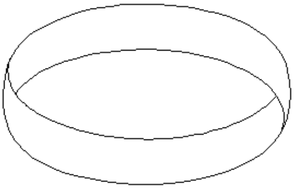
Дошло дело и до «невозможных животных»: на рисунке внизу картинки, нарисованные «по мотивам» моделей В. Алексеева («Динозавры»), Р. Шепарда («Слон») и А. Кравченко («Жираф»). Как вам нравится этот зверинец?

[29] Рисунки помещены с любезного разрешения автора.



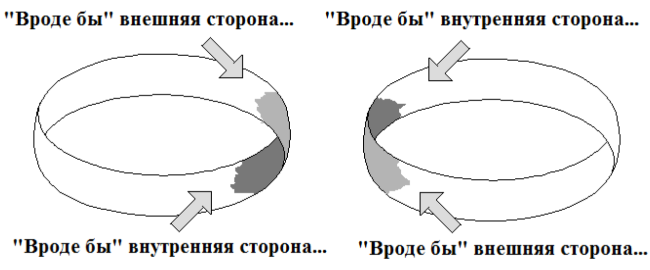
Невозможные животные.

Ну и «на закуску» – совсем простенький рисуночек:

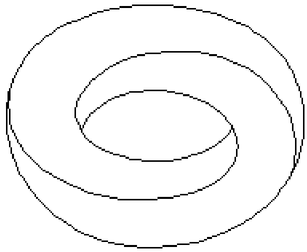


Невозможный лист Мёбиуса.

Ну, чем не лист Мёбиуса? Но приглядитесь: при всем внешнем сходстве это, конечно же, «невозможная фигура»!



Чтобы не было сомнений в том, что все это лишь оптический обман, посмотрите на «невозможную рамку» Мёбиуса:



Тот же невозможный лист Мёбиуса, но «толстый».

Ну, а такое может вообще присниться только в страшном сне!

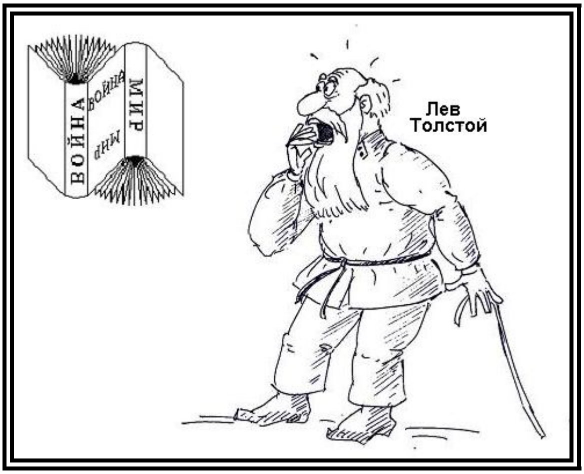


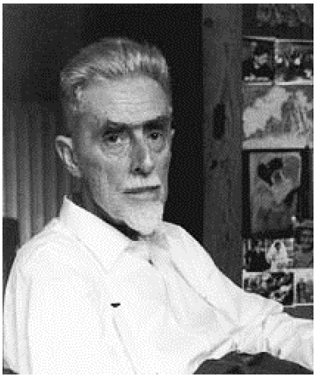
Рис. С. Ушакова. **«Прямо, как в жизни: не поймешь, где мир, а где война...»**

2.7. Волшебная графика

> Математик – тот же творец узоров, как художник или поэт. Если математические узоры оказываются более устойчивыми, чем стихи или полотна художника, то это происходит лишь потому, что они сотканы из идей…
>
> ***Годфри Харди***[30]

То, что придумал Оскар Реутерсвард, было весьма оригинально, но это было все же больше всего похоже на увлекательные графические головоломки. Невольно, как и всякое интересное открытие, эти работы получили свое второе открытие в новом направлении в графике и рисунке.

Совершил этот поистине революционный переворот голландский художник Мауриц Эшер. Новое направление, развитое им, оказалось вольно или невольно тесно связано с математикой.

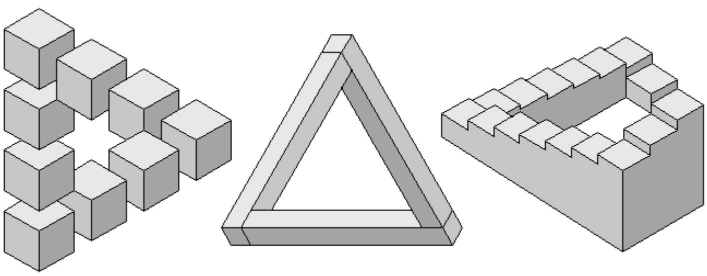


Мауриц Корнелиус Эшер (1898-1971)

Голландский художник, один из оригинальнейших графиков современности. Известен своими картинами, которым присущ особый стиль – множество повторяющихся и сочетающихся элементов, образующих сплошной покрывающий плоскость орнамент, а также использование ирреальных объектов, которые создают удивительные оптические иллюзии.

[30] **Годфри Гарольд Харди** (1877–1947), известный английский математик, известный своими результатами в теории чисел, математическом анализе, член Лондонского королевского общества.

А началось все с курьезного случая. В 50-х годах прошлого столетия на лекции Эшера присутствовал молодой английский математик Роджер Пенроуз[31], интересовавшийся графикой и живописью. Будучи под впечатлением лекции Эшера, он открыл заново «невозможный треугольник» Реутерсварда (левый рисунок внизу), о котором он ничего не знал, причем он нарисовал этот треугольник в более привычной форме – с использованием линейной перспективы (средний рисунок внизу), что сделало невозможность треугольника Пенроуза «еще более невозможной». После этого он изобрел еще и « замкнутую лестницу, по которой можно бесконечно подниматься вверх» (правый рисунок внизу).

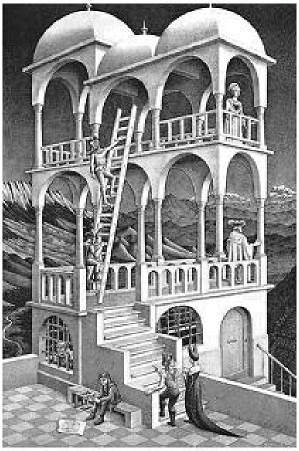


Рисунки Пенроуза.

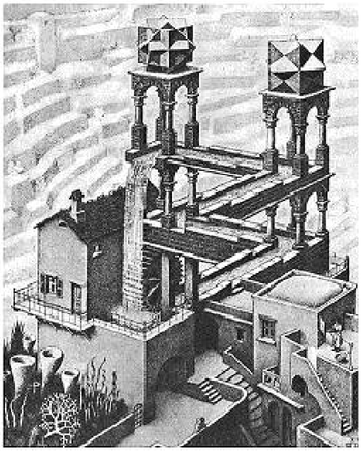
Роджер Пенроуз написал математическую статью, где был помещены рисунки его «невозможных фигур», и послал ее Эшеру, на которого рисунки произвели огромное впечатление. Впоследствии Эшер неоднократно использовал «невозможную лестницу» Пенроуза в своих картинах.

Одними из наиболее выразительных картин Маурица Эшера с использованием идеи невозможных «куба Неккера» и «лестницы Пенроуза» являются знаменитый «Бельведер» и «Водопад».

[31] **Роджер Пенроуз** (р. 1931) – современный английский математик



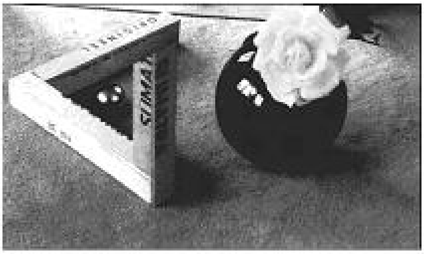
Бельведер.



Водопад.

А вот в Интернете, на упоминавшемся уже сайте Влада Алексеева помещено... фото с модели «Бельведера»! Конечно, фото невозможной фигуры требует объяснений: ведь если фигура невозможна, то как же ее можно сфотографировать?

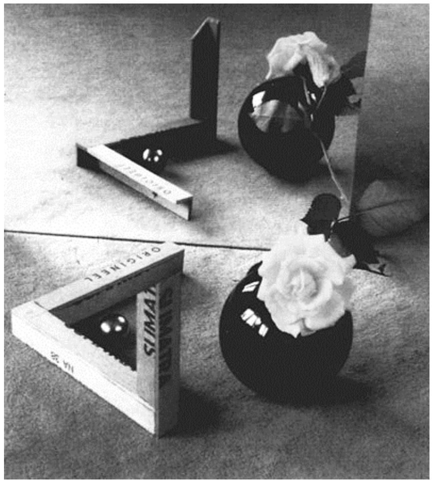
Начнем объяснение с простого примера. На том же сайте Алексеева приводится фото невозможной треугольной рамки Пенроуза, сделанное Хансом де Рийком.



Фото, создающее иллюзию рамки Пенроуза.

Вот видите – фото невозможной фигуры, а вы говорите, что чудес не бывает!

А теперь поставим за фигурой, сфотографированной Эрнстом, зеркало...



Объяснение оптического обмана.

Посмотревши на отражение в зеркале, становится понятным, что мы поддались оптических обману: очень удачно выбран ракурс!

То же происходит и с «моделью» невозможного «Бельведера» Эшера: на первом фото модель идентична рисунку Эшера, а на втором, она представлена в своем «натуральном» виде.

Фото модели с «нужного угла».

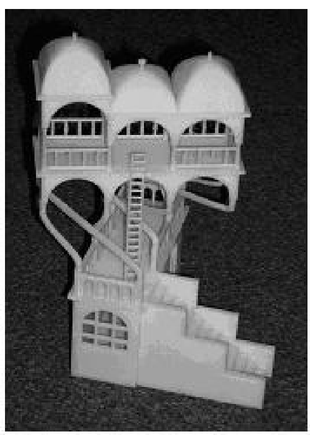
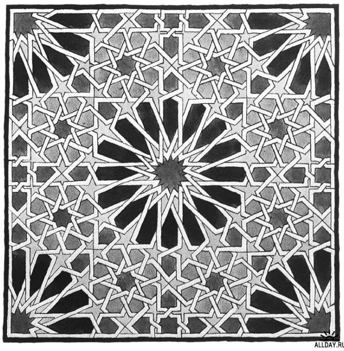


Фото модели сбоку.

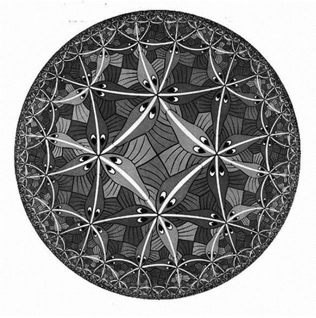
Однако не только изображение «невозможных фигур» составляет предмет живописи Маурица Эшера. Не менее известны его орнаменты, представляющие собой сплошное заполнение плоскости одинаковыми фигурами.

Началось с того, что Эшер заинтересовался восточным орнаментом. Он специально поехал в Испанию для того, чтобы познакомиться с мавританскими орнаментами, выполненными в период арабского владычества этой страной. Пораженный плотным заполнением орнаментов геометрическими элементами, Эшер делал множество зарисовок. Перед вами небольшой фрагмент одного из очень известных скетчей, сделанный им в Альгамбре.

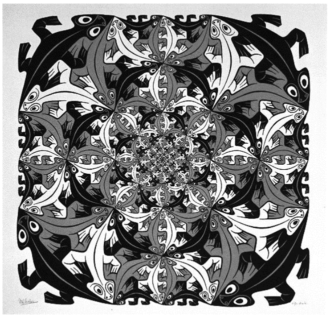


Как известно, ислам запрещает изображение всего живого (человека, животных, рыб и птиц), поэтому мусульманские орнаменты составлены из геометрических фигур. Будучи очарован мавританскими орнаментами, Эшер начал создавать и свои рисунки, но в качестве исходных элементов использовал наоборот именно живые существа.

Он их плотно «упаковывал» на плоскости. Фрагменты подобных орнаментов приведены ниже.



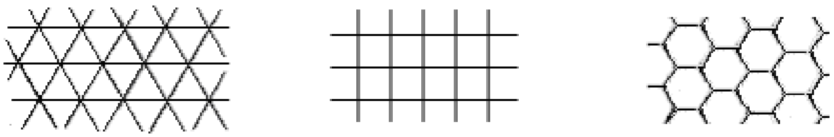
«Рыбы».



«Ящерицы».

И, как оказалось, не ведая того, Эшер вторгся во «владения» математики!

В математике доказано, что плоскость можно регулярным образом покрыть лишь тремя видами правильных многоугольников: треугольниками, квадратами и гексаэдрами:



Виды геометрически правильных разбиений плоскости.

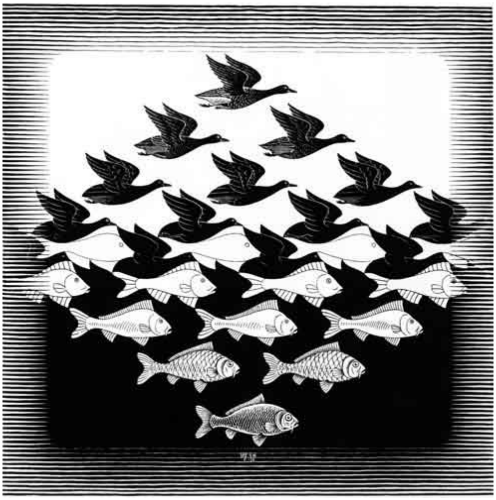
Это всем ясно, этому нас учили еще в начальных классах школы. Однако Эшер показал, что возможны и иные полные покрытия, причем, весьма замысловатыми (хотя и не столь «геометрическими») фигурами.

Математики любят использовать работы Эшера, излагая некоторые свои теории. Орнаменты Эшера оказываются тесно связанными с математической идеей периодичности и квазипериодичности. Известно, что орнаменты Эшера – прекрасная иллюстрация к теории кристаллографических групп.

Сам Эшер плохо знал математику. Однажды он был приглашен на лекцию, посвященную математическому содержанию его собственных гравюр и литографий. К взаимному разочарованию и лектора, и гостя, последний не понял почти ничего. Позже Эшер писал про этот эпизод в своей жизни:

> «*Я так ни разу и не смог получить хорошей оценки по математике. Забавно, что я неожиданно оказался связанным с этой наукой. Поверьте, в школе я был очень плохим учеником. И вот теперь математики используют мои рисунки для иллюстрации своих книг. Представьте себе, эти ученые люди принимают меня в свою компанию как потерянного и вновь обретенного брата! Они, кажется, не подозревают, что математически я абсолютно безграмотен*».

Завершим короткий рассказ об интереснейшем художнике Маурице Эшере скетчем с его хорошо известной многим гравюрой «Небо и вода»:



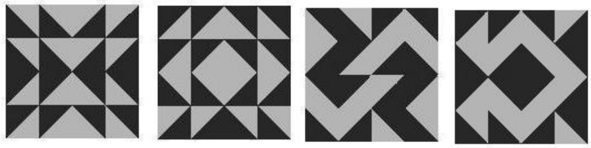
Мауриц Эшер: «Небо и вода».

Фонд Эшера[32] (http://www.mcescher.com/) дал любезное разрешение на публикацию приведенных работ художника.

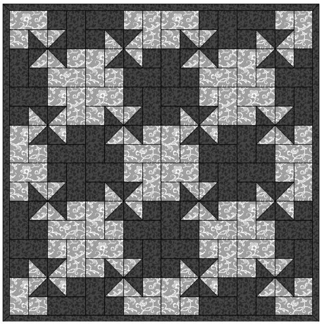
Об этом замечательном художнике написано немало книг, изданы альбомы с репродукциями его работ. Много о Маурице Эшере и его искусстве можно найти в Интернете, в частности, на вебсайте Фонда Эшера … Если Вы еще никогда видели его работ – обязательно поинтересуйтесь! Получите огромное удовольствие.

В заключение хотелось бы заметить, что в последнее время появились интересные компьютерные программы, позволяющие строить замысловатые покрытия плоскости различными нетривиальными фигурами, напоминающими покрытия Эшера (см., например, в Интернете сайт Quilted Symmetry (буквально «симметрия мозаичного покрывала») :
http://www.mi.sanu.ac.yu/vismath/daniel/index.html.

Общая идея состоит в том, чтобы построить некоторые элементарные блоки типа

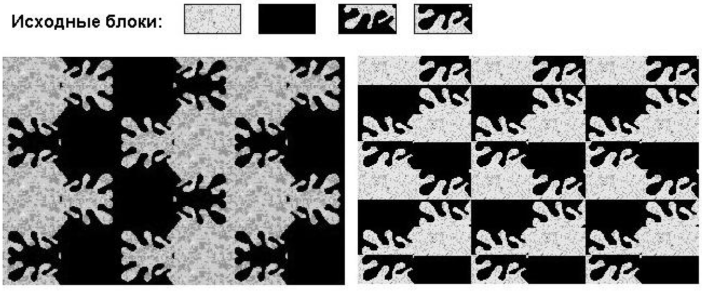


А потом из них набирать, как из элементов детского «конструктора» из которых более сложные фигуры. Например, можно построить «покрывало вот такого вида



Покрывало, составленное из неправильных, но одинаковых фигур.

В принципе, подобным же образом удается строить и более замысловатые фигуры, например вот такие «монстры»:



.

Покрывало из «монстров».

На рисунке вверху представлены четыре исходных блока, из которых построено одно покрытие из чередующихся белых и черных «монстров», а второе – из одинаковых черно-белых «монстров».

3. «ЗОЛОТОЕ СЕЧЕНИЕ»

В геометрии существует два сокровища - теорема Пифагора и деление отрезка в крайнем и среднем отношении. Первое можно сравнить с ценностью золота, второе можно назвать драгоценным камнем.

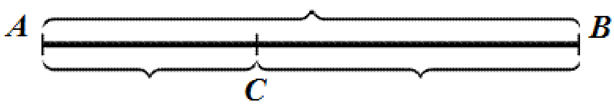
Иоганн Кеплер

3.1. История «золотого сечения»

Учение – серебро. Сечение – золото.

Из «Школьного Устава» времен Ивана Грозного

Уже в «*Началах*» Евклида[33] приводится задача «о делении отрезка в крайнем и среднем отношении». Суть задачи состоит в том, чтобы разделить отрезок *AB* точкой *C* в таком отношении, чтобы большая часть отрезка *CB* так относилась к меньшей части *AC*, как отрезок весь отрезок *AB* относится к своей большей части *CB*:



«Золотая пропорция».

Иными словами:

$$\frac{AB}{CB} = \frac{CB}{AC}.$$

Учитывая, что AB = AC + CB, то же равенство можно переписать в виде:

33 **Евклид** (ок. 365-ок. 300 до н. э.), древнегреческий математик, автор первых дошедших до нас теоретических трактатов по математике. ***Подробнее см. в главе «Пантеон» книги 1.***

$$x = \frac{AC + CB}{CB} = 1 + \frac{AC}{CB} = 1 + \frac{1}{\frac{CB}{AC}} = 1 + \frac{1}{x},$$

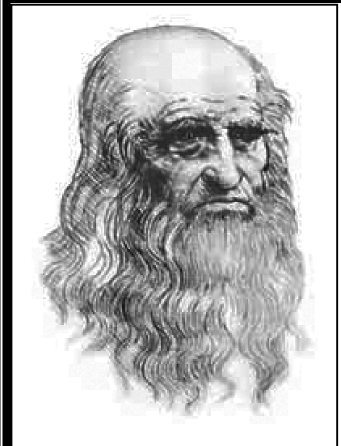
откуда вытекает следующее алгебраическое уравнение для вычисления искомого отношения x:

$$x^2 = x + 1.$$

Из самой геометрической сути задачи следует, что имеет смысл только положительный корень этого уравнения, τ, то есть

$$\tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618.$$

Леонардо да Винчи назвал это число «золотым сечением», или «золотой пропорцией». Может быть, он и не был первым, кто использовал такое название. Некоторые считают, что этот термин идет от Клавдия Птолемея[34], который дал такое название этому числу, изучая пропорции человеческого тела. Тем не менее, этот термин стал популярным благодаря Леонардо да Винчи.



Леонардо да Винчи
(1452 - 1519)

Итальянский художник, скульптор, ученый, инженер-изобретатель, философ, архитектор, механик, анатом, химик, ботаник эпохи Возрождения. Один из разносторонних гениев всей истории человечества.

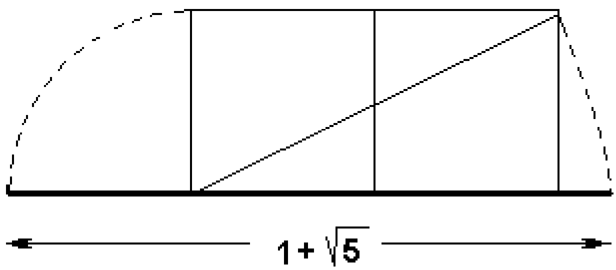
Подробнее см. в Главе «Пантеон».

---

[34] **Клавдий Птолемей** (II век), знаменитый астроном и географ античности. ***Подробнее в Главе «Пантеон» Части 1.***

Вполне возможно, что античные математики могли прийти к «золотому сечению», рассматривая так называемый «двухсмежный квадрат» – простейший прямоугольник, составленный из двух квадратов.

Диагональ такого прямоугольника со сторонами 1 и 2 согласно теореме Пифагора равна $\sqrt{5}$. Таким образом, удвоенная величина Золотого сечения 1 + $\sqrt{5}$ (сумма стороне квадрата плюс диагональ «двухсмежного квадрата») может быть получена следующим образом:



Построение «золотой пропорции».

Теперь заметим, что исходное уравнение можно переписать в виде:

$$x = 1 + \frac{1}{x}.$$

Интересно, что для величины *x* можно построить элегантную цепную дробь. Подставим вместо числителя выражение для *x*. Получаем «двухэтажную» дробь:

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x}}.$$

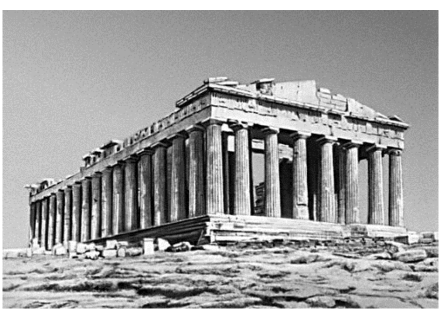
Продолжая подстановку, приходим к бесконечной цепной дроби вида:

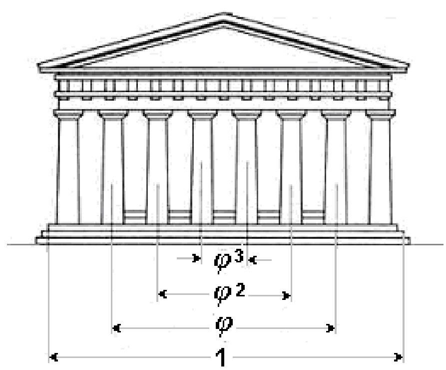
$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}$$

Можно получить еще одно интересное представление для решения того же квадратного уравнения. Представим уравнение $x^2 = x + 1$ в виде $x = \sqrt{x+1}$. Подставляя под корень вместо x его выражение, получаем $x = \sqrt{1+\sqrt{1+x}}$, и, продолжая такую подстановку бесконечное число раз, получаем еще одно замечательное представление «золотой пропорции» в радикалах:

$$x = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}\,.$$

Считают, что само понятие «золотой пропорции» было известно в геометрии еще Пифагору[35]. То, что древние греки знали об этой замечательной пропорции, говорит уже тот факт, что во многих архитектурных элементах замечательного памятника античности – древнегреческого храма Парфенон – уже систематически используется «золотая пропорция».



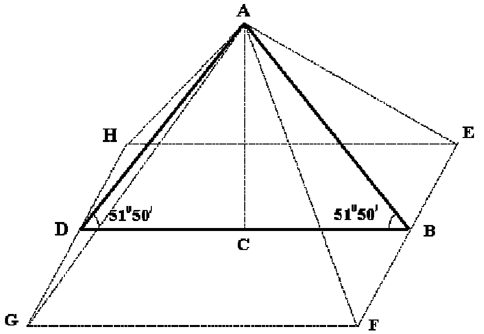


«Золотые пропорции» в Афинском Парфеноне.

[35] **Пифагор Самосский** (ок. 570 - 500 до н.э.), древнегреческий философ, математик, астроном и поэт, основатель религиозно-философской школы. ***Подробнее см. в Главе «Пантеон».***

Правда, есть предположение, что само понятие этой удивительной пропорции пришло в Грецию от древних египтян и шумеров, которым оно было известно намного раньше.

Во всяком случае, в пропорциях отдельных элементов самой большой египетской пирамиде Хеопса (Хуфу) – одном из семи мифологических чудес света – имеется соответствие «золотому сечению». А ведь построена она была в III тысячелетии до н.э.! Да и в двух других гигантских египетских пирамидах – Хефрена и Микерина – тоже не обходится без этой магической пропорции.



«Золотые пропорции» в пирамиде Хеопса.

Как мы видим, египетские пирамиды являются настоящим кладезем математических загадок – здесь и число «пи», и «золотое сечение»! Как заметил Леонардо да Винчи, многие люди стремятся найти «золотую пропорцию» во всех числах, лежащих между полутора и двумя. А ведь «золотое сечение» имеет множество замечательных свойств и само по себе и вовсе не нуждается в свойствах вымышленных!

В средневековую Европу «золотое сечение» вернулось в виде обратных переводов арабских переводов Евклида! Секреты «золотого сечения» тогда хранились в тайне и были известны лишь посвященным.

Леонардо да Винчи использовал термин «золотое сечение», изучая пропорции «идеального человеческого тела». Во многом благодаря Леонардо, в эпоху Возрождения наступило возрождение и интереса к «золотому сечению» среди ученых, архитекторов и художников.

Увлеченный удивительными свойствами «золотой пропорции», Леонардо начал писать книгу по геометрии, но как раз в это время он познакомился с книгой Луки Пачоли «Божественная пропорция».

Фра Лука Бартоломео де Пачоли

(1445 - 1517)

Итальянский монах, математик, друг и учитель Леонардо да Винчи. Автор знаменитых трактатов, «Божественная пропорция» и «Сумма арифметики, геометрии, дробей, пропорций и пропорциональности»

Первый из них – фундаментальный труд, предназначенный для художников, занимающихся изучением перспективы, а второй содержит, в частности, главу «О вычислениях и записях», в которой формулируются основные принципы бухгалтерии. ***Подробнее см. Главу «Пантеон».***

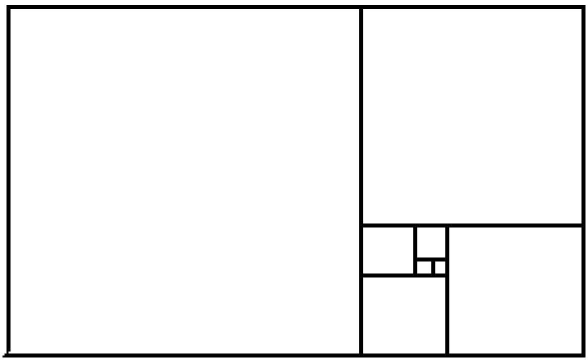
Книга произвела на него такое огромное впечатление, что, прекратив работу над своей книгой, великий художник создал великолепные иллюстрации для книги Пачоли. Книга последнего сыграла огромную роль в науке и искусстве того времени.

Будучи сыном времени, а к тому же еще и монахом, Лука Пачоли не преминул найти и «божественную суть» «золотой пропорции» как выражение божественного триединства: малый отрезок в его интерпретации олицетворял Бога Сына (то бишь Иисуса Христа), больший отрезок – Бога Отца, а весь отрезок – Бога Духа Святого. (Так, наконец, в божественной иерархии был наведен порядок...)

3.2. Пятиконечная звезда и «золотая пропорция»

Пятиконечная звезда...
Её б на грудь... Вот это да!
Лука Умищев

Одной из интересных фигур является «золотой прямоугольник» обладает интересным свойством (как, впрочем, и остальные фигуры из «золотого семейства»): можно строить бесконечную последовательность «вложенных» друг в друга квадратов и «золотых прямоугольников».



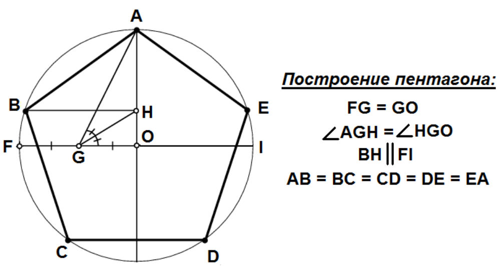
«Золотые прямоугольники».

Для нахождения отрезков «золотой пропорции» можно пользоваться и *пентагоном*, т.е. правильным пятиугольником. Слово «пентагон» (по-гречески *penta* означает *пять*, а *gon – угол*) хорошо известно даже людям далеким от геометрии по названию штаб-квартиры военного ведомства США – Пентагона – здания, которое в плане имеет форму правильного пентагона, хотя и не имеет никакого отношения к геометрии.

Пентагон – Министерство обороны США.

Альбрехт Дюрер[36] придумал относительно простое правило для построения пентагона. Вооружитесь циркулем, линейкой, чтобы воспользоваться методом Дюрера на практике.

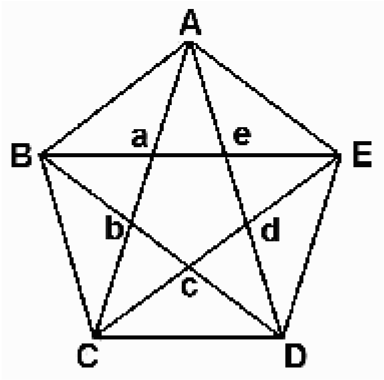
Метод построения заключается в следующем. Строим окружность и проводим в ней диаметр *FI*. Восстанавливаем из центра *O* перпендикуляр до пересечения с окружностью (точка *A*). Делим отрезок *OF* точкой *G* на две равные части. Соединяем точки *A* и *G*. В получившемся угле *AGO* проводим биссектрису *GH*. Из точки *H* проводим линию, параллельную диаметру *FI*, до пересечения с окружностью в точке *B*.



Построения пентагона.

Полученный сегмент *AB* является 1/5 частью окружности. Итак, построена одна из сторон пентагона. Затем уже от точки *B* делаем циркулем засечку радиусом AB, получая точку C и т.д. Получая правильный пятиугольник со сторонами AB = BC = CD = DE = EA.

Соединив диагоналями каждую из вершин пентагона с остальными, можно построить *пентаграмму* (по-гречески *gramma* означает *линия*), то есть правильную пятиконечную звезду. Сама пентаграмма образует малый пентагон *FGHKL* в центре, на сторонах которого располагаются

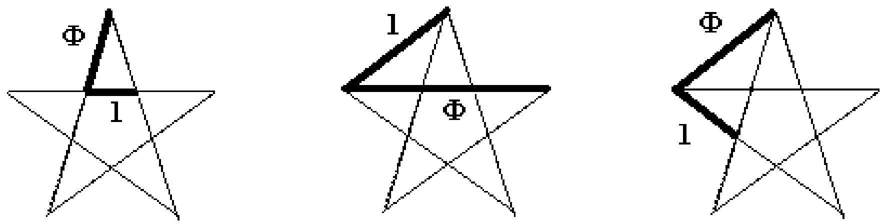


Построение звезды

[36] **Альбрехт Дюрер** (1471-1528), немецкий живописец и график, один из величайших мастеров западноевропейского искусства Ренессанса.

равнобедренные треугольники.

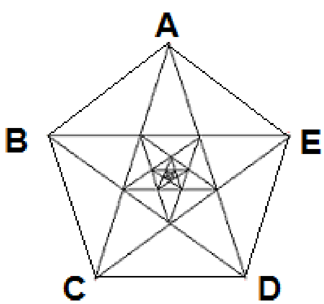
В пентаграмме можно отыскать много отношений «золотой пропорции»: например, Aa / ae = Ф, BE / AB = Ф, AB / Bb = Ф.



Золотые пропорции в элементах пятиконечной звезды.

Кстати, для обозначения большего из двух отрезков, имеющих отношение «золотой пропорции», использовано стандартное в математике обозначение Ф, которое введено в честь итальянского математика Леонардо Фибоначчи, о котором речь пойдет чуть позже.

Еще пифагорейцы заметили, что в построенном внутреннем пентагоне, образованном диагоналями, можно провести новые диагонали, и построить вложенную звезду. Такое построение, естественно, можно продолжать до бесконечности. Таким образом, пентагон ABCDE наполняется бесконечным числом уменьшающихся пентаграмм и пентагонов.



Бесконечные вложения друг в друга пятиконечных звезд.

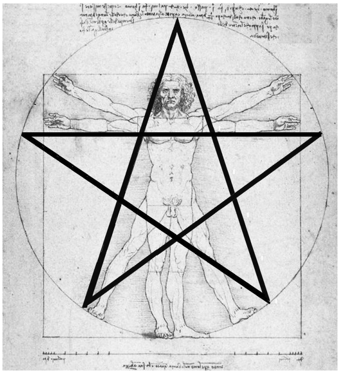
Как-то уж так получилось, что пятиконечная звезда у нас связана с серпом и молотом. Кстати, в США она тоже весьма популярна, поскольку присутствует на национальном флаге аж 50 раз (по числу штатов). А все ли знают, что пятиконечная звезда с древнейших времен была весьма чтимым символом?

Пентакл– мистический символ в виде пятиконечной звезды, был опознавательный знак Пифагорейской общины. Существует легенда о том, как один из пифагорейцев, лежа на смертном одре и не имея денег для оплаты человеку, который за ним ухаживал, сказал ему, чтобы тот нарисовал на стене своего дома пентаграмму. Добрый человек исполнил последнюю просьбу умирающего. Несколько лет спустя, кто-то из пифагорейцев увидел этот знак, зашел в дом и щедро вознаградил хозяина.

Пифагор утверждал, что эта пентаграмма, или, как он её называл, гигиея (в честь греческой богини здоровья Гигиеи), представляет собой математическое совершенство, так как скрывает в себе золотое сечение. Пентакл был также и символом здоровья и совершенства.

В христианской символике пентаграмма символизирует пять ран Иисуса. Кроме того, у христиан есть и иное толкование: это «великолепная пятерка»: Троица и плюс к тому две Христовых ипостаси – божественная и человеческая.

В нумерологии и магии прямая пентаграмма, с одним лучом кверху, символизирует человека.



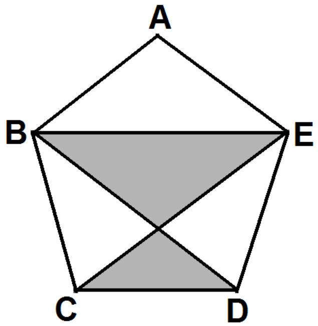
Звезда – символ человека.

Перевернутая звезда является символом дьявола (так называемый Козёл Мендеса, или Бафомет, или Маквинет; все означенные – символы сатанизма). Знак Бафомета использует в качестве своего символа Церковь Сатаны, являющаяся первой и самой крупной официально зарегистрированной сатанинской организацией, основанной в 1966 году.

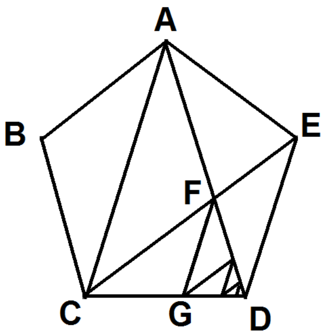

Козёл Мендеса.

Так что патриотам звезд следует задуматься: божественная либо сатанинская сторона пятиконечной звезды его больше увлекает...

Пентагон и пентаграмма включают в себя ряд замечательных фигур, которые широко использовались в античном искусстве. Например, так называемая «золотая чаша» и «золотой треугольник», представляющий собой фрагмент пентаграммы.



«Золотая чаша»

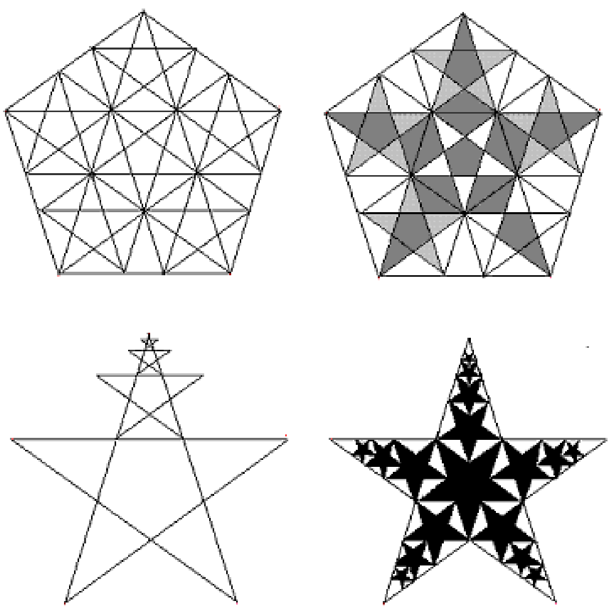


«Золотой треугольник»

Каждый из «золотых треугольников» является равнобедренным с двумя углами по 36° и с углом 108° при вершине. Такими треугольниками являются: *ABC*, *AFC*, *EFD*, *CFG* и бесконечное число треугольничков построенных итерационно внутри треугольника *FGD*. Отношение каждого бедра треугольника к основанию равно *Ф*. Биссектриса *CE* , разделяющая угол *ACD,* точкой *F* сама разделена также в «золотой пропорции».

Как и в случае с «золотым прямоугольником» и пентаграммой, возникает, как казалось пифагорейцам, магическое бесконечное вложение в саму себя одной и той же геометрической фигуры...

Вот лишь некоторые примеры таких итерационных вложений пятиконечных звезд:



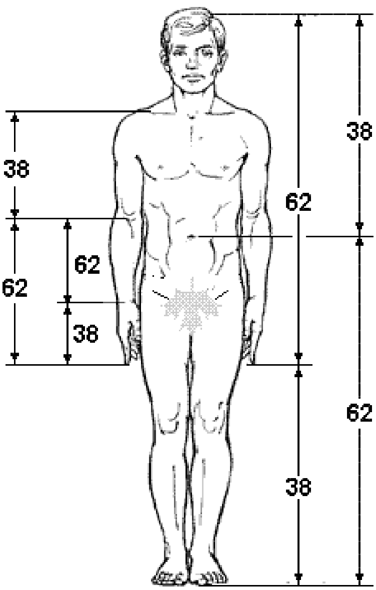
Различные итерационные построения с пятиконечными звездами.

3.3. «Золотая пропорция» в живой природе

Если Бог есть, то он
великолепный математик!
Поль Дирак [37]

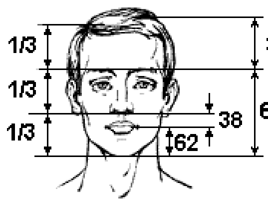
Уже упомянутый нами ранее, великий немецкий художник и график Альбрехт Дюрер детально разработал теорию пропорций человеческого тела. В его системе соотношений «золотое сечение» играет важнейшую роль.

Так, рост человека делится в «золотых пропорциях» линией пояса, а также линией, проведенной через кончики средних пальцев опущенных рук, нижняя часть лица – ртом и т.д.



«Золотые пропорции» в теле человека.

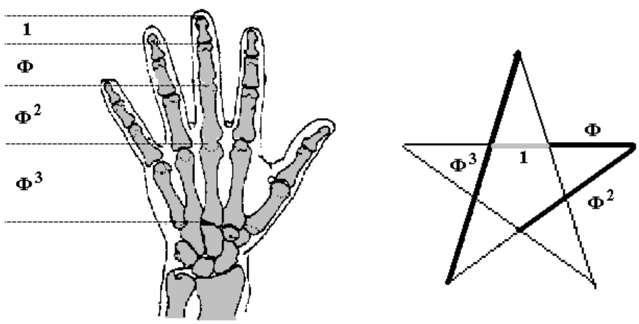
[37] **Поль Адриен Морис Дирак** (1902-1984), английский физик, лауреат Нобелевской премии по физике 1933 года за открытия в области атомной теории.



«Золотые пропорции» в лице человека.

Конечно же, не пытайтесь проверить эти пропорции измерениями на себе: это все справедливо «в среднем», а каждый из нас, к счастью, индивидуален ☺.

В пропорциях отдельных фрагментов кисти человека также присутствует «золотое сечение».



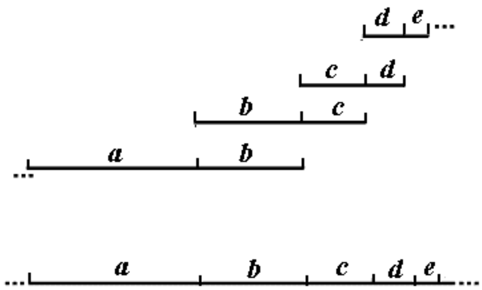
«Золотые пропорции» в кисти человека.

Великий астроном XVI века Иоганн Кеплер[38] первым обратил внимание на значение «золотой пропорции» для ботаники, изучая рост растений и их строение. Кеплер называл золотую пропорцию «продолжающей саму себя»:

---

[38] **Иоганн Кеплер** (1571-1639), великий немецкий астроном, математик и естествоиспытатель, один из основоположников современного естествознания. Прославился открытием законов движения планет. ***Подробнее см. в главе «Пантеон» книги2.***

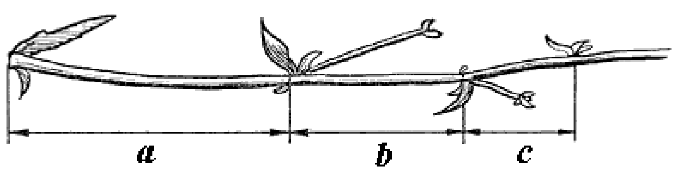
«Устроена она так, – писал он, – что два любых соседних члена этой нескончаемой цепочки в сумме дают новый член, соседний с большим из предыдущих, а вычитание меньшего из большего дает новый член, соседний с меньшим из предыдущих, причем такое построение можно продолжать до бесконечности в обе стороны».



Построение последовательности отрезков с «золотой пропорцией».

Иначе говоря, поскольку $a = b + c$, то $a - b = c$; далее, из $c + d = b$ следует $d = b - c$, и т.д.

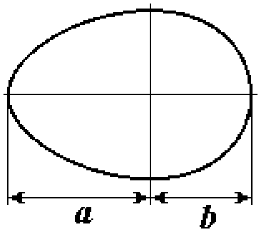
У некоторых растений, действительно, новые побеги листочков образуют цепочку-последовательность «золотых пропорций», хорошо совпадающих с описанной выше. От основного стебля отходит отросток на расстоянии *a*. Этот отросток, вырастая до определенной величины, прекращает рост и выпускает листок. Затем основной стебель дает следующий побег, но уже на меньшем расстоянии от первого побега. Подобное развитие растения продолжается как в основном стебле, так и в появляющихся отростках …



«Золотая пропорция» в ветке дерева.

Если расстояние до первого отростка (*a*) принять за 100 единиц, то расстояние до второго равно примерно 62 единицам, до третьего – примерно 38 единицам, до четвертого – примерно 24 единицам, и т.д. Иначе говоря, «импульсы роста» растения постепенно уменьшаются в пропорции «золотого сечения».

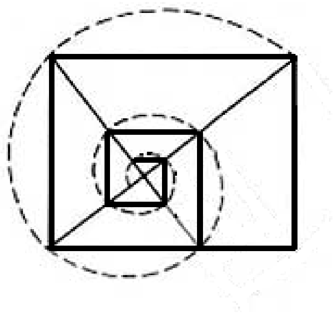
Та же «золотая пропорция» наблюдается и в яйце птицы.



«Золотая пропорция» в птичьем яйце.

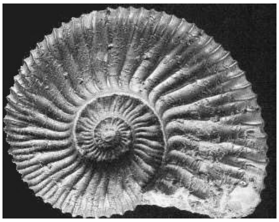
Говоря о «золотом сечении», следует сказать и о «золотой спирали. Для построения «золотой спирали» можно использовать уже упоминавшийся «золотой прямоугольник».

Процесс построения такой спирали поясняется следующей картинкой: на соответствующих отрезках «вложенных» прямоугольников строятся четверти окружностей.



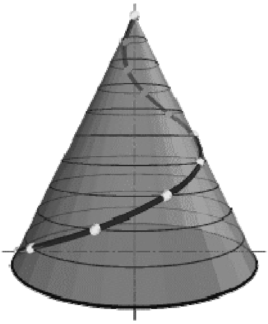
«Золотая спираль».

В живой и неживой природе спирали подобного типа встречаются довольно часто: это и хвосты комет, раскручивающиеся от Солнца; и раковины улиток и моллюсков, и рога некоторых животных...

«Золотая спираль» в природе.

Форма спирально завитой раковины интересовала еще Архимеда[39], который, кстати, вывел уравнение спирали. Спираль, вычерченная по этому уравнению, называется «спиралью Архимеда». Увеличение ее шага всегда равномерно. В принципе, спираль Архимеда и «золотая спираль» – это одно и то же.



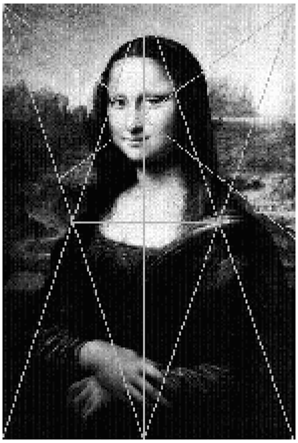
3.4. «Золотая пропорция» в живописи

Художнику необходима
математика его искусства.
***Леонардо да Винчи*.**

Художники и скульпторы подсознательно, доверяя своему тренированному глазу, часто применяют соотношение размеров в «золотой пропорции». В огромном числе картин художников-классиков центральная фигура расположена от сторон формата на расстояниях, образующих «пропорцию золотого» сечения. Следует заметить, что художники Возрождения делали это вполне осознанно.

---

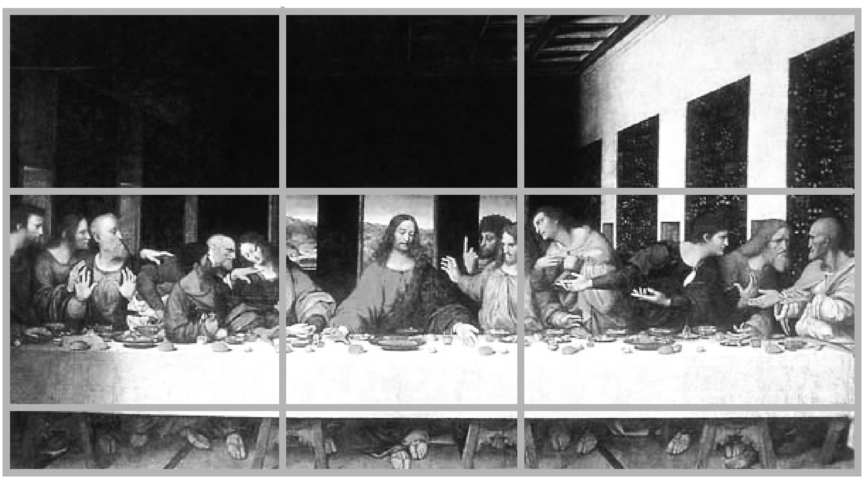
[39] **Архимед** (287–212 до н.э.), величайший древнегреческий математик, физик и механик. ***Подробнее см. в главе «Пантеон» Части 2.***



Мона Лиза.

Рассмотрим для начала одну из известнейших в мировом изобразительном искусстве картин, творение Леонардо да Винчи – портрет Моны Лизы, который называют также портретом Джоконды. Этот портрет построен в строгом соответствии с «золотым треугольником».

Другой, не менее известный шедевр Леонардо – это фреска «Тайная вечеря», где вся композиция основывается также на «золотой пропорции».



Леонардо да Винчи: Тайная вечеря.

Конечно, подобные примеры можно привести и из истории русской живописи. Посмотрите внимательно на картину Исаака Левитана[40] «Вечерний звон»! А деление плоскости светлыми

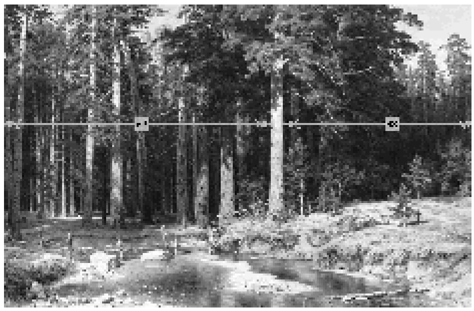
[40] **Левитан Исаак Ильич** (1861-1900) – один из крупнейших русских живописцев, которого за яркость и солнечность палитры нередко называют «русским импрессионистом».

И. Левитан. Вечерний звон.

полосами (стволами деревьев) в картине Ивана Шишкина[41] «Корабельная роща»!..

В картине Левитана линия горизонта (в правой части картины) по высоте делит пространство (небо – горизонт): (горизонт – нижняя кромка картины) в отношении «золотой пропорции».

В картине Шишкина ярко освещенная солнцем сосна, стоящая на первом плане, также делит длину картины по «золотому сечению». Справа от сосны – освещенный солнцем пригорок делит по« золотому сечению» правую часть картины по горизонтали.



И. Шишкин. Корабельная роща.

Таким примерам, как говорится, «несть числа». Конечно же, если Леонардо, Ботичелли и другие классики эпохи Возрождения, наверняка, «размечали» свои картины, то ни Левитан, ни Шишкин, ни многие другие художники различных школ и гильдий, возможно, и не подозревали, что они используют в своем искусстве «золотые пропорции». Они уже «нутром» чувствовали пропорции прекрасного, открытые гигантами прошлого. (Помните, как неожиданно для себя герой пьесы Мольера[42] «Мещанин во дворянстве» Журден узнает, что он всю жизнь говорил прозой?)

[41] **Иван Иванович Шишкин** (1832-1898), русский живописец и график, пейзажист. Член-учредитель российского товарищества художников-передвижников.

[42] **Жан Батист Мольер** (1622-1673), французский драматург, актер, театральный деятель.

При всем при том, не нужно забывать слова самого Леонардо о том, что «золотое сечение» ищут во всех отношениях от полутора до двух! Ведь возможно, что художники просто «бегут» от явной симметрии.

Еще в конце XIX века одним известным психологом был проведен тест на выявление у взрослых людей чувства прекрасного. Примерно полутысяче участников опыта – группе мужчин и женщин в примерно равной пропорции – было предложено посредством по парного сравнения оценить «эстетическое качество» десяти прямоугольников с отношениями сторон от 1:1 до 2:5. Сам критерий был сформулирован весьма нечетко: «какой из них больше ласкает глаз»?

Один из прямоугольников с отношением сторон 21:34 ($\approx$0,6765) был практически «золотым прямоугольником». Опыты оказались для него чрезвычайно благоприятными: около 35% выбрали именно его, а второе и третье места примерно с 25% заняли его «соседи» с соотношениями сторон 2:3 ($\approx$0,6667) и 20:29 ($\approx$0,6897)...

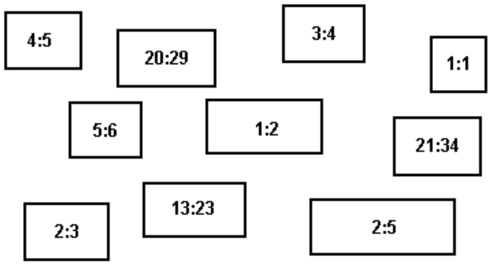


Схема психологического опыта.

Оказывается, есть некие пропорции, которые действительно «ласкают взгляд», а есть диссонирующие с нашими представлениями о красоте и пропорции. Возьмите красивое человеческое тело или лицо – мужчины либо женщины. Красота именно в сочетании всех элементов, в пространственном расположении их, в определенных пропорциях определенных частей тела и расстояний между ними. В то же время «чистая математика» работает далеко не всегда.

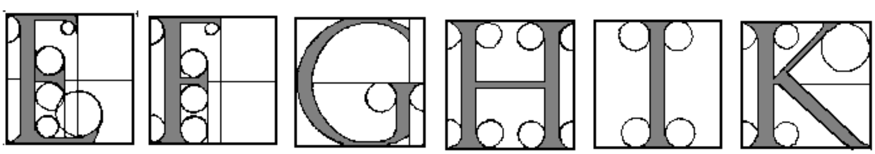
Известно, какую большую роль играет асимметрия: попробуйте «склейте» в компьютере, например, левую половину фотографии красивого лица с ее же собственным «зеркальным отражением» (в компьютере это сделать удивительно легко), вы обнаружите, что красота и неуловимое, необъяснимое очарование куда-то улетучилась...

Помните, у Гоголя[43] в «Женитьбе» Агафья Тихоновна мечтала: «Если бы губы Никанора Ивановича да приставить к носу Ивана Кузьмина...»? Наверное, сделай все по желанию Агафьи Тихоновны, она бы отшатнулась в ужасе от сотворенного «гибрида».

Где-то во второй половине прошлого века американские компьютерщики провели подобный эксперимент: они взяли наиболее красивые элементы лиц известных кинозвезд (глаза, уши, губы, брови) и скомпилировали некое «сверхкрасивое» лицо. Что же получилось в результате? Конечно, не монстр, но нечто не имеющее отношение к истинной красоте...

Так что не циркулем единым жив художник!

«Золотое сечение» проникло и в типографское дело. Конструированию шрифта Альбрехт Дюрер посвятил целую книгу, в которой представил весь латинский алфавит, положив в его основу квадрат и «золотую пропорцию». Пример одного из его шрифтов и принцип построения приведен на рисунке ниже.



Пример построения букв для шрифта Дюрера.

3.5. Числа Фибоначчи

Скажи, читатель: Не иначе,

---

[43] **Николай Васильевич Гоголь** (1809 - 1852), один из величайших писателей русской литературы.

Ты околдован Фибоначчи?
Лука Умищев

С историей «золотого сечения» непосредственным образом связано имя итальянского математика Леонардо Пизанского, более известного под именем Фибоначчи.

В свою «*Книгу абака*[44]», он поместил ставшую знаменитой «Задачу о кроликах»: «Некто поместил в пару крольчат в закрытый сад. Предположим, что каждая пара из двух кроликов, достигнув двухмесячного возраста, приносит приплод опять из двух кроликов. Сколько пар кроликов окажется в саду через год?»

Фибоначчи, или **Леонардо Пизанский**
(1170-1250)

Один из самых выдающихся математиков Средневековья. Он сыграл главную роль в течение последующих столетий в развитии математики в Европе. Фибоначчи ввел в математику арабские цифры, впервые в Европе использовал отрицательные числа. Математика обязана ему последовательностью, носящей его имя – так называемые числа Фибоначчи.

Подробнее см. в разделе «Пантеон».

Итак, каждая пара кроликов достигает зрелого возраста на второй месяц жизни, после чего производит на свет новую пару каждый месяц.

В начале первого и второго месяцев имеется всего одна изначальная пара кроликов, т.е. начало последовательности Фибоначчи имеет вид $\{1,1\}$.

[44]**Абака** – первый в мире «деревянный компьютер» (бухгалтерские счеты), широко используемый и до настоящего времени в странах Азии (включая Россию). Известно, что абака использовалась еще в 2000 до н.э. в Китае и Древнем Вавилоне. *Abaci* на латыни означает «*счет*».

Эта первая пара, наконец, порождает во втором месяце еще одну пару кроликов, так, что в начале третьего месяца в загоне оказывается уже две пары – старая и новая: {1,1,2}.

Старшая пара взрослых кроликов производит еще одну пару, а молодая пара в этот месяц неплодоносна, так, что в начале четвертого месяца последовательность имеет вид {1,1,2,3}.

Из этих трех пар две старшие пары плодоносны, так, что к началу пятого месяца последовательность становится {1, 1, 2, 3, 5} и так далее.

Уже через 100 месяцев число пар кроликов станет астрономическим: 354 224 848 179 261 915 075! (Конечно же, здесь стоит восклицательный знак, а не факториал ☺.)

Кстати, намного позже Фибоначчи, его теория подтвердилась на практике в Австралии. Поселенцы ввезли из Европы кроликов, которые начали безбожно плодиться, поскольку в Австралии никогда не было хищников. Кролики, как саранча, пожирали все посевы австралийских фермеров, от них буквально не стало житья.

Процесс размножения кроликов можно записать математически следующим образом. Обозначим через F_n число пар кроликов после n месяцев. Число пар кроликов после $n + 1$ месяцев F_{n+1}, будет равно числу пар, которое было на n-ом месяце, т.е. F_n, плюс число пар новорожденных кроликов. Поскольку кролики рождаются от пары кроликов возраста больше одного месяца, новорожденных кроликов будет F_{n-1} пар. Следовательно, справедливо соотношение

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1},$$

причем первые два члена заданы условиями задачи: $F_0 = 0$ и $F_1 = 1$.

Таким образом, получим рекуррентную числовую последовательность

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$$

которая была названа впоследствии рядом Фибоначчи.

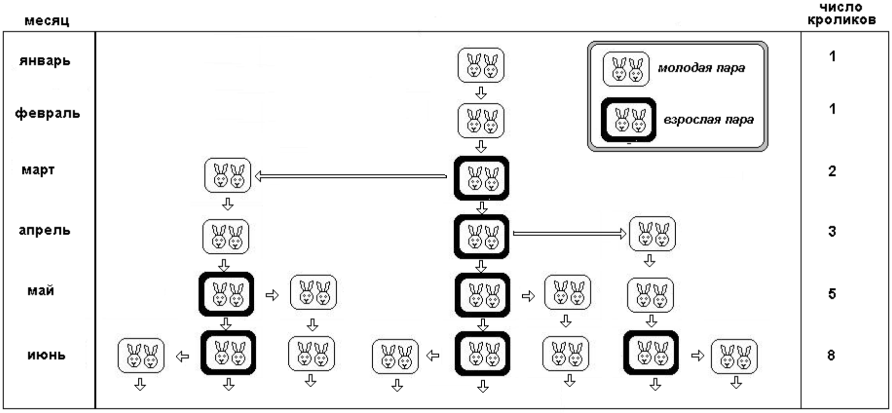


Схема размножения «кроликов Фибоначчи».

Так что же насчет связи чисел Фибоначчи с «золотой пропорцией»? Для ответа на этот вопрос рассмотрим, как меняется отношение $F_n : F_{n+1}$ с ростом n. Начальный ряд значений приведен ниже в таблице.

№	F_n	$F_n : F_{n+1}$
0	0	0
1	1	1.000000
2	1	0.500000
3	2	0.666667
4	3	0.600000
5	5	0.625000
6	8	0.615385
7	13	0.619048
8	21	0.617647
9	34	0.618182
10	55	0.6179775
11	89	0.6180556
12	144	0.6180258
13	233	0.6180371
14	377	0.6180328

...	...	...

Интересно то, что отношение $F_n : F_{n+1}$ с ростом n стремится к «золотой пропорции»!

Заметим, кстати, что тот же эффект стремления отношения $F_n : F_{n+1}$ к золотой пропорции с ростом n сохранится, если в качестве начальных F_0 и F_1 взять любые другие числа. Например, пусть F_0=3, а F_1=-1. Построим таблицу, аналогичную предыдущей, взяв эти новые начальные значения.

№	F_n	$F_n : F_{n+1}$
0	3	-3
1	-1	-0.5
2	2	2
3	1	0.333333
4	3	0.75
5	4	0.571429
6	7	0.636364
7	11	0.611111
8	18	0.62069
9	29	0.617021
10	47	0.618421
11	76	0.617886
12	123	0.61809
13	199	0.618012
14	322	0.618042
...	...	...

Как видно из таблицы, сходимость к «золотой пропорции» отношения $F_n : F_{n+1}$ и для новых начальных условий сохраняется. Причем, заметим, уже на 14-й итерации процесса различие в нашем случае наблюдается только в пятом десятичном знаке! Это и понятно: принцип построения новой последовательности тот же, и последовательность постепенно «забывает» начальные условия.

Фибоначчи не стал изучать математические свойства полученной им числовой последовательности 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ... , это за него сделали другие математики. Начиная с XIX века, математические работы, посвященные свойствам чисел Фибоначчи, по остроумному выражению одного математика, «начали размножаться как фибоначчиевы кролики». Одним из тех, кто много сделал для развития важного математического направления, начатого Фибоначчи, стал французский математик Франсуа Люка[45]. Он впервые ввел само название «числа Фибоначчи» и, кроме того, ввел в рассмотрение так называемые обобщенные числа Фибоначчи, описываемые следующей рекуррентной формулой:

$$G_n = G_{n-1} + G_{n-2}.$$

В зависимости от начальных членов G_1 и G_2 эта рекуррентная формула порождает бесконечное количество числовых последовательностей типа чисел Фибоначчи. Из всех возможных последовательностей, порождаемых этой рекуррентной формулой, кроме чисел Фибоначчи, наибольшее применение получили так называемые числа Люка L_n, которые задаются следующим рекуррентным соотношением

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}.$$

при начальных значениях $L_1 = 1$ и $L_2 = 2$. Последовательность чисел Люка имеет вид: 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, ...

Обычно рассматриваются числа Фибоначчи, F_n, и числа Люка, L_n , для случая, когда индексы n являются натуральными числами: 1, 2, 3, ... Но оказывается, что эти последовательности имеют смысл и для отрицательных значений индексов n: –1, –2, –3, ... Вновь полученные последовательности носят название расширенных чисел Фибоначчи и Люка соответственно. Расширенные числа Фибоначчи и Люка представлены ниже.

n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**…**

[45] **Франсуа Эдуард Анатоль Люка** (1842-1891), французский математик, важнейшие работы которого относятся к теории чисел и неопределенному анализу. Разработал критерий определения простых чисел Мерсенна.

F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	…
F_{-n}	0	1	-1	2	-3	5	-8	13	-21	34	…
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	…
L_{-n}	2	-1	3	-4	7	-11	18	-29	47	-76	…

Из таблицы видно, что члены последовательностей F_n и L_n обладают рядом интересных математических свойств. Например, для нечетных $n = 2k + 1$ члены последовательностей F_n и F_{-n} совпадают, то есть $F_{2k+1} = F_{-2k-1}$, а для четных $n = 2k$ они противоположны по знаку, то есть: $F_{2k} = -F_{-2k}$. Что касается чисел Люка L_n, то здесь все наоборот, то есть $L_{2k} = L_{-2k}$; $L_{2k+1} = -L_{-2k-1}$.

Если внимательно посмотреть на эту таблицу, нетрудно заметить, что существует правило, связывающее числа Люка и Фибоначчи:

$Ln = F_{n-1} + F_{n+1}$, где индекс n принимает 0, ±1, ±2, ±3, ...

Действительно, например, число Люка $L_4 = 7$ равно сумме двух чисел Фибоначчи $F_3 = 2$ и $F_5 = 5$.

Для любознательных читателей заметим, что числа Люка и Фибоначчи связаны между собой и друг с другом также и другими весьма интересными соотношениями, например:

$F_{n-1} \times F_{n+1} = F_n^2 - 1$, если n четное, и $F_{n-1} \times F_{n+1} = F_n^2 + 1$, если n нечетное, то есть $F_n^2 - F_{n-1} \times F_{n+1} = (-1)^{n+1}$; $L_n = F_n + 2F_{n-1}$; $L_n + F_n = 2F_{n+1}$.

Итак, оказывается, что числа Фибоначчи обладают рядом совершенно уникальных свойств. Как уже было замечено, отношение F_n к последующему F_{n+1} при $n \to \infty$ стремится к 0,618034..., т.е. числу «фи» (φ), а отношение F_n к F_{n-1}, естественно, к 1,618034... . Отношение чисел Фибоначчи, расположенных через одно в последовательности (т.е. F_n к F_{n+2}), сходится к 0,381966... , что является инверсией отношения F_n к F_{n-2}, т.е. числа 2,618034... .

«Фи» является единственным числом[46], которое после сложения с 1 дает свою же инверсию:

[46] Начиная с этого момента число «Фи» записывается только с тремя знаками после запятой ради лучшего зрительного восприятия результатов.

$$0.618+1=\frac{1}{0.618}.$$

Такие свойства числа «фи» порождают следующую последовательность равенств:

$0,618^2 = 1 – 0,618$,
$0,618^3 = 0,618 – 0,618^2$,
$0,618^4 = 0,618^2 – 0,618^3$, и т.д.

или, аналогичным же образом:

$1,618^2 = 1 + 1,618$,
$1,618^3 = 1,618 + 1,618^2$,
$1,618^4 = 1,618^2 + 1,618^3$, и т.д.

Можно также записать следующие интересные соотношения:

1) 1,618 – 0,618 = 1,
2) 1,618 × 0,618 = 1,
3) 1 – 0,618 = 0.382,
4) 0,618 × 0,618 = 0,382,
5) 2,618 – 1,618 = 1,
6) 2,618 × 0,382 = 1,
7) 2,618 × 0,618 = 1,618,
8) 1,618 ×1,618 = 2,618.

Есть и другие любопытные свойства последовательности Фибоначчи. Например, если любое число Фибоначчи (кроме 1 и 2), умножить на 4, то найдется такое число Фибоначчи, прибавление которого дает опять число Фибоначчи:

3 × 4 = 12; если взять число Фибоначчи 1, то 12+1= 13,
5 × 4 = 20; если взять число Фибоначчи 1, то 20 + 1 = 21,
8 × 4 = 32; если взять число Фибоначчи 2, то 32+ 2 = 34,
13 × 4 = 52; если взять число Фибоначчи 3, то 52+ 3 = 55,
21 × 4 = 84; если взять число Фибоначчи 5, то 84+ 5 = 89, и т.д.

Ряд Фибоначчи обладает рядом прямо-таки магических свойств, большинство из которых имеет самое прямое отношение к «золотому сечению»! Вот так: говорят, что «гора родила мышь». А здесь – наоборот: кролики Фибоначчи родили высоченную математическую гору, на которую продолжают взбираться все новые и новые поколения математиков!

3.6. Компьютерная графика и Числа Фибоначчи

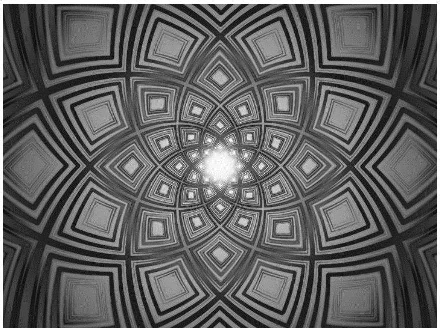
Как мы убедились, «золотая пропорция» действительно ласкает глаз... Возможно этим и объясняется появление многочисленных компьютерных программ, позволяющих строить разнообразные «ковры» и «спирали», для построения которых используется последовательность чисел Фибоначчи. Интересные образцы можно найти в Интернете, например, на сайтах «Quilted Symmetry» :

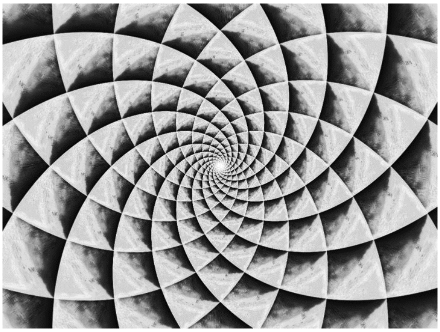
http://www.mi.sanu.ac.yu/vismath/daniel/index.html

или «Welcome to Our Quilt Project»:

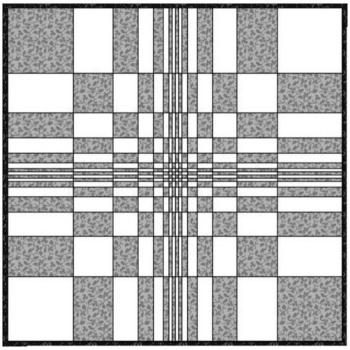
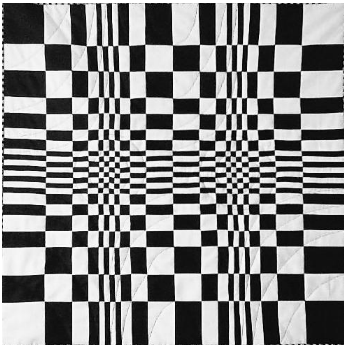
http://jwilson.coe.uga.edu/QuiltWebsite/mainpage.html.

Построенные фигуры действительно зачаровывают... Здесь и необычные спирали с пропорциями последовательности Фибоначчи...

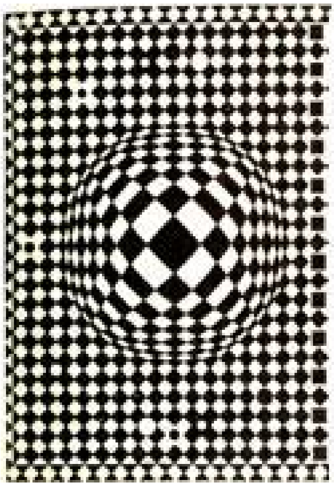
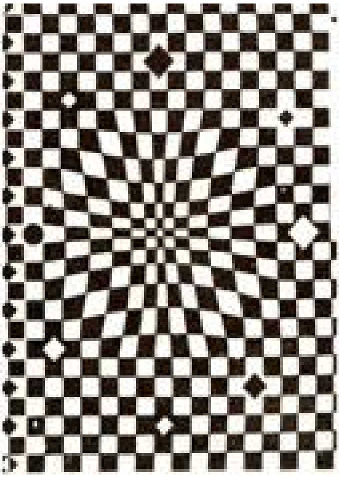




И не менее необычные «покрывала», в которых сохраняются все те же магические отношения последовательности Фибоначчи...

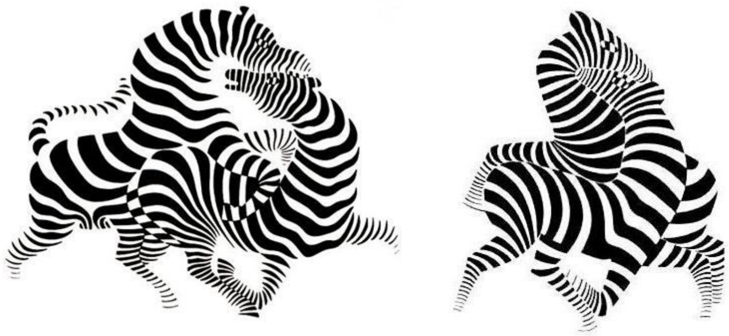
Погодите, погодите! А не напоминает ли вам это чего-то уже давно виденного? Вспомним фрагменты картин Вазарели[47]:

Конечно, искусственный интеллект – это хорошо, но пока еще естественный – лучше! Ведь еще не скоро компьютер сможет сгенерировать что-либо, подобное бесподобным зебрам Вазарели!

---

47 **Виктор Вазарели** (1908–1997), французский художник, венгерского происхождения. Теоретик искусства, один из основателей и крупнейший мастер оп-арта. (Этот термин впервые возник в середине 1960-х годов от сокращения словосочетания «оптическое искусство».)



Зебры Вазарели.

4. Пифагорова геометрия

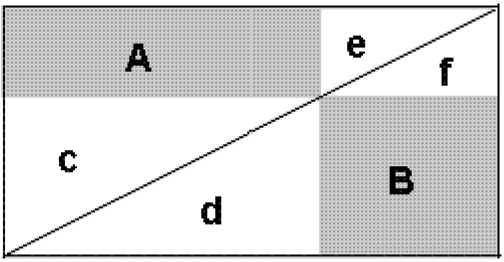
Не знающий геометрии
да не войдет сюда.
Надпись над вратами Академии Платона

4.1. Теорема Пифагора

Пифагоровы штаны во все стороны равны.
Старинный школьный стишок

«*Теорема*» – греческое слово, означавшее в древности всякое посвящённое богам зрелище: спортивные игры, театр, торжественные шествия. («Тео» по-гречески означает «бог».) Открытия, сделанные первыми греческими геометрами, показались грекам настолько замечательными, что их также стали называть теоремами. Приведем пример одной из таких теорем, открытой пифагорейцами – учениками и последователями Пифагора:

Если через произвольную точку на диагонали прямоугольника провести две прямые, параллельные *сторонам прямоугольника и разделяющие его на четыре прямоугольных части, то прямоугольные части, лежащие по обе стороны от диагонали, будут равны по площади.*



Одна из пифагорейских теорем.

Доказательство подобных теорем в Пифагорейской школе сводилось часто к одной фразе: «Смотри чертеж». Мы прибегнем к нему же. Хотя, впрочем, намекнем: по построению $A+c+e=B+d+f$, а $c=d$ и $e=f$.

Как просто и как элегантно!

Здесь уместно дать шутливое определение аксиомы, данное Евклидом[48]: *Если теорему так и не смогли доказать, она становится аксиомой.*

---

48 **Евклид** (365-300 до н. э.), великий древнегреческий математик, автор первых дошедших до нас теоретических трактатов по математике. ***Подробнее см. в Главе 6 «Пантеон» Части 1.***

Пифагор Самосский

(570 - 500 до н.э.).

Один из величайших ученых всех времен. Основоположником своих дисциплин его считают математики, астрономы, акустики, биологи, философы и др. В конце VI века до н.э. он создал в южной Италии научное братство («пифагорейцев»), продолжавшее активно работать ещё несколько поколений после смерти основателя. Из этой школы вышли выдающиеся политические и государственные деятели, историки и математики.

Подробнее см. в Главе «Пантеон».

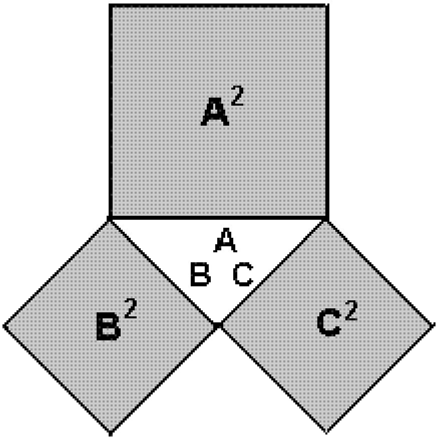
Предание гласит, что Пифагор Самосский является автором теоремы, носящей его имя. Известно даже доказательство этой теоремы, приписываемое самому Пифагору.

Теорема Пифагора формулируется так:

Во всяком прямоугольном треугольнике квадрат, построенный на гипотенузе А, равен по площади сумме квадратов, построенных на катетах B и C:
$A^2=B^2+C^2$.

Уместно заметить, что сам Пифагор сделал так много, что некоторые исследователи считают, что его имя было использовано его учениками в качестве некоего коллективного псевдонима. Но не будем докапываться до исторической истины с теоремой Пифагора – этот великий ученый сделал столько, что и без этой теоремы он стоит в первых рядах ученых всех времен и народов. Кроме того, если у него были такие достойные ученики – опять же, честь и хвала Пифагору!

Наши прапрабабушки и прапрадедушки, учившиеся в гимназиях еще при царе, придумали очень удобную шуточную

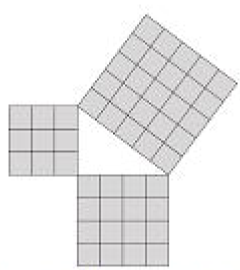


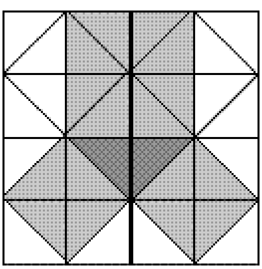
"Пифагоровы штаны".

«запоминалку»: «Пифагоровы штаны во все стороны равны». Смешно и запоминается на всю жизнь!

Об удивительном свойстве прямоугольных треугольников люди знали и до Пифагора, но применительно к частным случаям. Например, непосредственные измерения показывают, что прямоугольный треугольник, катеты которого равны 3 и 4 единицам, имеет гипотенузу, равную 5 единицам: достаточно посчитать маленькие квадратики.

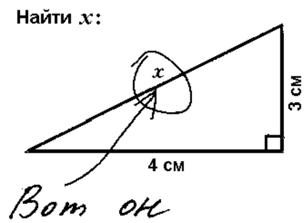
Этот треугольник был известен еще древнеегипетским землемерам и архитекторам: площади квадратов, построенных на его катетах, равны $3^2=9$ и $4^2=16$ квадратным единицам, а площадь квадрата, построенного на его гипотенузе, равна $5^2=5$ квадратным единицам (9 + 16 = 25). Такой треугольник иногда даже называют египетским – древние египтяне использовали его для построения прямого угла.


"Египетский" треугольник.



Простейшее чисто зрительное доказательство теоремы Пифагора получается в случае равнобедренного прямоугольного треугольника. Вероятнее всего, именно с него и начиналась теорема. В самом деле, достаточно просто посмотреть на чертеж внизу, чтобы убедиться в справедливости теоремы: 8 маленьких треугольников образуют два квадрата, построенных на катетах треугольника, расположенного в центре, и 8 же треугольников образуют квадрат, построенный на гипотенузе того же треугольника.

Кстати, это довольно старая картинка, подобную ей можно найти во многих древних рукописях..



А вот как эту теорему доказал небезызвестный Вовочка...

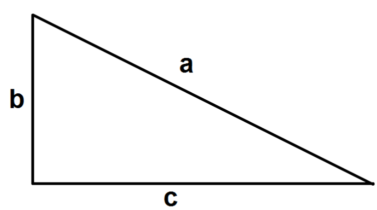
4.2. Разные доказательства Теоремы Пифагора

> Если бы геометрические аксиомы задевали интересы людей, они бы опровергались.
>
> ***Томас Гоббс***[49]

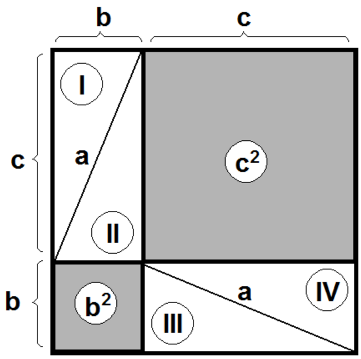
Рассмотрим сначала доказательство теоремы Пифагора методом, который приписывается самому великому математику античности.

Возьмем прямоугольный треугольник.

Построим квадрат, сторона которого равняется сумме катетов *b* и *c* данного прямоугольного треугольника.

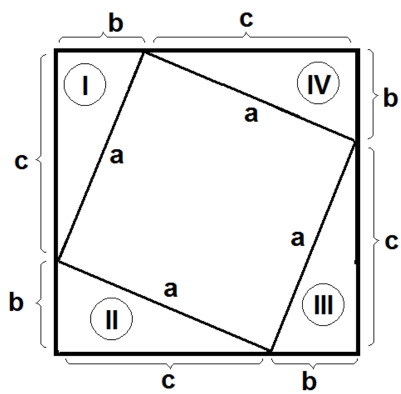


[49] ***Томас Гоббс*** (1588- 1679), английский философ-материалист.



Разделим этот квадрат на два квадрата b^2 и c^2 и на два равных прямоугольника со сторонами b и c, проведя соответствующие прямые, как это сделано на чертеже. В свою очередь, разделим оставшиеся после выделения квадратов прямоугольники на четыре равных прямоугольных треугольника I, II, II и IV. Площадь каждого из треугольников равна $bc/2$, т.е. площадь всех четырех равна $2bc$. Отсюда следует, что квадрат со стороной $b+c$, уменьшенный на площадь $2bc$, дает b^2+c^2.

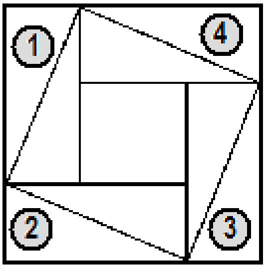
Теперь в том же большом квадрате со стороной, равной $a + b$, разместим те же четыре треугольника I, II, II и IV так, как показано на следующем рисунке. Мы видим, что внутри получился квадрат со стороной, равной гипотенузе треугольника.



Если теперь из этого большого квадрата опять исключить площадь, равную $2bc$, то останется площадь a^2.

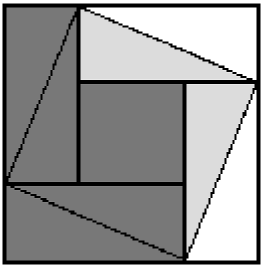
Итак, мы доказали (вернее, Пифагор доказал), что $a^2 = b^2+c^2$.

***



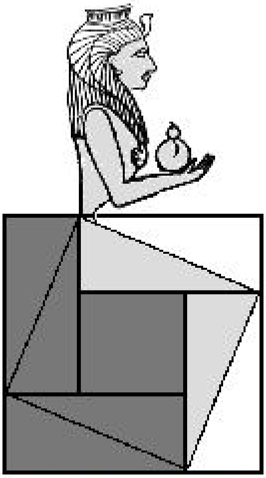
В принципе, доказательство, похожее на Пифагорово, давалось и в Древнем Китае. Рассмотрим опять большой квадрат со сторонами, равными $b+c$.

Понятно, что исключить четыре «внешних» треугольника 1, 2, 3 и 4, то останется внутренний квадрат, построенный



на гипотенузе *a* и с площадью a^2. Теперь построим из фрагментов большого квадрата фигуру, которую называли «кресло невесты».

Затемненная часть, действительно, напоминает кресло, а при некотором воображении два прилегающих к «креслу» треугольника (слегка отмечены точками) можно принять за женские ноги, как бы их нарисовал Пабло Пикассо...

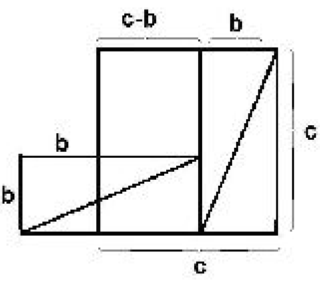


А вот и принцесса на троне!

Это «кресло» составлено из двух квадратов, один со стороной *b,* а другой со стороной *c.* Значит, если мы в этом случае отбросим четыре незатемненных треугольника, то получим площадь b^2+c^2.

Тем самым теорема доказана: $a^2 = b^2+c^2$.

Индийский математик Бхаскара Ачарья[50] поместил в одном из своих манускриптов в качестве доказательства следующий чертеж, снабдив его чисто греческим напутствием: «Смотри чертеж!»



Нужно заметить, что известно почти четыре сотни различных доказательств теоремы Пифагора, включая одно, предложенное президентом США Гарфилдом[51].

---

50 **Бхаскара Ачарья** (1114 - 1178), крупнейший индийский математик и астроном.

51 **Джеймс Абрам Гарфилд** (1831-1881), 20-й президент США, убитый через полгода после вступления на пост (конечно, не за доказательство Теоремы Пифагора ☺).

Сознаюсь – мне было как-то приятнее смотреть на чертеж Пифагора и по нему понимать доказательство. Оно почему-то мне кажется и наиболее изящным, и наиболее «прозрачным».

ПАНТЕОН

Пифагор Самосский

(580 - 500 до н.э.)

Заслуги Пифагора-учёного велики и необъятны: в ряд патриархов - основоположников своих наук его ставят математики, астрономы, акустики, биологи, философы и многие другие.

Пифагор Самосский считается первым «чистым» математиком. Хотя Пифагор был, бесспорно, одной из величайших фигур античности, удивительно мало достоверного известно о его жизни и о его научных работах. Не сохранилось ни одной его рукописи, возможно, из-за того, что вся деятельность пифагорейского братства была окутана пеленой тайны и мистицизма.

Пифагор родился на острове Самос в Эгейском море. Его отец, купец из Тира Мнесарк, во время голода на острове доставил туда партию зерна, за что местный тиран[52] жаловал ему гражданство. Мать Пифагора, которую звали Пифаис, была уроженкой Самоса.

По легенде рождение Пифагора было в пророчестве Дельфийского оракула, почему его имя и означает «предсказанный Пифией»[53]. Однако, есть и более прозаическая версия: Мнесарк назвал своего сына в честь любимой жены Пифаис. (А вот сама Пифаис могла быть названа и в честь Пифии, кто знает?)

Основные сведения о Пифагоре содержатся в его жизнеописании, составленном Ямбликусом[54] много столетий спустя. О детстве Пифагора тоже известно немного, но говорят, что он был образован, любил поэзию, знал наизусть Гомера[55] и хорошо играл на лире.

Пифагор получил самое лучшее образование и воспитание, какое могли обеспечить состоятельные и просвещённые родители. Причём, образование не только интеллектуальное. По преданию он выиграл соревнования по кулачной борьбе в одной из первых олимпиад, хотя судьи не хотели допускать его к боям из-за малого роста. До конца жизни он ратовал за гармоничное развитие тела, духа и интеллекта.

---

52 **Тиранами** в Древней Греции называли правителей, захвативших государственную власть незаконным путем.

53 **Пифия** была жрица храма бога Аполлона в городе Дельфы («Дельфийский оракул»). Ее имя происходит от имени дракона Питона, которого убил бог Аполлон. Пифия была своеобразным посредником между Аполлоном и смертными, сообщая им об их судьбе, предначертанной богами.

54 **Ямбликус Халкидский** (245-325), античный философ, глава Сирийской школы неоплатонизма. Греческое имя «*Ямбликус*» является калькой с сирийского «*он царь*». В 10-томном труде, посвященном пифагорейскому учению, дал наиболее полное жизнеописание Пифагора, основанное в основном на легендах и немногих исторических документах.

55 **Гомер**, греческий поэт, считающийся автором Илиады и Одиссеи, двух больших эпопей, открывающих историю европейской литературы. О жизни Гомера нет практически никаких сведений. Историко-географический и языковой анализ Илиады и Одиссеи позволил датировать их примерно VIII в. до н.э.

Юношей, он, видимо, был учеником Ферекидеса[56] с острова Лесбос[57] а также Фалеса[58] и его ученика Анаксимандра[59] в Милете[60]. Эти три знаменитых философа оказали большое влияние на Пифагора и привили ему интерес к геометрии и космологии.

Говорят, что около 535 года до н.э. Пифагор, предположительно по совету Ферекидеса или Фалеса, отправился в Египет, где провел около 10 лет, учась у египетских жрецов в храмах Мемфиса, Гелиополиса и Диополиса. Он даже принял сан священника, что позволило ему проникнуть в некоторые святая святых египетской науки, хотя считается, что к тому времени у него уже были основательные сведения, полученные от его греческих учителей.

В 525 году до н.э. Египет был завоеван персами, Пифагор попал в плен и был отправлен в Вавилон, где пребывал в рабстве около 12 лет. По одной версии, он был выкуплен греческим придворным лекарем и отпущен на свободу, а по другой версии персидский царь Дарий, наслышанный о знаменитом греке, разрешил ему вернуться на родину. Во всяком случае, Пифагор вернулся на родину, на остров Самос, когда ему было уже 56 лет...

Но недолго удалось побыть ему на родине: страной правил жестокий тиран Поликрат. Пифагор вскоре покинул Самос и оказался в городе Кротоне, расположенном в греческой колонии на юге Апеннинского полуострова. Здесь он с группой друзей организовал полурелигиозное – полунаучное братство и школу. Школа была открыта как для мужчин, так и для женщин.

---

[56] **Ферекидес** (расцвет деятельности около середины VI века до н.э.), античный религиозный философ, известный своими теориями переселения бессмертных человеческих душ в других людей, животных и даже в растения. Видимо, был основоположником греческой натурфилософии.

[57] Как видите, было время, когда на этом острове жили не только лесбиянки ☺.

[58] **Фалес Милетский** (635-543 до н.э.), греческий философ до-Сократского периода, один из Семи Мудрецов античности. Считается основоположником древнегреческой философии и отцом науки вообще.

[59] **Анаксимандр Милетский** (610-546 до н.э.), второй по величине философ Ионии, ученик и сподвижник Фалеса.

[60] Крупный греческий портовый город в Малой Азии (теперь Турция).

Школа была доступна для широкого круга, однако стать членом «внутреннего круга» философов и математиков, которые именовались «*математикои*», было уже гораздо труднее. Принимали в члены этой группы после долгих и тщательных испытаний. Главными этическими нормами пифагорейцев были дружба между членами братства, бескорыстие и честность. Пифагор учил своих последователей, что «друг – это второе я» (*alter ego*) и что «дружба – это гармоничное равенство».

Система обучения в пифагорейской школе была длительной и жестокой. Кандидаты в ученики первые несколько лет не имели права даже на вопрос, они могли только слушать учителя. Пройдя испытание послушанием и скромностью, они переходили в ранг учеников и лишь после многих лет учёбы некоторые удостаивались чести называться учителями – пифагорейцами.

Перед отходом ко сну, каждый пифагореец был обязан совершить своеобразный обряд, отвечая сам себе на вопросы: «Все ли мои поступки сегодня были правильны? Не сделал ли я сегодня чего-либо недостойного? Что я не сделал из того, что должен был сделать?»

Нужно заметить, что пифагорейцы не были организованы в «научно-исследовательский институт» или в учебное заведение. Это, скорее, было религиозно-философское сообщество единомышленников, проповедовавшее идею, что мироздание зиждется на математических истинах. И именно эта философская концепция была основным стимулом постижения математики и изучения свойств различных математических объектов.

Но математика не была единственным предметом изучения в школе пифагорейцев. Она здесь шла рука об руку с музыкой, здесь учили медицине и стихосложению, лекции по методам дедуктивного доказательства сменялись проповедями нравственного совершенствования...

В астрономии Пифагор учил, что Земля имеет сферическую форму и расположена в центре Вселенной. Он же уже знал, что орбита Луны наклонена к земному экватору. Он также первым обнаружил, что «вечерняя звезда» и «утренняя звезда» – это одна и та же планета Венера.

Пифагор был и основоположником «математической теории музыки». Он первым объяснил принципы музыкальной гармонии.

Ямбликус, о котором мы уже упоминали выше, так рассказывает о том, как Пифагор пришел к открытию принципов, лежащих в основе музыкальной гармонии:

> «*Однажды Пифагор был глубоко погружен в размышления о том, как бы изобрести механическое устройство для слуха, которое было бы надежным и незамысловатым. Такое устройство было бы подобно циркулям, линейкам и оптическим инструментам, измышленным для зрения...*
>
> *Божественная удача распорядилась так, что Пифагор проходил как-то раз мимо кузницы, в которой работали кузнецы, и услышал удары молотов. Он обратил внимание, что среди разнообразных гармоничных звуков вдруг раздавался неприятный, режущий ухо звук*».

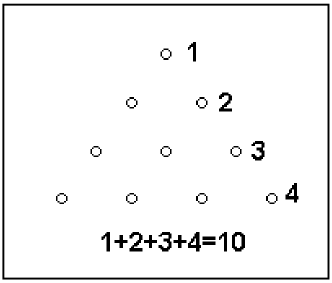
Как рассказывает далее Ямбликус, Пифагор, сгорая от нетерпения, вбежал в кузницу, чтобы понять, как возникает гармония молотов. Рассмотрев хорошенько молоты, которыми работали кузнецы, Пифагор понял, что те, которые при одновременном ударе издавали гармоническое звучание, отличались тем, что их массы образовывали друг с другом простые отношения. Иначе говоря, молоты, вес которых составляет половину, две трети или три четверти веса наиболее тяжелого молота, порождают гармонические звучания.

Уже говорилось, что сам Пифагор был прекрасным музыкантом, игравшем на лире. Он же впервые стал систематически использовать музыку при лечении некоторых (по-видимому, в основном нервных) болезней.

Пифагорейцы делили науку на четыре части: арифметику, геометрию, астрономию и гармонию (учение о музыке).

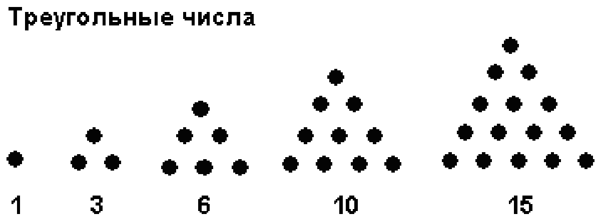
Наука о числах – арифметика – лежала, по их мнению, в основе всей жизни и была вполне материальна. Числа представлялись как совокупности камешков (камень – *calculus*, отсюда и пошли слова вычисление, калькулятор и пр.), образующих геометрические фигуры, выложенные на земле. Естественно, при таком подходе речь может идти только о натуральных числах. Но зато открывается простор для геометрического наглядного представления арифметических действий, и пифагорейцы широко пользовались геометрическими доказательствами, например таких чисто алгебраических соотношений, как разложение квадрата суммы.

Многие хорошо известные в современной математике свойства чисел (четные, нечетные, совершенные и др. числа) также впервые были обнаружены и описаны Пифагором. Пифагор

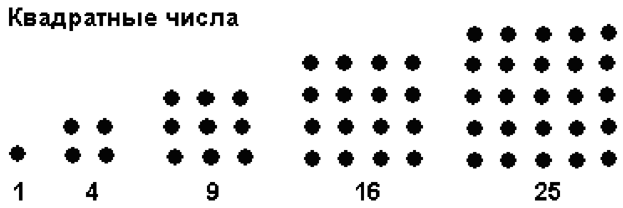


персонифицировал числа, приписывал им сверхъестественные свойства: «Каждое число имеет особый характер, особое лицо. Есть мужские числа и женские числа; есть числа совершенные и неполные; прекрасные и уродливые. Число десять является наилучшим из всех: оно включает в себя четыре первых числа – один, два, три и четыре, которые, в свою очередь, образуют совершенный треугольник».

«Треугольными числами» пифагорейцы называли возрастающие последовательности чисел, образованные перечислением точек в треугольниках, построенных следующим образом:

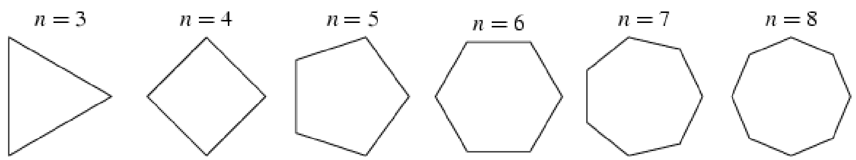


Аналогично строилась и последовательность «квадратных чисел»:

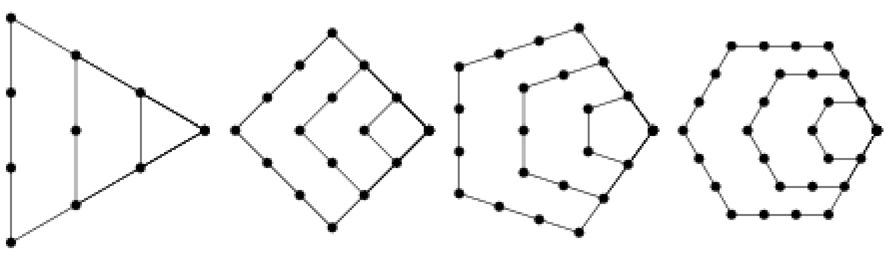


Пифагорейцы заметили сумма двух соседних «треугольных чисел» равна соответствующему «квадратному числу», например, 1+3=4, 3+6=9, и так далее.

Они умели строить относительно большое число всевозможных правильных многоугольников:



Так что ими были введены и другие «числа многоугольников». Принцип построения последовательности таких чисел понятен из следующего рисунка.



Помимо веры в магическую силу чисел, пифагорейцы были известны еще и тем, что они верили в переселение душ. Кроме того, они были известны и своими необычными для того времени идеями, которые сейчас назвали бы «гражданскими свободами»: они были убеждены в равенстве полов, они считали, что рабы достойны такого же отношения, как и свободные граждане, и что к животным нужно относиться, как к существам имеющим душу.

Пифагорейцы выдвинули идею шарообразности строения Вселенной. Они считали, что Земля имеет форму шара и находится в центре. Солнце, Луна, планеты и звёзды движутся вокруг Земли по своим сферам. Всего сфер семь и расположены они так, что образуют семиструнную арфу, играющую при их движении музыку сфер. Обычно люди не слышат её из-за суеты жизни, и лишь после смерти некоторые из них смогут насладиться её неземной красотой. И только самые избранные, как Пифагор, могут слышать её и при жизни.

В пифагорейской школе впервые установили связь между высотой тона и длиной струны или трубы. Нашли числовые закономерности и сформулировали первые математические соотношения акустики.

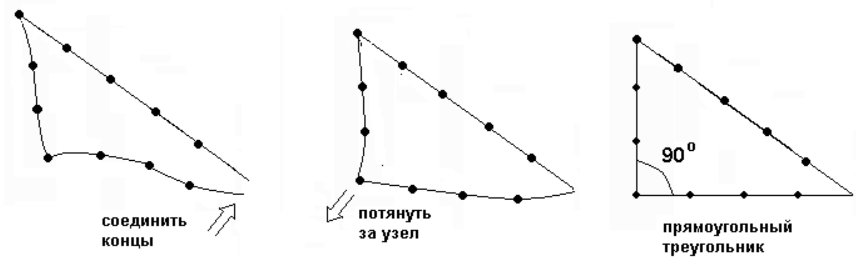
Вскоре после основания братства Пифагор придумал слово «*философ*» и тем самым провозгласил цели школы. Во время Олимпийских игр Леон, правитель Флиуса, спросил Пифагора, как бы тот охарактеризовал себя. Пифагор ответил: «Я философ», но Леону не приходилось прежде слышать этого слова, и он попросил Пифагора объяснить, что оно означает. Пифагор ответил:

«Жизнь, правитель Леон, можно уподобить происходящим сейчас Олимпийским играм: в собравшейся здесь огромной толпе одних привлекает выгода, которую они надеются извлечь, других — надежды и честолюбивые замыслы, они надеются обрести известность и славу. Но есть среди них немного и таких, кто пришел сюда, чтобы увидеть и понять все, что здесь происходит.

То же самое относится и к жизни. Одни обуяны любовью к благосостоянию, другие слепо следуют безумной лихорадочной жажде власти и господства, но лучший из людей посвящает себя познанию смысла и цели самой жизни. Он стремится раскрыть тайны природы. Такого человека я называю философом, ибо хотя ни один человек не может постичь всю мудрость мира, он может любить мудрость, как ключ к тайнам природы».

Интересно заметить, что известная всем «Клятва Гиппократа»[61], главным принципом которой является «Прежде всего, не навреди», своими корнями уходит в клятву, которую давали при вступлении во «внутренний круг» пифагорейского братства.

Конечно, в наши дни большинство ассоциирует имя Пифагора со знаменитой теоремой, носящей его имя. Нужно заметить, что суть теоремы была известна еще в древних Вавилоне и Египте почти за тысячелетие до Пифагора. Прямоугольный треугольник с длиной катетов 3 и 4 и с гипотенузой 5 назывался даже «*египетским треугольником*». Древние египтяне брали веревку с 11 узлами, делящими её на 12 равных частей, и строили с ее помощью прямой угол для того, чтобы, например, размечать прямоугольные участки земли.



Однако, первое известное доказательство Теоремы Пифагора принадлежит именно самому Пифагору.

Первые же упоминания самого имени Пифагора появились лишь спустя почти полтысячелетия после его смерти в работах Цицерона[62] и Плутарха[63].

---

[61] **Гиппократ** (460 –380 BC), прославленный древнегреческий исцелитель, называемый обычно «*Отцом медицины*». В соответствии с легендой, он является потомком мифологического Эскулапа (греческий бог здоровья), который в свою очередь был сыном одного из главных древнегреческих богов – Аполлона. Он считается автором «Клятвы Гиппократа», которую традиционно и по сей день дают врачи, заканчивающие медицинские учебные заведения.

[62] **Марк Тулий Цицерон** (106-43 до н.э.), величайший оратор Древнего Рима, известный также как политик и философ. Был осужден и обезглавлен его политическими врагами.

[63] **Плутарх** (46-127), знаменитый греческий историк, биограф и эссеист.

Идеи его оказали огромное влияние на современников, особенно на тогдашнюю молодежь. Он даже был обвинен в безбожии и совращении молодежи (метод борьбы с политическими противниками благополучно доживший до наших дней!), однако его обвинители проиграли.

Говорят, что один из могущественных граждан Кротона по имени Килон захотел стать «математикоем», но Пифагор отверг его. Это привело к разгрому всей общины, а затем и к физическому уничтожению многих пифагорейцев. Что касается смерти самого Пифагора, то по одной версии он умер в ссылке в городе Метапонтуме, в греческой колонии на берегу Ионического моря, а по другой версии, он был убит при одной из атак жителей Кротона на пифагорейскую общину. Что достоверно известно, так это то, что школа Пифагора была закрыта, а многие его последователи убиты.

***

Из почерпнутого у разных народов, Пифагор создает свою собственную систему мира, в основе которой лежит тезис о взаимосвязи всего существующего в природе и о равенстве всех людей перед лицом природы. Целью жизни он провозгласил стремление к совершенству. А методом достижения совершенства – исполнение нравственных правил.

Мировоззрение Пифагора и его моральные принципы хорошо видны из так называемых «*Золотых стихов Пифагора*». Вот некоторые выдержки из них:

- Будь другом истины до мученичества, но не будь ее защитником до нетерпимости.
- Будь справедлив и в словах своих, и в делах.
- Великая наука жить счастливо состоит в том, чтобы жить только в настоящем.
- Великий талант жить счастливо заключается в умении радоваться сегодняшнему дню.
- Говори добрые слова и делай полезные дела; не гневись на друзей за малые прегрешения.
- Две вещи делают человека богоподобным: жизнь для блага общества и правдивость.
- Делай великое, не обещая великого.

- Для познания нравов какого ни есть народа старайся прежде изучить его язык.
- Для того чтобы жить долго, приобрети для себя старого вина и береги старого друга.
- Если можешь быть орлом, не стремись стать первым среди галок.
- Если слышишь ложь, относись снисходительно.
- Если спросят: что есть древнее богов? - ответствуй: страх и надежда.
- Живи так, чтобы друзья твои не стали твоими врагами; но делай так, чтобы твои недруги обратились в твоих приятелей.
- Жизнь – это театр: зачастую не лучшие люди занимают лучшие места.
- Жизнь подобна игрищам: иные приходят на них состязаться, иные торговать, а самые счастливые - смотреть.
- Из двух человек одинаковой силы сильнее тот, кто прав.
- Избери лучшее, а привычка сделает его приятным и легким.
- Избери себе друга; ты не можешь быть счастлив один: счастье есть дело двоих.
- Измеряй свои желания, взвешивай свои мысли, исчисляй свои слова.
- Истинное отечество там, где есть благие нравы.
- Как ни коротки слова «да» и «нет», все же они требуют самого серьезного размышления.
- Лесть подобна оружию, нарисованному на картине: она доставляет приятность, а пользы никакой.
- Молчи, пока не можешь сказать ничего лучшего, чем молчание.
- На поле жизни, подобно сеятелю, ходи ровным и постоянным шагом.
- Начало есть половина дела.
- Не будь членом учёного общества: самые мудрые, составляя общество, делаются простолюдинами.
- Не гоняйся за счастьем: оно всегда находится в тебе самом.
- Не делай ничего постыдного ни прилюдно, ни в одиночестве. Первым твоим законом должно быть уважение к себе самому.

- Не старайся делать того, в чем ничего не смыслишь, но всегда учись тому, что может пригодиться; только так ты сделаешь свою жизнь приятной для себя самого.
- Не суди о своем величии по длине тени на закате дня.
- Никогда не поступай так, чтобы тебе впоследствии было стыдно за свои деяния.
- Ничему не удивляйся: удивление произвело богов.
- Обдумывай свои поступки, дабы избежать глупости: всякий, кто говорит или действует бездумно, является бесполезным человеком.
- Оберегай детей своих от слез, иначе им нечем будет оплакать тебя на твоей могиле.
- Омывай полученную обиду не в крови, а в Лете, реке забвения.
- Почитай священными числа, вес и меру, как детей изящного равенства.
- Прежде всего, помолись бессмертным богам, как это должно.
- Приучай себя жить честно и достойно, избегай роскоши.
- Просыпаясь утром, спроси себя: "Что я должен сделать? ". Вечером, прежде чем заснуть: "Что я сделал? ".
- Равно опасно и безумному вручать меч и бесчестному власть.
- Старайся прежде быть мудрым, а ученым - когда будешь иметь свободное время.
- Трудно идти по жизни несколькими путями одновременно.
- Уважай родителей и родственников; что касается остальных, то будь дружелюбен со всяким, кто того заслуживает.
- Уходя на чужбину, не оборачивайся.
- Человек, оказавшийся в плену своих страстей, свободным быть не может.
- Чти клятву.
- Что бы о тебе не думали, делай то, что считаешь справедливым. Будь одинаково равнодушен и к порицанию, и к похвале.
- Чтобы жить долго, купи хорошего старого вина и береги своего старого друга.

- Шутку, как и соль, должно употреблять с умеренностью.

Леонардо Фибоначчи
(Леонардо из Пизы)
(1175-1228)

Памятник Фибоначчи на кладбище в Пизе.

Леонардо Фибоначчи - это ярчайший метеор, промелькнувший на темном небе западно-европейского средневековья. Возможно, он был величайшим гением в теории чисел в двух тысячелетний период между

Леонардо из Пизы более известен по своему прозвищу «*Фибоначчи*», которое произошло от «*filius Bonacci*», что означает «сын Боначчи». Фамилия же его отца «*Bonacci*» переводится, как «*человек хорошего нрава*».

О жизни самого Фибоначчи известно немного. Даже его единственный портрет написан намного позже его смерти и предполагается, что это некий собирательный образ, составленный по словесному описанию... Затем был создан по тому же принципу и скульптурный образ, установленный на родине на могиле великого математика...

Точная дата рождения Леонардо не известна. Предполагается, что Фибоначчи родился в 1175 году в Пизе (Италия). Его отец, Гилиельмо Боначчи, был дипломатом, которому было поручено наладить таможенную службу в Буджии (провинция на территории современного Алжира).

Он взял в Алжир своего сына, чтобы дать ему там хорошее образование. Отец хотел, чтобы Леонардо стал купцом, поэтому он выбрал школу, в которой основное внимание уделялось математике. Фибоначчи сам писал об этой поре своей жизни:

> *«Когда моего отца послали представителем Республики Пиза в Буджии, он захватил меня с собой, когда я еще был ребенком, чтобы держать меня под своим оком и чтобы дать мне образование в школе, где хорошо учили счету. Там я был обучен искусству обращения с девятью индийскими символами, благодаря прекрасному преподаванию, а вскоре искусство вычислений стало приносить мне высочайшее наслаждение».*

Фибоначчи очень много путешествовал. Он вернулся в Пизу только в 1200 году, после чего посвятил все свое время и весь свой талант служению родному городу.

Фибоначчи написал несколько математических сочинений, среди которых его книга «Книга Абаки», или «Книга о вычислениях», является несомненным научным шедевром. Она была завершена в 1202 году, а затем переиздана в 1228 году. Книга состоит из 15 глав: о новых индийских обозначениях цифр (глава 1); о сложении, вычитании, умножении и делении чисел (главы со 2 по 5); об арифметических действиях над числами, содержащими дроби (главы 6 и 7); об образовании цен на товары и принципах обмена товаров (главы с 8 по 13); о нахождении квадратных и кубических корней (глава 14); и, наконец, некоторые сведения из геометрии и алгебры (глава 15). Кстати, книга эта содержит и знаменитую задачу о кроликах, которая уже была рассмотрена выше.

Фибоначчи познакомил Европу с индо-арабской позиционной децимальной системой исчисления. Эта книга побудила большинство его современников перейти на эту новую систему счета. Фибоначчи задумывал это свое основное сочинение как пособие для купцов, однако по своему значению оно вышло далеко за эти узкие рамки, став воистину своеобразной математической энциклопедией эпохи средневековья.

Фибоначчи написал много других замечательных книг, которые служили учебниками на протяжении многих лет. В них он не только дал вторую жизнь античной математике, но также внес существенный свой собственный вклад.

Он жил во время, когда еще не было книгопечатания, поэтому существовала лишь одна возможность – переписывание манускрипта. В связи с этим число экземпляров книги, циркулировавших в то время, было ничтожно. Однако до наших дней все же дошли основные труды великого математика, помимо «Книги о вычислениях»: «*Книга о квадратных числах*», «*Практическая геометрия*», «*Цветы*».

«*Книга о квадратных числах*», написанная в 1225 году, является, по-видимому, одним из наиболее впечатляющих, хотя и не самых известных произведений Фибоначчи. Книга посвящена теории чисел, где он, наряду с другими вопросами, исследовал и Пифагоровы тройки. Он вывел правило нахождения таких троек, которое в современных обозначениях можно записать в виде $n^2 + (2n+1) = (n+1)^2$.

Он писал:

«Думая о происхождении всех квадратов, я обнаружил, что все они образуются из регулярной последовательности нечетных чисел. Единица есть квадрат самой себя. Добавим к этому первому квадрату следующее нечетное число – 3 и получим следующий квадрат – 4, корень из которого равен 2. Если к 4 прибавить следующее нечетное число – 5, то получаем 9, число, являющееся квадратом 3. И далее последовательность квадратов появляется таким же образом».

При построении «Пифагоровых троек» Фибоначчи замечает:

«Когда я хочу найти два квадрата, которые при сложении дают опять квадрат, я беру любой квадрат, являющийся нечетным числом, и нахожу другой квадрат путем всех прибавления нечетных чисел, которые не превышают исходного числа. Например, я беру 9 в качестве одного из упомянутых квадратов и добавляю к этому числу все нечетные числа, меньшие его, т.е. 1, 3, 5 и 7, которые в сумме тоже квадрат – 16. Прибавляя 9 к 16, получаем опять квадрат – 25».

Фибоначчи решил и много других интересных задач из теории чисел. Например: (1) не существует таких чисел x и y, что числа $x^2 + y^2$ и $x^2 - y^2$ оба были бы квадратами; (2) число $x^4 - y^4$ не может быть квадратом ни для каких чисел x и y, а также ряд других интересных утверждений.

Работы Леонардо по теории чисел были почти полностью игнорированы его современниками и оставались непонятыми и непринятыми в течение нескольких веков: он слишком опередил свое время.

В 1220 г. императором Священной Римской империи стал Фридрих Великий[64]. Будучи просвещенным монархом, он через ученых своего двора начал поддерживать связь с Фибоначчи, который в это время жил и работал в Пизе. Один из придворных императора представил для решения великому математику несколько интересных задач. Три наиболее интересных из них Фибоначчи решил и поместил в книгу «Цветы», которую и послал императору.

Существует версия, что название этой книги выражает то, что алгебра есть «Цветок математики». Может быть...

Однако мы знаем, как люди любят фабриковать интересные «исторические факты». Например, в некоторых источниках читатель может найти, что число Ф (фи), соответствующее «золотой пропорции» названо так в честь античного скульптора Фидия (в греческом написании Φιδιοσ), поскольку тот часто использовал «золотую пропорцию», хотя, на самом деле, Люка ввел это обозначение, отдавая должное Фибоначчи!

Кстати, в этой же книге Фибоначчи привел решение кубического уравнения $10x + 2x^2 + x^3 = 20$ с поразительной точностью. Использовав 60-ричную вавилонскую запись, он записал ответ в виде

1.22.7.42.33.4.40,

что при записи в современных терминах имеет вид

---

[64] **Фридрих II**, или **Фридрих Великий**, известный также как **Старый Фритц** (1712—1786), король Пруссии.

$$1 + \frac{22}{60} + \frac{7}{60^2} + \frac{42}{60^3} + \dots .$$

После перевода в десятичную систему, получаем 1,3688081075, что дает точность в девять знаков после запятой. Удивительный результат!

Им предложен ряд весьма интересных задач. Одна из них интересна в историческом отношении и носит имя «задачи о семи старухах». Семь старух идут в Рим, каждая имеет 7 мулов, каждый мул несет 7 мешков, в каждом мешке лежит 7 хлебов, у каждого хлеба лежит 7 ножей, каждый нож нарезает 7 кусков хлеба. Чему равно общее число всего перечисленного? Эта задача интересна тем, что она практически повторяет задачу, которая содержится в египетском папирусе Ринда.

Иными словами, к итальянским школьникам вернулась задача, которую три тысячи лет назад решали египетские ученики!

Как не вспомнить известный стишок-загадку Корнея Чуковского[65]:

Шел Кондрат
В Ленинград,
А навстречу — двенадцать ребят.
У каждого по три лукошка,
В каждом лукошке — кошка,
У каждой кошки — двенадцать котят.
У каждого котенка
В зубах по четыре мышонка.
И задумался Кондрат:
"Сколько мышат и котят
Ребята несут в Ленинград?"

Решение этой задачи Корней Иванович дает со свойственным ему юмором, сводя все к шутке:

Глупый, глупый Кондрат!
Он один и шагал в Ленинград.
А ребята с лукошками,

65 **Корней Иванович Чуковский**, псевдоним **Николая Васильевича Корнейчукова** (1882-1969), известный русский писатель, переводчик и литературовед, известен, в первую очередь, детскими сказками в стихах и прозе.

С мышами и кошками
Шли навстречу ему —
В Кострому.

Однако задача Фибоначчи требует определенного навыка в умножении – оперировать приходится с довольно большими числами:

$$7 + 7·7 + 7·7·7 + 7·7·7·7 + 7·7·7·7·7 + 7·7·7·7·7·7 = 137\,256.$$

Следующая задача, рассмотренная Фибоначчи, называется «задачей о выборе наилучшей системы гирь для взвешивания на рычажных весах» или просто «задачей о гирях» (в русской математической литературе «задача о гирях» известна под названием «задачи Баше[66] - Менделеева[67]»).

Суть этой задачи состоит в следующем: при какой системе гирь, имея их по одной, можно взвесить всевозможные грузы весом от 0 до некоторого заданного максимального груза?

Известно два варианта этой задачи:

(1) Гири разрешается класть только на свободную чашу весов. В этом случае «оптимальная система гирь» сводится к двоичной системе гирь: 1, 2, 4, 8, 16, ...

(2) Гири можно класть на обе чаши весов. В этом случае оптимальной является троичная система гирь: 1, 3, 9, 27, 81, ...

Эта задача, по сути, является одной из первых оптимизационных задач, известных в истории математики.

Самое позднее документальное упоминание имени Фибоначчи содержится в Декрете Республики Пизы от 1240 года: в

---

[66] **Клод Гаспар Баше де Мезириак** (1581-1638), французский математик и поэт, считавшийся самым ученым человеком Франции, в начале XVII в. Перевел «*Арифметику*» древнегреческого математика Диофанта.

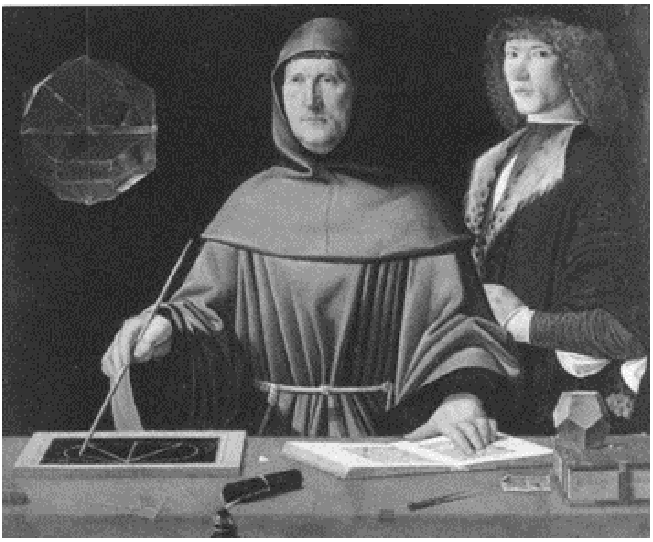
[67] **Дмитрий Иванович Менделеев** (1834-1907), великий русский ученый-энциклопедист, химик, физик, технолог, геолог и даже метеоролог. Главной его научной заслугой является открытие Периодического закона и созданная им Периодическая система химических элементов. Он также написал лучший для своего времени учебник химии. С 1892 г. занимал должность «ученого хранителя» Главной палаты мер и весов.

нем говорится о том, что достойное жалование полагается «... серьезному и ученейшему Мастеру Леонардо Биголло» (Bigollo означает «путешественник», что было прозвищем Фибоначчи со времен его еще юношеских путешествий). Этот высокий оклад был пожалован Фибоначчи за его самоотверженную службу родному городу, помощи в ведении финансовых дел и обучении граждан республики.

Феномен Фибоначчи уникален – он почти на два столетия опередил европейских математиков своего времени. Подобно Пифагору, который способствовал развитию греческой науки, внеся в нее знания, полученные им от египетских и вавилонских жрецов, Фибоначчи, изучавший математику в арабских школах, обогатил полученными там знаниями западноевропейскую науку.

Фра Лука Бартоломео де Пачоли
(1445 - 1517)

Золото испытывается огнем,
а дарование математикой.
Лука Пачоли



Лука Пачоли с учеником

Итальянский монах, математик, друг и учитель Леонардо да Винчи. Автор знаменитых трактатов, «Божественная пропорция» и «Сумма арифметики, геометрии, дробей, пропорций и пропорциональности».

Во втором из этих двух трактатов формулируются основные принципы бухгалтерии.

В 1869 году члены Миланской академии счетоводов попросили одного из профессоров математики выступить с лекцией по истории бухгалтерского учета. Тот, готовясь к выступлению, случайно натолкнулся на старинный фолиант, написанный неким Лукой Пачоли. Один из ее разделов, называвшийся "Трактат о счетах и записях", был посвящен применению математики в коммерции. Здесь же вводился так называемый «принцип двойной записи», который теперь применяется во всех без исключения системах бухгалтерского учета (говоря коротко, этот принцип состоит в следующем: первая запись – источник поступления денег, а вторая – статьи расхода).

Неудивительно, что историки тут же принялись по крупицам восстанавливать биографию «отца современной бухгалтерии».

* * * * *

Лука Пачоли родился в 1445 году в городке Борго Сан-Сеполькро, что по-итальянски означает «город Святого гроба». В детстве он помогал вести деловые записи одному из местных купцов, но вскоре его отец, глава уважаемого в городе семейства, отдал Лука учиться в мастерскую известного художника Пьеро делла Франческа[68], который был к тому же и неплохим математиком. Эта вторая сторона его учителя и воздействовала на юного Пачоли в большей степени, чем первая. Как писал один из исследователей его творчества: «Число представлялось ему, как и его учителю, неким универсальным ключом, одновременно открывающим доступ к истине и красоте».

В девятнадцать лет Пачоли покидает родной город и по рекомендации Леона Альберти[69], друга делла Франческа, поступает на службу к богатому венецианскому купцу в качестве домашнего учителя. Одновременно он сам посещает лекции по математике.

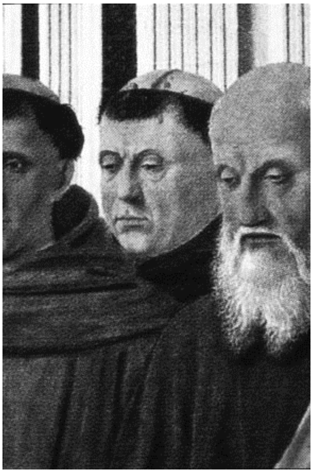
---

[68] **Пьеро делла Франческа** (1415 – 1492), итальянский художник и теоретик, представитель Раннего Возрождения.

[69] **Леон Баттиста Альберти** (1404 - 1472), итальянский ученый, писатель, выдающийся архитектор эпохи Возрождения.

Через шесть лет он уезжает в Рим по приглашению того же Альберти, в доме которого он прожил два года. Пачоли покинул Рим, поскольку им обуревали иные, еще до конца не осознанные идеи.

В 1472 году, когда Пачоли было 27 лет, он, не достигнув никаких успехов на поприще торговли, которой занимался, ушел их мирской жизни, став монахом-францисканцем. Орден францисканцев был нищенствующим, и Лука Пачоли, становясь фра Лукой ди Борго Сан-Сеполькро, принял обет бедности.



После пострижения он жил на родине в Сан-Сеполькро. Его учитель делла Франческа в 1475 году написал картину «Мадонна со святыми». Считают, что моделью святого Пьеро Мартира (Петра Мученика) послужил Пачоли (на фрагменте – в центре).

Вернувшись в родной город, Пачоли начал работу над энциклопедическим трудом по математике – «Сумма арифметики, геометрии, учения о пропорциях и отношениях».

Благодаря активным и эффективным занятиям Пачоли уже в 1477 году получил профессуру в университете Перуджи. Судя по всему, Лука Пачоли оказался хорошим лектором: уже через год университетская корпорация профессоров оставляет Пачоли при кафедре еще на два года при увеличении его зарплаты вдвое.

В 1493 году тринадцатилетняя работа над книгой «Сумма арифметики...» была закончена в Венеции, где при поддержке венецианского претора[70] была отпечатана в местной типографии и сразу же принесла Пачоли широкую известность.

До настоящего времени сохранилось лишь семь экземпляров этой книги... Напечатанная на 300 листах, книга подразделялась на

[70] Претор – правитель области (должность сохранившая свое название и функциональные обязанности со времен Римской империи).

пять частей: Арифметика и алгебра; Различные вопросы, касающиеся торговли; Ведение бухгалтерского учета и счетов; Весы, меры и проценты; Геометрия.

«Трактат о счетах и записях», который был составной частью книги, по праву считается первым теоретическим трудом в бухгалтерском деле.

Книга сразу же принесла ее автору известность: когда в 1496 г. в университете Милана – крупнейшего города-государства Италии – открыли кафедру математики, Пачоли был приглашен возглавить ее.

Миланом в это время правил герцог Сфорцо[71], при дворе которого самой яркой звездой был Леонардо да Винчи. Пачоли, известного своими математическими трудами, пригласили читать лекции во дворец. По-видимому, именно тогда и произошло знакомство Пачоли и Леонардо. Леонардо в это время собирался писать учебник геометрии, но прочитав книгу Пачоли и поразившись ее научным уровнем, отказался от своей идеи.

Уже будучи в Милане Пачоли начал писать «*Божественную пропорцию*», свой второй грандиозный трактат. Под влиянием бесед с да Винчи и воспоминаний об уроках делла Франческа, Пачоли занялся разработкой теории перспективы, геометрии и архитектуры. Леонардо да Винчи проиллюстрировал новую книгу Пачоли. Так отношения между да Винчи и Пачоли – отношения ученика к учителю – переросли в дружбу.

В 1499 году французская армия оккупировала Милан. Оба ученых покинули город и оказались во Флоренции, где пути их разошлись: через два года Пачоли переехал в Болонью, где в старейшем университете Европы занял кафедру математики.

Через четыре года Пачоли снова во Флоренции, в братии монастыря св. Креста. Все время, свободное от орденских обязанностей, Пачоли посвящал переводу Евклида[72] и завершению «*Божественной пропорции*».

---

[71] **Людовико Моро Сфорца** (1452–1508), правитель Милана, более всего известен как покровитель Леонардо да Винчи и других художников и ученых.

[72] **Евклид** (315 – 255 до н.э.), древнегреческий математик, автор первых сохранившихся работ по математике. Был учеником Платона (или, по другим

Перевод Евклида выходит в 1508 году, однако встречена книга была прохладно. Гораздо успешнее сложилась судьба его второй книги, в которую он включил не только иллюстрации своего друга Леонардо да Винчи и содержание бесед с ним, но и воспоминания о своем учителе Пьеро делла Франческа.

О последних годах Пачоли известно мало, кроме того, что сначала он обитал в монастыре Св. Креста во Флоренции, а затем специальной буллой папы Римского получил место настоятеля в родном городе.

Долгие годы сама дата его смерти оставалась неизвестной. И только совсем недавно японские исследователи, просматривая старинные церковные книги, установили, что он умер в 1517 году во Флоренции. Похоронили его в Сан-Сеполькро, в церкви, которая не сохранилась, но само здание которой уцелело и было превращено в склад (как похоже на судьбу многих русских церквей в советское время!)

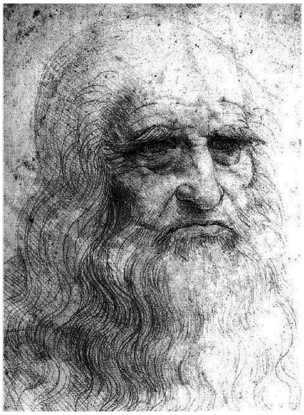
* * *

В конце XIX века, когда Пачоли стал всемирно известен, на стене муниципалитета его родного города была открыта мемориальная доска: «Луке Пачоли, другу и советнику Леонардо да Винчи, человеку давшему алгебре язык и развившим геометрию, тому, кто изобрел двойную бухгалтерию и указал пути последующих исследований. Население города Сан-Сеполькро в исправление 370-летнего забвения открывает этот мемориал своему великому согражданину».

источникам – Сократа). В своем главном труде «Начала» (*Elementa*), впервые коснулся аксиоматического построения геометрии. Кроме того, в этом многотомном трактате содержатся основы античной математики (элементарная геометрия, теория чисел, методы определения площадей и объёмов простейших фигур). ***Подробнее см. в Главе 6 Части 1.***

Леонардо да Винчи

(1452 - 1519)



Автопортрет.

Пророк иль демон, иль кудесник,
Загадку вечную храня,
О, Леонардо, ты – предвестник
Еще неведомого дня.

Д. Мережковский[73].

«Леонардо да Винчи»

Пусть не читает меня тот, кто не является математиком в духе моих принципов.

Леонардо да Винчи.

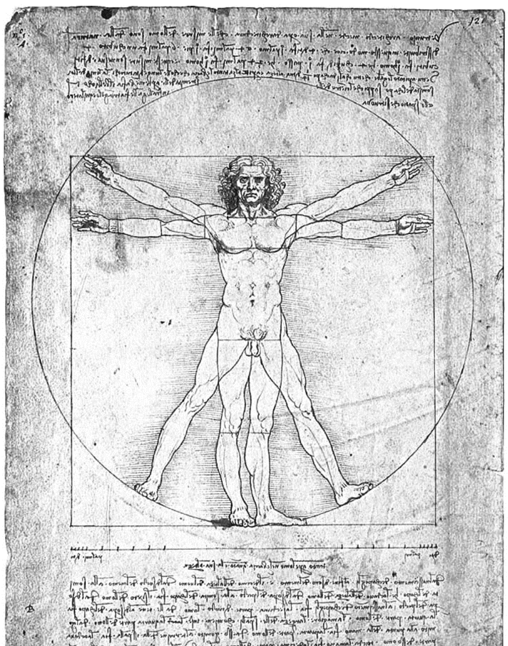
Леонардо был не только великим художником, скульптором, архитектором и музыкантом, но и гениальным инженером и ученым. Сфера его научных интересов чрезвычайно широка: математика, механика, физика, астрономия, геология, ботаника, биология, анатомия и физиология человека и животных,

Леонардо оставил громадный след в развитии всех областей знаний, которыми он занимался. Он стал воплощением гуманистического идеала всесторонне развитой личности, подлинным *homo universale*.

[73] **Дмитрий Сергеевич Мережковский** (1866 - 1941), русский писатель, поэт, критик, переводчик, историк, религиозный философ, общественный деятель. Был женат на известной русской поэтессе Зинаиде Гиппиус. Вторая часть трилогии Мережковского «Христос и Антихрист» («Воскресшие боги») – пожалуй, одно из лучших литературных произведений о Леонардо да Винчи.

С именем Леонардо связано много мистических и загадочных историй. Первая из них начинается с самого его рождения. Он был незаконнорожденным сыном женщины, о которой почти ничего не известно, кроме того, что звали ее Катарина и была она крестьянкой. Об отце Леонардо, Пьеро да Винчи, известно тоже мало: он был нотариусом, как и четыре поколения его предков.

Семейство Винчи проживало в городке Винчи (к западу от Флоренции), где родился и Леонардо. В эпоху Возрождения на незаконнорожденных детей смотрели терпимо. Отец Леонардо сразу же признал его своим сыном и даже присутствовал при крещении ребенка. Однако в дом отца он был взят далеко не сразу. Вскоре после рождения, он был отправлен вместе с матерью в деревню Анхиано, расположенную недалеко от Винчи, и оставался там до четырех лет.



Анатомический чертеж, сделанный рукой Леонардо

Родную его мать, как было принято, поспешили, дав за ней неплохое приданое, выдать за тамошнего крестьянина. Отец его, тем временем, успел жениться на первой из своих законных жен, шестнадцатилетней девушке из достаточно знатной семьи. Поскольку она оказалась бездетной, Леонардо вскоре взяли в дом отца, где он получил неплохое начальное образование, проявив талант в рисовании. Красавец-мальчик, отличавшийся при этом необыкновенным умом и приветливым характером, сразу стал всеобщим любимцем.

Когда Леонардо стукнуло 15 лет, его отец переехал во Флоренцию, взяв с собою и сына. Будучи незаконнорожденным, Леонардо не мел права стать юристом или врачом, поэтому отец решил сделать из него художника. Надо сказать, что в то время художники, относились к сословию ремесленников и стояли на социальной лестнице чуть выше портных и сапожников.

Мальчик был отдан в ученики к одному из ведущих мастеров раннего Возрождения во Флоренции, Андреа дель Верроккьо[74], в доме которого он и начал жить. Здесь он работал бок о бок с такими выдающимися мастерами Возрождения, как Ботичелли[75] и Перуджино[76]. Талант Леонардо-художника был признан учителем и публикой. Когда юному художнику едва исполнилось двадцать лет, его приняли в гильдию живописцев.

В 1476 году произошло событие, которое не дает покоя различным представителям гомосексуалистов, желающих причислить Леонардо в свою когорту: против него и трех его друзей было направлено анонимное обвинение в содомическом грехе («*Peccato di Sodomia*»). Через полгода аноним повторил свой донос.

---

[74]**Андреа дель Верроккьо**, собственное имя **Андреа ди Микеле ди Франческо де Чиони** (1436–1488), итальянский скульптор и живописец раннего Возрождения. Родился во Флоренции. Учился у ювелира Верроккьо, чье имя послужило художнику основой для прозвища.

[75]**Сандро Ботичелли** (1445–1510), итальянский живописец, один из наиболее выдающихся художников эпохи Возрождения.

[76]**Пьетро Перуджино** (**Ваннуччи**) (1445-1523), итальянский живописец эпохи Раннего Возрождения.

Грех этот в те времена карался очень жестоко – высшей мерой было сожжение грешника на главной городской площади. Однако, ни обвинителя, написавшего, по-видимому, обычный навет, ни свидетелей греховного преступления так и не нашли. Но суд все же состоялся, и хотя обвиненных оправдали и отпустили, им все же была «прописана» небольшая назидательная порка.

В 1482 году Леонардо переехал в Милан. В письме к правителю Милана Лодовико Сфорца он представился как инженер и военный эксперт, а также как художник. «Пресветлейший государь мой, увидев и рассмотрев в достаточной мере попытки всех тех, кто почитает себя мастерами и изобретателями военных орудий, и, найдя, что устройство и действие названных орудий ничем не отличается от общепринятого, попытаюсь я, без желания повредить кому другому, светлости вашей представиться, открыв вам свои секреты …» – Такими словами Леонардо начинает письмо к Лодовико Сфорца.

В замке герцога Леонардо исполнял обязанности военного инженера, гидротехника, придворного художника, а позднее – архитектора и инженера, получая при этом жалование меньшее, чем у придворного шута.

Его время в Милане было заполнено самыми разнообразными занятиями, но основное время он уделял живописи. Леонардо написал несколько картин и знаменитую фреску на стене трапезной доминиканского монастыря *Санта-Мария делле Грацие* в Милане – «Тайная вечеря», на которой Иисус Христос изображён в тот момент, когда он сказал апостолам: «Истинно говорю вам, что один из вас предаст меня».

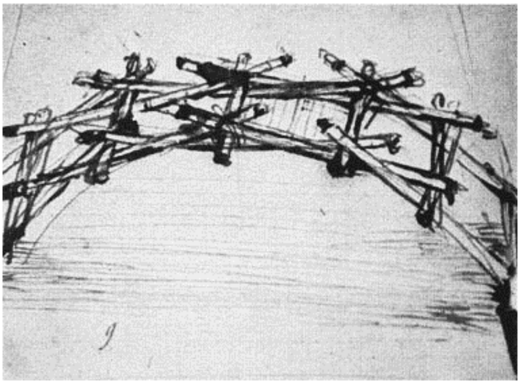
В 1500 году случилось сильное наводнение и монастырь, располагавшийся в низине, был частично затоплен. Уникальная фреска начала разрушаться почти сразу после ее создания: краски стали отслаиваться. Уже к середине XVI века фреска была очень сильно повреждена. В XVII и XVIII веках ее неоднократно реставрировали, но неудачно. Последняя реставрация проводилась в середине прошлого века. Она оказалась удачной, и фреске, наконец, вернули сходство с оригиналом.

Одновременно с живописью Леонардо уделял много времени изобретательству. В это время он начал старательно и серьезно вести записи своих инженерных идей. По его записям можно видеть, что Леонардо был тогда и архитектором-проектировщиком, и анатомом, и гидравликом, и изобретателем механизмов, и создателем декораций для придворных представлений. Правда, надо заметить, что Леонардо практически никогда не доводил своих инженерных изобретений до реализации, хотя многие из них были совершенно блестящими находками, опередившими свое время на несколько столетий.

В это время Леонардо начал изучать геометрию по «*Началам*» Евклида и по книге Луки Пачоли «*Суммы*». Сам он в это время разработал несколько методов измерения площади круга. Тогда же он написал элементарную книгу по теории механики, которая появилась в Милане в 1498 году.

После изгнания Лодовико Сфорца из Милана французами, Леонардо в 1499 году уехал в Венецию, но уже через год он вернулся во Флоренцию. В это время он был с головой погружен в математические исследования, полностью забросив живопись. Двенадцать лет Леонардо переезжал из города в город, выполняя различные инженерные проекты.

Одним из его проектов была постройка арочного моста, который так и не был построен.



Чертеж арочного моста, выполненный Леонардо.

Кстати, сейчас, спустя полтысячелетия, по найденным в архивах Леонардо чертежам начинается строительство пешеходного моста через Босфор, который соединит две части Стамбула.

Во Флоренции у Леонардо появился соперник – молодой талантливый художник Микеланджело[77], которому едва исполнилось 25 лет. Соперничество двух гениев было весьма плодотворным: было создано две огромных батальных композиции, которые художники написали для *палаццо делла Синьория* (называемо также *палаццо Веккьо*, что означает «*Старый дворец*»). К сожалению, эти работы исчезли во время «реставрации» дворца, проводившейся известным архитектором Вазари[78], который предпочел запечатлеть на стенах дворца свои фрески.

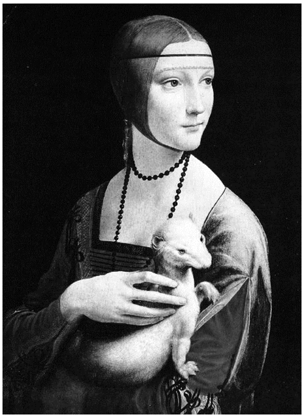
К этому же периоду относится и создание, пожалуй, самого известного женского портрета в истории живописи – портрета *Моны Лизы* (сокращение от «мадонны Лизы»). Мона Лиза была третьей женой флорентийского купца Франческо ди Бартоломее деле Джокондо (откуда пошло второе название картины «*Джоконда*»). Когда Мона Лиза впервые начала позировать Леонардо, ей было около двадцати четырех лет – по понятиям того времени, возраст далеко не первой молодости. Художник не стремился нарисовать портрет красавицы, каковой, видимо, Мона Лиза и не была, но ему удалось тонко передать психологический образ его натуры.

Картина, возможно, долго оставалась бы известной только для знатоков искусства, если бы не её исключительная история: в 1911 году ее похитили из Лувра, и лишь три года спустя, она была случайно найдена и возвращена музею. На протяжении этого времени «Мона Лиза» не сходила с газетных страниц и обложек журналов Европы, став, пожалуй, одной из самых популярных картин (возможно, и незаслуженно!).

---

[77] **Микеланджело Буонарроти**, полное имя **Микеланджело ди Лодовико Буонаротти Симони** (1475—1564), итальянский скульптор, живописец, архитектор, поэт и мыслитель. Один из величайших мастеров эпохи Ренессанса.

[78] **Джорджо Вазари** (1511–1574), итальянский живописец, архитектор и писатель.



Другой очень известной картиной Леонардо является «Девушка с горностаем». По-видимому, на нем изображена Чечилия Галлерани, фаворитка Лодовико Моро. Сохранились свидетельства о том, что эта молодая особа была другом Леонардо.

Все эти годы Леонардо продолжал заполнять свои рабочие дневники разнообразными идеями по теории и практике живописи, анатомии, математике и инженерии. Одной из особенностей Леонардо да Винчи был его почерк: он был левша и писал справа налево, переворачивая буквы так, что текст легче было читать с помощью зеркала, но если письмо было адресовано кому-либо, он писал традиционно. Посему существует мнение, что таким образом он «шифровал» свои записи от чужих глаз.

В 1506 году Леонардо прибыл в Милан по просьбе французского наместника, однако вскоре тот от имени французского короля Людовика XII он был приглажен на службу при королевском дворе. В это время Леонардо проявлял большой интерес к изучению ботаники, механики, гидравлики и геологии.

В 1513 году Леонардо под покровительством новоизбранного папы из семейства Медичи, Льва X, приехал в Рим. Художнику уже исполнился 61 год, и наряду с Микеланджело и Рафаэлем он считался лучшим живописцем Италии. В Риме и Ватикане Леонардо разработал несколько инженерных и архитектурных проектов и выполнил несколько заказов на картины.

В 1515 году Джулиано Медичи, брат римского папы и основной покровитель Леонардо, покинул Рим. Буквально вслед за ним уехал и Леонардо: французский король Франциск I[79]пригласил Леонардо ко двору качестве придворного инженера. Леонардо работал над планом нового королевского дворца, исполняя однако

[79] **Франциск I Французский** (1494-1547), французский король из династии Валуа.

почетные обязанности придворного ученого и советника. Великий живописец провел последние дни своей жизни в королевском замке, близ Амбуаза, где до последних дней своей жизни занимался философией и науками.

Ко всему прочему да Винчи обладал способностью предвидеть будущее наподобие того, как это делал Нострадамус[80]. Но Нострадамус видел судьбы человечества, которыми удивлял и удивляет мир (как и во всяких такого рода предсказаниях немалую роль играет желание читателя увидеть в пророчестве именно то, что он хочет увидеть). Леонардо же в своих знаменитых «Пророчествах» рисует «технологические» картины грядущего, которые мы наблюдаем сейчас.

Например, он пишет: «Люди будут разговаривать друг с другом из самых отдаленных стран и друг другу отвечать»... Чем не телефон?

«Люди будут ходить и не будут двигаться, будут говорить с тем, кого нет, будут слышать того, кто не говорит»... Чем не телевидение?

«Ты увидишь себя падающим с великих высот без всякого вреда для тебя»... Чем не парашют?

«И многие наземные и водяные животные поднимутся между звезд»... Ну, а это прямо про Белку и Стрелку! (Впрочем и мы, человеки, относимся к животным ☺.)

Леонардо умер в 1519 году в Амбуазе, в тогдашней резиденции французских королей. По преданию, умер он на руках короля Франциска I, прося прощения у Бога и людей, что «не сделал для искусства всего, что мог бы сделать».

Похоронен он был среди принцев и государственных советников. В суматохе последующих лет, во время гугенотских войн и революций, это кладбище пришло в запустение. Надгробные

---

[80] **Нострададамус**, или **Мишель де Нотрдам** (1503-1566), средневековый врач, алхимик и астролог, знаменитый своими пророчествами.

камни использовались в качестве строительного материала, крышки гробов были сорваны, даже кости покойников были потревожены...

В начале XIX века один из почитателей Леонардо попытался извлечь останки художника из общей погребальной ямы. Он исходил из того, что Леонардо был высоким человеком и к тому же интеллектуалом, по этому принципу он отобрал то, что казалось ему соответствующим: крупный череп и массивные кости. Эти «избранные» останки были захоронены в маленькой часовне Сент-Убер, которая расположена невдалеке от королевского замка в Амбуазе. Экскурсоводы объясняют, что здесь лежит Леонардо, хотя никто об этом не может с уверенностью утверждать.

Так, три столетия спустя после смерти Леонардо, возникла новая, последняя мистерия, связанная с его именем: есть ли прах самого Леонардо в его усыпальнице?..

* * *

Термин «человек Возрождения» вызывает в нашей памяти прежде всего имя Леонардо да Винчи: никто из его современников, даже самых блистательных и многосторонне одаренных, не мог с ним сравниться. Он был великий художник, хотя за всю свою жизнь создал всего двенадцать завершенных картин. Он был музыкант, игравший едва ли не на всех известных в то время музыкальных инструментах. Он был композитор-импровизатор. Он был поэт и писатель, которому нетрудно было удивить публику неожиданным экспромтом. Например, его перу принадлежит такая басня-миниатюра:

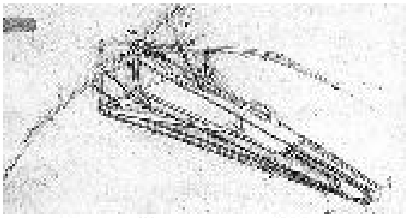
> *«Бумага, видя себя всю покрытой записями, выражала недовольство, но чернильница успокоила её, сказав, что бумагу хранят лишь благодаря наличию этих записей»*

Одно лишь простое перечисление интересов Леонардо вне искусства кажется невероятным: анатомия, ботаника, картография, геология, математика, аэронавтика, оптика, механика, астрономия, гидравлика, акустика, гражданское строительство, конструирование оружия, планировка городов...

Наследие его велико. Заведомо не претендуя на полноту, все же хочется упомянуть несколько блестящих проектов, из которых – увы! – почти не один не был реализован при жизни Леонардо, поскольку он сам не доводил их до конца, а записки с их изложением пролежали в частных коллекциях в полном забвении еще несколько веков.

* * *

Парение человека в воздухе – эта мечта занимала воображение Леонардо всю жизнь. Он писал: «Хотя человеческая искусность способна многое изобрести... все же она никогда не создаст предмет более прекрасного, простого и правильного, чем создает природа». В некотором смысле, эта убежденность Леонардо, направила его усилия на создание механической летательной машины, так называемого «орнитоптера»



Эскиз "птицелета".

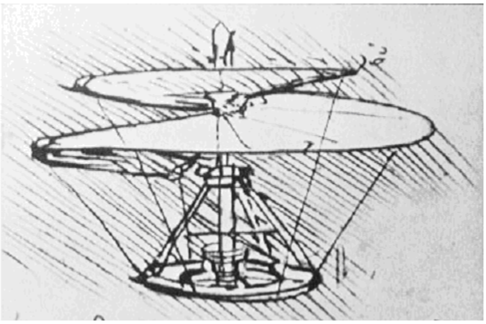
Модель крыла.

(«птицелета»), основанного на подражании движению крыльев птицы. К сожалению, мускульная сила человека недостаточна для успешной реализации этой идеи.

Но, тем не менее, Леонардо изобрел первый планирующий летательный аппарат – предшественник наших дельтапланов, полет которого контролируется телом человека.

Он писал по этому поводу: «Человек в летательном своем снаряде должен сохранять свободу движений от пояса и выше, дабы иметь возможность балансировать, наподобие того, как он делает это в лодке».

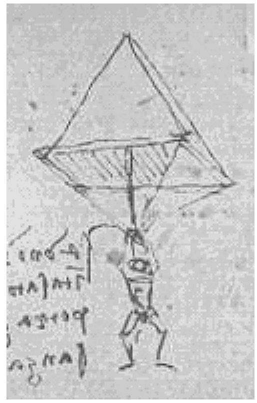
Им же был придуман воздушный корабль с хвостом для управления полетом.



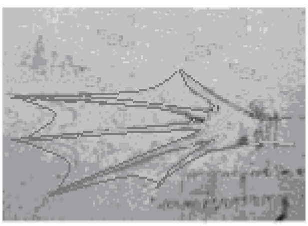
Ему же принадлежит и модель «винтолета» – аэродинамического спирального винта, который считается первым известным прообразом вертолета.

(Если не считать природу, которая одарила подобной способность летать семена клена. Впрочем, не они ли послужили подсказкой гениальному изобретателю? Ведь кто-то давно заметил, что истинным изобретением человека является лишь колесо с осью, а все остальное давно существует в живой природе!)

Он же первым изобрел парашют:



Второй стихией, занимавшей его помыслы, была вода. Он изобрел ласты-перчатки в виде растопыренной лягушачьей (или утиной?) лапы, для плавания.



Ласты Леонардо.

Его интересовало и длительное пребывания под водой. Системы для работы под водой уже имелись и до Леонардо. Например, еще Александр Македонский опускался на морское дно под большим колоколом, наполненным воздухом. Да и древние славяне пользовались камышовыми трубками, чтобы проникать под водой в расположение вражеских войск, стоявших на берегу реки. Но Леонардо да Винчи пошел дальше: он изобрел кожаный скафандр. Система подводящих к нему трубок, позволяла находиться под водой неограниченное время, а сами трубки поддерживались на поверхности надутыми мехами или пробками.

Водолазный костюм

«Водоходы»

Спасательный круг

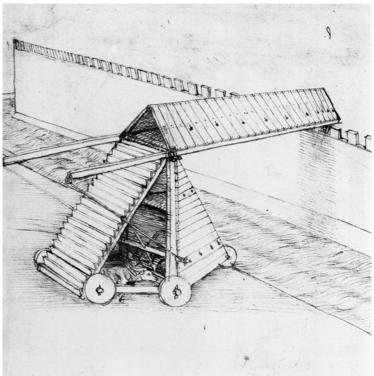
Леонардо стал первым человеком, «ходившим по воде аки по суху» (если не считать Иисуса, о чем весьма достоверно свидетельствует Новый Завет...). Башмаки для хождения по воде и балансировочные палки к ним – буквально, как у Леонардо – в наше время выпускаются, однако, не более чем для забавы.

Спасательный круг, придуманный Леонардо, был действительно необходимым изобретением. Теперь ни один корабль, ни одна лодка не обходятся без такого спасательного круга.

Многие изобретения носили военный характер. Так, Леонардо первым предложил нечто, близкое по конструкции к современному танку. Он дал такое краткое описание: «Я буду делать закрытые колесницы, которые защищают от нападения. Позади колесницы, под ее защитой, должны следовать пехотинцы, без опасности ущерба или поражения врагом». Свою идею он воплотил в виде черепахообразной повозки, защищенной металлическими щитами, на которой располагалась башенка с огнестрельным оружием. Внутри такой повозки было место для восьми «механиков», которые должны были приводить колеса повозки в движение.

Он спроектировал орудие с механизмом регулирования углов выстрела (вертикально и горизонтально). Он придумал 33-ствольное орудие, имеющее три уровня по 11 стволов в каждом. Как только первая линия стволов производит залп, стрелок может пользоваться второй и третьей линией стволов один за другим. Орудие заряжается сверху, для их подъема в вертикальное положение имеется специальный рычаг. После перезарядки фиксируются в исходной позиции металлическим брусом. (Ну, скажите, чем не наша прославленная «Катюша»?)

Леонардо впервые изобрел стабилизаторы для снарядов, чтобы повысить точность их попадания в цель.



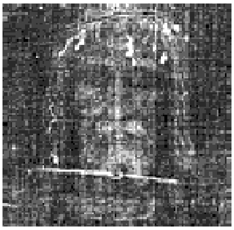
Катапульта была давно известным военным снарядом, однако Леонардо сделал регулируемую силу броска камня, что неимоверно повысило эффективность катапульты. Он придумал передвижные лестницы для штурма стен осаждаемых укреплений неприятеля.

Конечно, мы лишь бегло затронули лишь незначительную часть изобретений Леонардо. А ведь после него осталось около 20 тысяч (!!!) рукописных страниц, из коих до нас дошли лишь около 7 тысяч. И все они испещрены мелким почерком и содержат чертежи различных изобретенных Леонардо устройств…

Проявлял он интерес и к астрономии. В своей работе «*Атлантический кодекс*», изданной в 1490 году, он писал о «линзах для того, чтобы видеть Луну с увеличением». Таким образом, Леонардо принадлежит и честь открытия линз! А в более поздней работе «*Кодекс Арундел*», датируемой 1513 годом, он писал: «Для наблюдения планет, сделай открывающуюся крышу, чтобы планета отражалась на вогнутом зеркале. Отражение на стене будет показывать поверхность планеты увеличенной».

И все это лишь часть того гигантского научного и инженерного наследия, которое оставил Леонардо человечеству...

Одна из религиозных мистерий оказывается тесно связанная с именем Леонардо: так называемая, Туринская плащаница, представляющая собой якобы отпечаток тела Иисуса, снятого с креста и захороненного в пещере.



Исследования ученых нашли следы, ведущие к Леонардо, который сделал эту мистификацию по требованию папы Римского Сикста IV, стремившегося усилить воздействие на верующих путем предоставления «реальных фактов».

Афоризмы Леонардо да Винчи

- Существует три разновидности людей: те, кто видит; те, кто видит, когда им показывают; и те, кто не видит.
- Бездельника хлебом не корми, а дай порассуждать.
- Вред приносишь ты, если хвалишь, но еще больше вреда, если порицаешь то, в чем мало смыслишь.
- Всегда практика должна быть воздвигнута на хорошей теории, ворота которой – перспектива.
- Всяк, кто желает иметь верных друзей, должен быть добрым и терпимым, проявляя внимание к чужим нуждам.
- Где дух не водит рукой художника,там нет искусства. Где мысль не работает вместе с рукой,там нет художника.
- Где умирает надежда, там возникает пустота.
- Глаза и уши, охочие до чужих секретов, всегда найдутся.
- Гнев есть кратковременное безумие.
- Если все кажется легким, это безошибочно доказывает,что работник весьма мало искусен и что работа выше его разумения.
- Если запастись терпением и проявить старание, то посеянные семена знания непременно дадут добрые всходы.
- Жалок тот ученик, который не превосходит своего учителя.
- Железо ржавеет, не находя себе применения, стоячая вода гниет или на холоде замерзает, а ум человека, не находя себе применения, чахнет.
- Живописец, бессмысленно срисовывающий руководствуясь практикой и суждением глаза, подобен зеркалу, которое отражает все противопоставленные ему предметы, не обладая знанием их.

- Живописец, смотри, чтобы жажда богатства не преодолела в тебе чести искусства, ибо богатство чести куда значительнее,чем честь богатства.
- Живопись - это поэзия, которую видят, а поэзия - это живопись, которую слышат.
- Живопись - это поэзия, которую видят, а поэзия - это живопись, которую слышат.
- Да разве тайну долго убережешь, коли мирская молва, что морская волна, все выплескивает наружу.
- За сладкое приходится горько расплачиваться.
- Знания, не рожденные опытом, матерью всякой достоверности, бесплодны и полны ошибок.
- И для льва выдаются несчастливые дни, когда все идет шиворот-навыворот и на каждом шагу подстерегают злоключения.
- Истина остается единственной дочерью времени.
- Истинная любовь сказывается в несчастье. Как огонек, она тем ярче светит, чем темнее ночная мгла.
- Как теплая одежда защищает от стужи, так выдержка защищает от обиды.
- Как хорошо прожитый день дает спокойный сон, так с пользой прожитая жизнь дает спокойную смерть.
- Критикуя, критикуй мнение, а не его автора.
- Кто в страхе живет, тот и гибнет от страха.
- Кто не карает зла, тот способствует его свершению.
- Кто не ценит жизни, тот недостоин ее.
- Кто хочет разбогатеть в течение дня, будет повешен в течение года.
- Куры под одной крышей живут в мире и согласии, а два петуха никогда не могут ужиться в одном курятнике – уж такова их природа.
- Лучше быть лишенным уважения, чем устать приносить пользу.
- Лучше умереть, чем маяться в неволе.
- Любое препятствие преодолевается настойчивостью.
- Мудрость есть дочь опыта.
- Наука – полководец, но практика – солдаты.
- Опыт есть истинный учитель.
- Оскорбляя другого, ты не заботишься о самом себе.
- От наших родителей мы получили величайший и бесценный дар – жизнь. Они вскормили и взрастили нас, не жалея ни сил, ни любви. И теперь, когда они стары и больны, наш долг – вылечить и выходить их!
- Познание стран мира – украшение и пища человеческих умов.

- Поистине всегда там, где недостает разумных доводов, их заменяет крик.
- Полюбить можно лишь то, что знаешь.
- Почет и уважение добываются не силой,а великодушием и готовностью поделиться с нуждающимся последним куском
- Приобретай в юности то, что с годами возместит тебе ущерб, причиненный старостью. И, поняв, что пищей старости является мудрость, действуй в юности так, чтобы старость не осталась без пищи.
- Природа так обо всем позаботилась, что повсюду ты находишь, чему учиться.
- Проси совета у того, кто умеет одерживать победы над самим собой.
- Противник, ищущий твои ошибки, полезнее, чем друг, желающий их скрыть.
- Разве тайну долго убережешь, коли мирская молва, что морская волна, все выплескивает наружу?
- Счастье достается тому, кто много трудится.
- Так же, как еда без удовольствия превращается в скучное питание, так занятие наукой без страсти повреждает память, которая становится неспособной удерживать то, что она схватывает
- Только с пользой прожитая жизнь долга.
- Увлекающийся практикой без науки – словно кормчий, вступающий на корабль без компаса. Всегда практика должна быть воздвигнута на хорошей теории.
- Умеренность служит надежной защитой от пороков.
- Ученья корень горек, да плод сладок.
- Я предпочитаю смерть усталости. Я никогда не устаю служить другим.

СТРАНИЧКА САМОРЕКЛАМЫ

Как я уже писал, в Москве издательством URSS (УРСС) опубликованы 8 книг серии «История науки сквозь призму озарений». Эти книги прекрасно изданы и имеют вполне божескую цену.

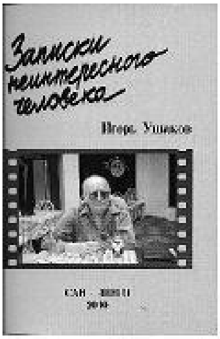
Надеюсь, они все же попадут на американский книжный рынок, тогда отпадет необходимость в моих «самиздатских» вариантах. А пока... Мои друзья могут эти книги заказать на моем закрытом сайте. Как эти книги приобрести, написано ниже.

У меня есть еще три книги, близкие по духу тем, которые уже представлены.

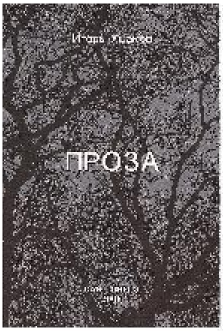
Это две книги про рукотворные и нерукотворные чудеса мира и книга о загадке жизни (теории возникновения и развития жизни на

Земле).

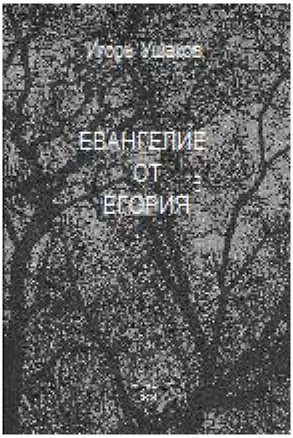
Кроме того, есть чисто литературные вещи, которые не требуют специальных комментариев:



А также «джентльменский» набор:



И еще парочка книг, не предназначенных для религиозных людей.



Все эти книжки <u>можно заказать</u>:
Набираете в Интернете адрес:
http://www.lulu.com/browse/search.php?fSearch=ushakov

Дальше – выбирайте! (Литературные книги можно скачать бесплатно.)

Если будут трудности или вопросы, пишите по адресу igusha22@gmail.com.

Книги, изданные в Москве издательством URSS, можно купить, к сожалению, пока только в России и в Украине.

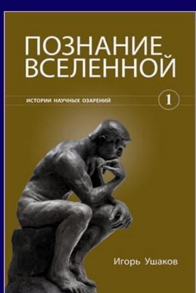
Справки по телефону: 8(499)724-25-45. Емейл: orders@URSS.ru.
Адрес магазина: **117335, г. Москва, Нахимовский проспект, 56.**

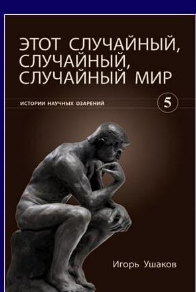
San Diego, California.

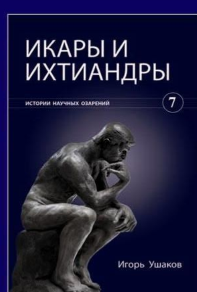
Окончил Московский авиационный институт. Доктор технических наук, профессор. Руководил научными отделами в научно-иследовательских институтах военно-промышленного комплекса бывшего Советского Союза, а затем заведовал отделом в Вычислительном Центре АН СССР (ныне ВЦ им. Дородницына РАН). Параллельно с основной работой заведовал кафедрой «Большие системы» Москов ского Физтеха, читая курсы по прикладной математике. Более 50 его учеников успешно защитили кандидатские диссертации, девять из них стали докторами наук.

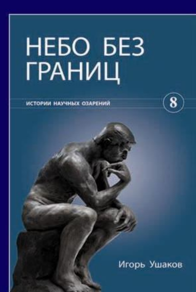
В 1989 г. был приглашен в США в Университет Джорджа Вашингтона, а затем преподавал в Калифорнийском университете (Сан-Диего). Работал в качестве главного научного специалиста в ряде крупных американских компаний.

Опубликовал около 30 научно-технических монографий в России, США, Германии, Болгарии и Чехословакии. Автор около 400 научно-технических статей, опубликованных в ведущих российских и международных журналах. Издал в России дюжину научно-популярных книг, переведенных в США. Кроме того, его перу принадлежит восемь книг прозы и стихов.









ISBN 978-1-257-08446-3
90000
9 781257 084463