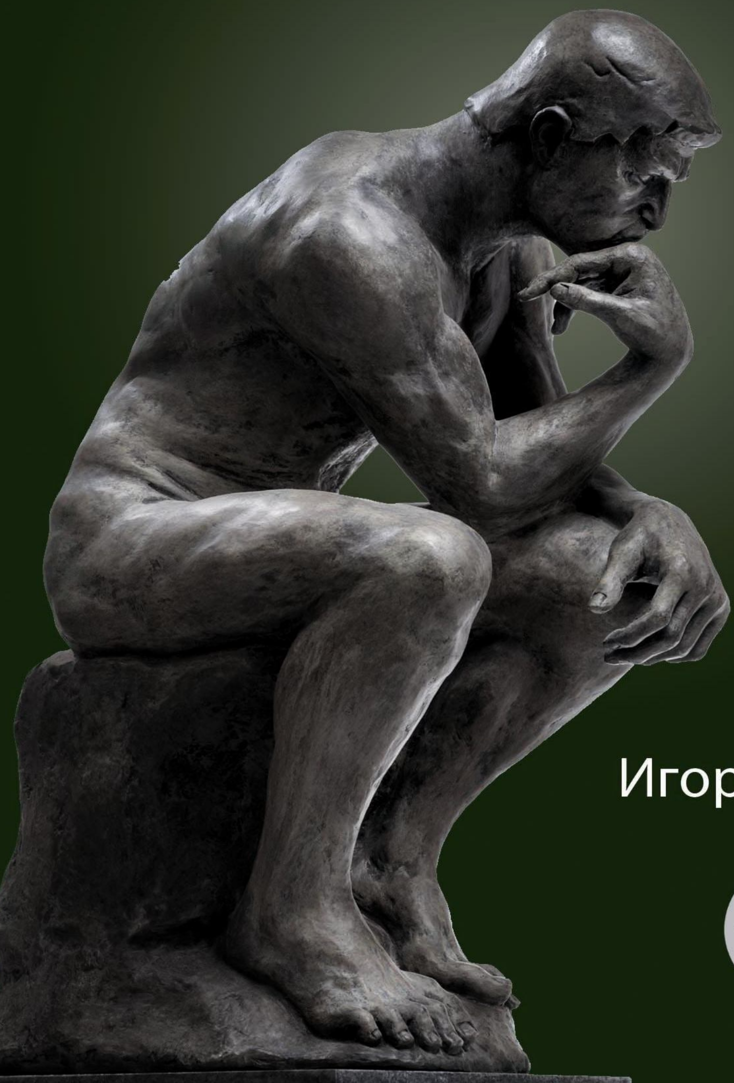
В НАЧАЛЕ БЫЛО ЧИСЛО...

ИСТОРИИ О НАУЧНЫХ ОЗАРЕНИЯХ

2



Игорь Ушаков

ИСТОРИИ О НАУЧНЫХ ОЗАРЕНИЯХ

(КНИГА 2)

Владимир Соловьев: «Будьте внимательны с цифрой тринадцать.
Она таит в себе много неожиданностей!»

ИГОРЬ УШАКОВ

В НАЧАЛЕ БЫЛО ЧИСЛО...

Перевод с английского

San Diego
2012

Дизайнер обложки: Кристина Ушакова

Художник: Святослав Ушаков

Перевод с английского.

Серия книг «Истории о научных озарениях»

1. **Как люди познавали Вселенную**
   Начало астрономии. Античные ученые измеряют размеры Земли, Луны и Солнца. Начало географии. Как люди учились измерять.
2. **В начале было число…**
   Как люди начали считать. Цифры разных народов. Удивительные числа. Цифры в черной магии. Арифметика – не скучная наука!
3. **Волшебство геометрии**
   Необычные и невозможные фигуры. Лист Мёбиуса. Бутылка Клейна. Фракталы. «Золотое сечение».
4. **Таинственная страна Аль-Джабр**
   Интересное об алгебре. Диофантовы уравнения. Великая Теорема Ферма, которая сводила с ума поколения математиков, наконец-то доказана!
5. **Этот случайный, случайный, случайный мир…**
   Природа случайного. Вероятностные парадоксы. Можно ли регулярно выигрывать в лотерею?
6. **От счёта на пальцах до компьютера**
   Как люди изобрели первые счетные машины. Первые компьютеры. Создание искусственного интеллекта.
7. **Прекрасные ученые прекрасного пола**
   Рассказы о женщинах-ученых от Античности до наших дней.
8. **Икары и Ихтиандры**
   Как человек покорил небо и подводное царство.
9. **Небо без границ**
   История покорения космоса. Триумфы и трагедии.
10. **Чудо жизни**
    Гипотезы возникновения жизни. Биологические курьезы.

Эти книги помогут преподавателям сделать их занятия более увлекательными, а слушателям - узнать больше, чем знают сами учителя!

СОДЕРЖАНИЕ

Блаженство тела состоит в здоровье,
блаженство ума – в знании.

Фалес Милетский[1]

От автора

О чем серия этих научно-популярных книг?

Для кого она предназначена?

С самого начала заметим, что это не учебные пособия и не научные опусы. Это сборник рассказов о великих математических, научных и инженерных озарениях и о творцах новых идей в самых различных сферах человеческой деятельности.

Чтение этой книги не требует от читателя каких-либо специальных знаний, хотя, конечно, определенные знания предполагаются (практически на уровне средней школы): в этом случае книгу будет читать приятнее.

Прежде всего, книги серии «Истории о научных озарениях» должны вызвать интерес у школьников и студентов, которым захочется узнать о том, что выходит за рамки учебной программы. (А хорошие ученики всегда хотят знать больше того, что им дают преподаватели!)

Кроме того, книги серии будут полезны для преподавателей школ и профессоров университетов, которым нужно оживить сухой материал своего предмета на лекциях и семинарских занятиях.

Предварительная рассылка электронной версии книги коллегам и друзьям убедила автора, что даже школьники начальных классов находят в книге много такого, что стимулирует их интерес к различным наукам. В то же время автор получил несколько восторженных отзывов от студентов ВУЗов, нашедших в книге много нового для себя.

Возможно, книгами этой серии заинтересуются и родители учеников и студентов – ведь совсем недавно они сами были молодыми, и, возможно, жизнь еще не отбила у них былой любознательности.

---

[1] **Фалес** из Милета (625-545 до н. э.), первый древнегреческий философ. Ему приписывают изречение: «Познай самого себя».

Данная книга рассказывает о том, как люди научились считать, как они создали великую науку – математику, как появились современные вычислительные машины.

Здесь же читатель узнает и о биографиях великих ученых.

Хочется надеяться, что читатели получат от чтения книг этой серии такое же удовольствие, какое получил автор при написании этих книг.

Автор выражает глубокую признательность своему другу и коллеге Александру Бочкову, оказавшему большую помощь при подготовке книги к печати.

San Diego, California.

1. ОТКУДА ЕСТЬ ПОШЛА АРИФМЕТИКА

> ... Разуменья не было у них ни в чем, покуда … премудрость чисел, из наук главнейшую, я для людей измыслил ...
>
> ***Эсхил***[2]

Слово *арифметика* происходит от греческого слова *arithmy,* что означает «*число*». Греки считали *числом* только *целые числа*, большие единицы, поэтому греческая арифметика была наукой о целых числах, и о свойствах этих чисел. Существовала ещё наука «низшего порядка» - «логистика», которая занималась счетом и правилами операций с числами. В русский язык это понятие вошло в XVI в. «Книга рекома по гречески арифметика, а по немецки алгоризма, а по русски цифирная счетная мудрость» - так витиевато назывались манускрипты по арифметике того времени.

Однако понятия чисел и действий над ними, конечно же, гораздо древнее самой Древней Греции.

В трагедии Эсхила «Прикованный Прометей», которая следует греческому мифу, герой-полубог Прометей дарит людям не только огонь, но и числа. Зато он был обречен богами на вечную пытку: каждый день к Прометею, прикованному к скале (кстати, где-то на Кавказе), прилетал и клевал ему печень... (Да, не поскупились греческие боги на наказание – это похлеще того, как ветхозаветный Бог наказал Еву за сорванное с Древа Познания яблоко!)

Если же говорить серьезно, то достоверно известно, что уже пятнадцать-двадцать тысячелетий назад пещерные люди (кста-

---

[2] **Эсхил** (525-456 до н. э.), древнегреческий драматург, почитаемый как отец трагедии. Цитата взята из его трагедии «Прометей прикованный».

ти, задолго до библейского сотворения мира!) фиксировали на стенах своих жилищ охотничьи сценки, высекая двух, а то и трёх оленей, которые, видимо, были охотничьей добычей. А иногда появлялись непонятные штришки... Похоже, что уже в пещерах палеолита зарождалась *система счисления.* На более поздних рисунках можно увидеть зародыши приемов наименования и записи чисел и даже правил выполнения простейших арифметических операций!

Но, не будем торопиться! Я приглашаю вас в небольшое путешествие. Мы проследим с вами как зарождались и развивались основные идеи арифметики как науки разными цивилизациями древности.

1.1. Арифметика шумеров

Арифметика, сиречь наука числителная.
Леонтий Магницкий

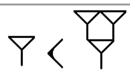
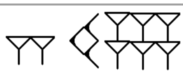
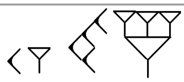
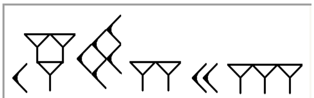
Самые ранние, уже по-настоящему арифметические записи, обнаружены археологам на глиняных табличках, которыми пользовались писцы в древней стране Шумерия[3]. Таблички эти изготавливались из сырой глины, на них палочками писали иероглифы, затем таблички сушили на солнце. Этот метод письма был назван историками-археологами клинописью, поскольку шумерские иероглифы по форме напоминали клинья.

Надо сказать, что система счисления у шумеров была весьма своеобразной – десятично-шестидесятеричной. Для изображения чисел использовались всего два знака: “𒁹” – для единицы и “𒌋“ – для десяти:

Число	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**…**
Запись	𒁹	𒈫	𒐈	𒐉	𒐊	𒐋	𒐌	𒐍	𒐎	𒌋	𒌋𒁹	…

[3] **Шумерская цивилизация** развивалась в стране, состоящей из городов-государств, построенных народом, поселившимся в IV-V тысячелетиях до н.э. в районе Месопотамии (юг нынешнего Ирака между реками Тигр и Евфрат). Этот народ оставил человечеству столько нововведений чрезвычайной важности, что даже сформирована международная группа из известных лингвистов, астрономов, математиков, философов и др., которая пытается доказать инопланетное происхождение шумеров.

Комбинации этих двух символов использовались для написания чисел от 1 до 60. Для написания чисел, превышающих 60, повторялись те же символы, но уже на позиции следующего разряда. Примерно то же самое делаем и мы, с той лишь разницей, что единица («1») в следующем разряде у нас означает 10, а у шумеров символ “𒁹“ в следующем разряде означал 60. Иными словами, их позиционная система *имела основанием* 60. Взгляните на примеры написания различных чисел шумерами.

Клинопись	«Прочтение»	Пояснение	Значение
	1.13	60+14	74
	2.36	2×60+36	156
	11.44	11×60+44	704
	13.52.23	$13\times60^2+52\times60+23$	49946

В чисто клинописном письме трудно отличить один разряд от другого из-за отсутствия знака для пустого разряда («нуля»).

Так, например, 𒁹𒁹 может означать 1+1=2, или же $1=1\times60+1=61$, или даже $1\times60^2+0\times60+1 = 3601$. Такая неоднозначная запись числа либо становится понятной из контекста, либо из «приложенных» словесных пояснений в самой табличке.

В астрономических табличках поздне-шумерского периода для обозначения больших чисел вводили разделительную «пустую» колонку: тогда уже «𒁹𒁹» означало 2, «𒁹_𒁹» означало 61, а «𒁹_ _𒁹» означало 3601. А уже в начале второго тысячелетия до н.э. появился специальный знак для разделения позиций числа – две стрелки по диагонали[4].

[4] Точно неизвестно изобретено ли это шумерами или же завоевавшими их вавилонянами. От шумеров после ассимиляции их культура «по наследству» перешла завоевателям.

Шестидесятеричная система пронизывала все сферы жизни шумеров. В денежной системе основной единицей был *шекель*, 60 шекелей составляли один *мин*, а 60 мин составляли *талант*[5]. Круг делился на 360 градусов, а час – на 60 минут по 60 секунд. А в основе этой системы лежала система двенадцатеричная.

Об истоках шумерской двенадцатеричной системы уже говорилось. Однако у изложенной ранее гипотезы есть оппоненты: некоторые историки считают, что шумерских математиков мог соблазнить замечательный ряд делителей числа 60: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30.

Кстати, у нас и сейчас посудные сервизы продаются дюжинами, мебельные гарнитуры – по полдюжины. А Англия до сих пор «повязана» в двенадцатеричной системе, от которой рукой подать до шестидесятеричной!

Интересно, что эта, казалось бы, очень громоздкая система счисления позволяла шумерам делать сложные арифметические операции: вычислять дроби и перемножать числа до миллионов, извлекать корни и возводить числа в степень[6].

1.2. Числовая система древнего Египта

Можно прочесть не в одном манускрипте,
Как человек измерялся в Египте:
Десять лягушек – один человек!
Не догадаться же, право, во век...

Лука Умищев

Не менее своеобразной была и система счисления древних египтян. Единицу они, как и большинство других древних народов обозначали вертикальной чертой. Числа, меньшие 10, состояли из рядов таких черточек.

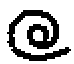
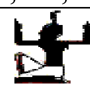
---

[5] Одно из древних шумерских правил справедливости звучало так: «Человек мина не должен притеснять человека шекеля».

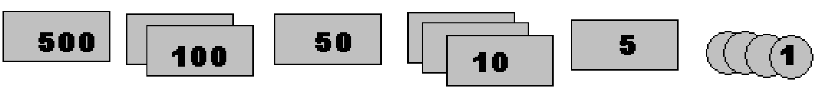
[6] Шумерские числа не совсем отвечают современному определению: N-ичная система должна содержать N уникальных символов. Шумерская же система содержит в себе две системы: непозиционную для простого счёта до 60 (для «бытовых» расчетов), и гораздо более сложную – позиционную (для серьезных расчетов).

Число	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Иерог-лиф	I	II	III	II II	III II	III III	IIII III	IIII IIII	III III III

Для обозначения числа 10 и его степеней 100, 1000, 10000 и т.д. египетская система счисления имела специальные значки.

Число	10	100	1,000	10,000	100,000	1,000,000
Иерог-лиф						
Описа-ние	коро-мысло	верев-ка	ло-тос	палец	лягуш-ка	человек

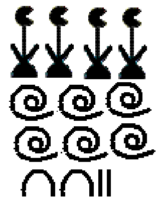
Любое число набирается так же, как мы расплачиваемся, подбирая минимальное число купюр и монет разного достоинства, например:



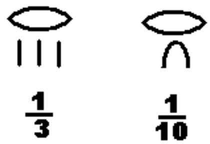
789 рублей

В так называемом *Папирусе Ринда*[7] показана запись числа 4622 сверху вниз, а в нижней строке знаки располагаются слева направо:

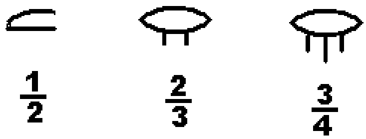
[7] Этот папирус озаглавлен «*Способы, при помощи которых можно дойти до понимания всех темных вещей, всех тайн, заключающихся в вещах*», является одним из древнейших учебников математики. Его называют *Папирусом Ринда* по имени египтолога Генри Ринда – мецената, приобретшего папирус в 1858 году (год его обнаружения), который и привез его в Англию. Иногда, этот документ называют *Папирусом Ахмеса* по имени его автора - писца XVII века до н.э., или *Лондонским папирусом*, поскольку он хранится в Британском Музее в Лондоне.



Были у египтян и специальные знаки для обозначения дробей: специальный иероглиф («Глаз Хора») ставился над числом для обозначения единичной дроби, например:



Имелись и специальные символы для дробей ½ , 2/3 и ¾:



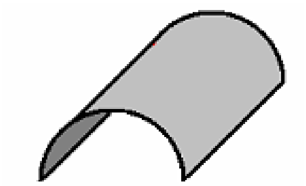
Папирус Генри Ринда интересен тем, что он представляет собой, по-видимому, первый дошедший до нас из глубины веков учебник по математике. Длина этого папируса около 5 метров при ширине около 30 сантиметров. Он содержит 84 арифметические и геометрические задачи с решениями. Вот несколько характерных задач из этого папируса (решения мы оставляем для любознательных читателей):

- Взято некоторое число и к нему добавлена 1/7 от него, в результате чего получено 19. Чему было равно изначальное число?
- Взято число и к нему добавлены его две трети. Если из полученного числа отнять его треть, то получится 10. Чему было равно изначальное число?
- Если к числу прибавить его две трети плюс его половину плюс еще одну седьмую, то получим 37. Чему было равно изначальное число?

Еще одним замечательным документом древности является *Папирус Голенищева.* Этот древнейший математический текст был составлен в 18-м веке до н. э. и превосходит по древности Папирус Ринда.

Первым владельцем этого папируса был Голенищев[8], почему папирус и носит его имя. Иногда этот папирус называют также *Московским папирусом*, поскольку он хранится в Москве в Пушкинском Музее Изобразительных Искусств.

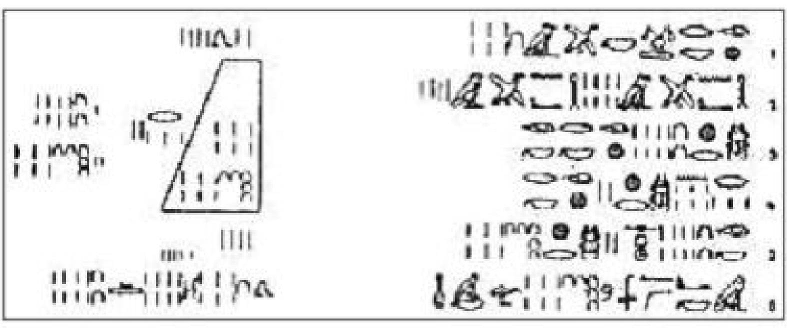
Длина этого папируса составляет около 5 с половиной метров, а его ширина не превышает 8 сантиметров. Текст включает 25 задач математических проблем с решениями. Большинство задач – геометрические, касающиеся практических проблем. Остановимся на двух замечательных задачах.



Поверхность полуцилиндра.

Десятая задача, связанная с вычислением поверхности корзины, сводится к нахождению площади боковой поверхности полуцилиндра, т.е. эта задача напрямую связана с использованием числа π.

Одной из самых интересных является, пожалуй, четырнадцатая проблема, показывающая, что древние египтяне умели находить объёмы не только тетраэдра, но и срезанной пирамиды.



Фрагмент Папируса Голенищева.

Практически все, что мы знаем о математике древнего Египта, почерпнуто из этих двух папирусов.

[8] **Владимир Семенович Голенищев** (1856-1947), один из основателей русской египтологии. Кстати, дальний родственник великого русского полководца фельдмаршала Михаила Кутузова.

1.3. Древнегреческая нумерация

Древние греки заложили основания теории чисел, однако у них самих при этом не было хорошей системы счисления! Вот уж воистину - сапожник без сапог!
Лука Умищев

К началу первого тысячелетия до нашей эры Греция представляла связанное лишь единым языком сообщество множества микро-государств, каждое со своей собственной денежной системой, со своими единицами веса и объема. Конечно, тут уж было не до единой системы нумерации чисел: каждый дул, что называется, в свою дуду.

Наиболее древней из греческих систем счисления считается аттическая, то есть, происходящая из Афин. Она появляется в документах, относящихся к V веку до н.э. Эту систему также называют акрофонической, поскольку ее опорные числа обозначались начальными буквами слов, выражавших соответствующие числительные. Примеры обозначений чисел приведены ниже в табличке.

Г	Δ	Н	Х	М
Пенте	Дека	Екатон	Хилиой	Мириной
5	10	100	1000	10000

Возникает естественный вопрос, если уж акрофоника, то почему же слову «пенте» соответствует символ «гамма» (Г), а не «пи» (П)? На самом деле все объясняется просто: изначально цифра 5 называлась не «пенте», а «генте».

Обозначение для единицы было естественным для всех древних народов – вертикальная черта, а поскольку греческая буква «йота» близка по начертанию, то она и дала название для единицы. (Кстати, когда мы говорим о каком-либо застопорившемся деле, то используем выражение «ни на йоту не продвинулось», поскольку йота является наименьшим целым числом!). Остальные начальные цифры строились по принципу сложения (который нам сейчас известен по римским цифрам):

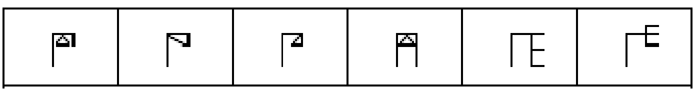
I	II	III	IIII	Г	ГI	ГII	ГIII	ГIIII	Δ
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Конечно же, использование такой формы записи для больших чисел было совершенно неприемлемым. Например, если бы число 9999 кто-то решился бы записать в «чисто аддитивной» форме, то ему понадобилась бы длиннющая цепочка символов... А попробуйте к тому же еще это число прочитать!

Однако древние греки были весьма сообразительными людьми: они придумали промежуточные составные символы для обозначения 50, 500, 5000 и 50000, используя символы для 10, 100, 1000, 10000, соответственно.

Δ	𐅄	Η	𐅅	Χ	𐅆	Μ	𐅇
10	**50**	**100**	**500**	**1000**	**5000**	**10000**	**50000**

Но в ранние времена, как уже упоминалось, не только числа обозначались в разных областях Греции по-разному, но и композиционные числа различались. Вот как, например, записывалось одно и тоже число – 50 в разных частях Греции:



Самым большим некомпозиционным числом (т.е. числом, обозначаемым одним символом) была «*мириада*», обозначавшая 10 тысяч (10 000). Для обозначения неисчислимого количества использовалось выражение «мириада мириад», что буквально эквивалентно по смыслу древнерусскому выражению «тьмы и тьмы». Однако, у выражения «мириада мириад» было и вполне конкретное числовое значение: 10 000 · 10 000 = 100 000 000.

В конце IV – начале III веков до н.э. на первое место выдвинулась «квази-десятичная» ионическая[9] или алфавитная система, в

9 **Иония** – западное побережье Малой Азии с прилегающими островами. В XXI-XIX вв. до н.э. территория была колонизована ионийцами, одним из греческих племён. Ныне почти вся территория Ионии входит в Турцию.

которой числа обозначали буквами алфавита. Ее иногда ещё называют милетской по названию столицы Ионии. Есть мнение, что ионическая система была сформирована на несколько веков раньше и ею пользовались еще Фалес Милетский[10] и Пифагор[11].

В ионической системе цифрами выступают буквы алфавита. Следует отметить, что греки одними из первых стали широко использовать алфавитную систему. (Действительными изобретателями этой системы были древние финикийцы).

Поскольку требовалось 27 символов для обозначения всех единиц, десятков и сотен, а в греческом алфавите в то время закрепилось 24 буквы, то им пришлось добавить три устаревших буквы. Для обозначения чисел использовались как прописные, так и заглавные буквы.

Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ϲ	Ζ	Η	Θ
α	β	γ	δ	ε	ϛ	ζ	η	θ
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Здесь для обозначения 6 использована устаревшая буква "*стигма*". Далее:

Ι	Κ	Λ	Μ	Ν	Ξ	Ο	Π	Ϙ
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ϙ
10	20	30	40	50	60	70	80	90

[10] **Фалес Милетский** (624 - 546 до н.э.), древнегреческий философ и математик из города Милета. Основал милетскую школу в которой впервые в Европе систематически изучались астрономия, физика, география, метеорология и биология. Фалеса называют родоначальником античной философии и науки. Он считался первым из Семи мудрецов Греции.

[11] **Пифагор Самосский** (570-500 до н.э.), великий древнегреческий философ и математик.

И здесь для обозначения 90 использована вышедшая из употребления буква “*коппа*”.

Оставшиеся 8 букв плюс устаревшая буква “*санпи*” (последняя в ряду) были использованы для обозначения сотен:

Ρ	Σ	Τ	Υ	Φ	Χ	Ψ	Ω	Ͳ
ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	ϡ
100	200	300	400	500	600	700	800	900

$\overset{\beta}{\mathrm{M}}$
20000

Иногда, чтобы отличить цифры от букв, над последними ставились горизонтальные черточки.

Для обозначения чисел больше мириады писали знак «мю» (М), а над ним число, например, для обозначения 20,000 использовался знак:

Само число над «мю» могло иметь длинную запись, а это приводило к громоздкому выражению. Греческие математики, которым приходилось иметь дело с большими числами, нашли выход и из этого затруднения. Например, в работах Аристарха Самосского[12] найдена вот такая запись числа 71 755 875:

ʽΖ ΡΟΕ Μ ʽΕΩΟΕ
71755875

Так что древние греки оставили неплохое наследство древним римлянам, которые, однако, не воспользовались им... Впрочем, такая нумерация продолжала использоваться для изображения чисел ещё более тысячелетия – вплоть до падения Византии.

[12] **Аристарх Самосский** (310-230 до н.э.), древнегреческий математик и астроном. ***Подробнее см. в главе «Пантеон» книги 1.***

Большую роль в продвижении алфавитной записи чисел сыграл авторитет двух величайших математиков того периода – Архимеда и Аполлония Пергского[13]. Оба они работали над усовершенствованием системы обозначения больших чисел.

Архимед в своем сочинении «*Псаммит*» («*Исчисление песчинок*») ввел понятие ***октад***. Первую октаду составляют числа от 1 до мириады, то есть до 10000 (в обыкновенной милетской записи).

Во второй октаде за единицу принимается мириада и используются те же самые алфавитные числа от «α» до «,θϡϙθ». Это дает ряд от мириады до мириады мириад, то есть до 100.000.000. Третья октада по структуре снова совпадает с первой, но за единицу в ней берется уже 10^8. И так до любого, как угодно большого числа.

Архимед
(287-212 до н.э.)

Великий математик древности, основоположник математической физики, изобретатель. Согласно легенде, Архимед чертил на земле какой-то чертеж, когда во двор его дома ворвался римский солдат. Старик раздраженно сказал тому: «Поди прочь, ты затопчешь мой чертеж!». В ответ солдат убил ученого своим мечом...

В IX –XI веках работы Архимеда были переведены на арабский, в XIII веке они были переведены уже с арабского на латынь, а в веках появились переводы на многих европейских языках. Влияние работ Архимеда на мировую науку поистине трудно переоценить.

Подробнее см. в главе «Пантеон».

[13] **Аполлоний Пергский** (262 – 190 до н. э.), древнегреческий математик родом из Перги в Памфилии, прозванный современниками Великим Геометром. Главный сохранившийся труд, ставший классическим и доставивший славу Аполлонию, – «*Конические сечения*» написан в развитие более раннего не сохранившегося сочинения Эвклида «*Начала конических сечений*». Аполлоний ввел понятия параболы, гиперболы и эллипса и дал их теорию, сохранившуюся в практически неизменном виде до эпохи Ньютона. Остальные его труд известны лишь по названиям.

Имея такую совершенную числовую систему, Архимед смело брался пронумеровать все песчинки, которыми он мысленно заполнял всю известную тогда Вселенную. Сама идея такого математического образа очень интересна, но еще более впечатляет, что Архимед впервые предложил в своей работе полноценную позиционную десятичную систему. В этой системе не хватало всего одной малости – нуля.

После завоеваний Александра Македонского[14], алфавитные системы записи чисел получили огромное распространение в древнем мире. Поэтому, в частности у египтян, сирийцев, арамейцев, арабов, евреев, армян, грузин, индусов и у других народов, оказавшихся под сильным греческим влиянием, эта система счисления даже получила название александрийской. И хотя зачастую греческие буквы замещались национальными алфавитами, принцип записи чисел оставался практически тем же. Позже, через Византию, алфавитный принцип записи чисел попал и на древнюю Русь.

Для любознательного читателя будет небезынтересно сопоставить алфавитные цифры разных стран:

Число	Глаголица	Кириллица	Грузинский	Армянский	Иврит	Санскрит	Арабский
1	Ⰰ	А	ა	Ա	א	१	ا
2	Ⰱ	Б	ბ	Բ	ב	२	ب
3	Ⰲ	В	გ	Գ	ג	३	ج
4	Ⰳ	Г	დ	Դ	ד	४	د
5	Ⰴ	Д	ე	Ե	ה	५	ه
6	Ⰵ	Є	ვ	Զ	ו	६	و
7	Ⰶ	Ж	ზ	Է	ז	७	ز
8	Ⰷ	Ѕ	თ	Ը	ח	८	ح
9	Ⰸ	З	ი	Թ	ט	९	ط

14 **Александр Великий**, или **Македонский** (356-323 до н.э.), полководец, создатель мировой державы, распавшейся после его смерти.

1.4. Древнеславянские цифры

Без Кирилла с Мефодием так бы и
считали славяне на пальцах!
Лука Умищев

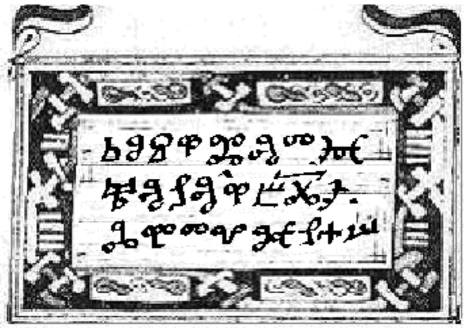
Изобретение древнеславянского алфавита (азбуки[15]) связывают с именами славянских апостолов, святых братьев Кирилла (827-869) и Мефодия (826-884). Братья были выходцами из Македонии, где был распространен один из славянских диалектов. Византия, заинтересованная в расширении своего политического и религиозного влияния, послала Кирилла и Мефодия с миссионерской миссией в славянские страны – Богемию и Польшу.

Святые Кирилл и Мефодий.

Там ими и были созданы две азбуки: глаголица и кириллица, две очень близкие по духу системы: почти тот же порядок букв, их произношение и название, а также соответствие цифр буквам. Основным можно считать то, что Кирилл и Мефодий добавили специальные буквы для славянских звуков, отсутствующих в греческом языке. С такой же проблемой столкнулись и западные страны Европы, но они вводили для этого сочетания латинских букв. Так, например, для звука «ш» в

[15] Русское слово «азбука» построено по тому же принципу, что и греческое слово «алфавит»: алфавит = альфа + бета (в латинском прочтении «вита»), т.е. оно «склеено» из названий двух первых греческих букв, а азбука = аз + буки, т.е.образовано от названий двух первых славянских букв.

кириллице есть отдельная буква, в английском же этот же звук передается двумя буквами «sh», во французском – тоже двумя «ch», а в немецком – и вовсе тремя «sch».



Текст на глаголице

Различие глаголицы и кириллицы сводится практически только к начертанию букв. Глаголица вся состоит из кружочков, петелек и разных завитушек. Аналогов ей в других языках не найдено. Возможно, что Кирилл и Мефодий вложили в начертание букв глаголицы свой личный вкус и оригинальный художественный талант.

Кириллица же фактически копирует греческий алфавит с добавлением новых букв для специфических славянских речевых звуков. Она возникла, по-видимому, несколько позже[16] глаголицы, причем, возможно, трудами последователей Кирилла и Мефодия, которые и дали название «кириллица», возможно, как данью уважения одному из патриархов…

Довольно долго обе системы использовались параллельно, но уже в XI веке следы глаголицы окончательно пропадают. Кириллица же, усовершенствуясь и видоизменяясь, дожила до наших дней.

Некоторые символы церковно-славянской азбуки – кириллицы – используются в качестве цифр.

Цифры в кириллице обычно обозначались прописными буквами, при этом, над цифрой ставился значок "~ ", называемый *титло*. Например, если а – это буква «аз», то а҃ – это уже цифра «1», если р – это буква «рцы», то р҃ – это число «100».

[16] Во всяком случае, имеется несколько пергаментных манускриптов, в которых текст на кириллице написан поверх смытой глаголицы (это делалось ради экономии пергамента).

Числа в кириллице записывались так же, как произносились, т.е. 13 - «три-на-дцать» записывалось сначала 3, а потом 10 («дцать»), т.е. справа налево: Г҃І. Но уже число 31 «тридцать один» записывается уже обычным образом: Л҃А. Так что последовательности цифр в записи числа диктовались не столь математикой, сколь эстетикой.

Известна мода искать в памятниках старины зашифрованные послания к потомкам. Не избежал этой участи и славянский алфавит. Первая буква «А» или *аз* означала по-древнеславянски «я». Вторую букву «Б» назвали *буки* - это слово однокоренное с названием дерева «бук», английским словом книга - «book» и русским словом «буква». Третья буква «В» - называлась *веди* от глагола «ведать» - знать. Похоже, что названия первых трех букв складываются в осмысленный текст: «Я буквы знаю». Рассуждая подобным образом, последовательность названий букв кириллицы (и глаголицы тоже) *«Азъ буки веде. Глаголь добро есте. Живите зело, земля, и иже како люди, мыслите нашъ онъ покои. Рцы слово твердо укъ фъртъ херъ. Цы черве, шта ъра юсь яти!»* интерпретаторы читают как: *«Я знаю буквы: письмо - это достояние. Трудитесь усердно, земляне, как подобает людям - постигайте мироздание! Несите слово убеждённо: знание - дар Божий! Точите, как червь, чтобы свет постичь!»*. Конечно, каждый имеет право на сомнения. Возможно, интерпретаторы кое-чем и пожертвовали ради гармонии. Но зато как увлекательна сама идея - прочесть напутствие самих Кирилла и Мефодия прямо из IX века!

Буква	Название	Звук	Числ. знач.
Аа	**Аз**	**а**	**1**
Бб	**Буки**	**б**	**нет**
Вв	**Веди**	**в**	**2**
Гг	**Глагол**	**г**	**3**
Дд	**Добро**	**д**	**4**

Буква	Название	Звук	Числ. знач.
Сс	**Слово**	**с**	**200**
Тт	**Твердо**	**т**	**300**
Ѹѹ	**Ук**	**у**	**нет**
Оу	**Оник**	**оу**	**400**
Фф	**Ферт**	**ф**	**500**

Буква	Название	Звук	Числ. знач.
Єє	Есть	е	5
Жж	Живете	ж	нет
Ѕѕ	Зело	з	6
Зз	Земля	з	7
Ии	Иже	и	10
Іі	И	и	8
Йй	Иже краткое	й	нет
Кк	Како	к	20
Лл	Люди	л	30
Мм	Мыслите	м	40
Нн	Наш	н	50
Оо	Он	о	70
Ѻѻ	О (широкое)	о	нет
Ѡѡ	Омега	о	800
Ѽѽ	Оле	о	нет
Пп	Покои	п	80
Рр	Рцы	р	100

Буква	Название	Звук	Числ. знач.
Хх	Хер	х	600
Ѿѿ	От	от	
Цц	Цы	ц	900
Чч	Червь	ч	90
Шш	Ша	ш	нет
Щщ	Ща	щ	нет
Ъъ	Ер	тв. зн.	нет
Ыы	Еры	ы	нет
Ьь	Ерь	мяг. зн.	нет
Ѣѣ	Ять	е	нет
Юю	Ю	ю	нет
Ꙗꙗ	Я	иа	нет
Ѧѧ	Малый юс	Я	нет
Ѯѯ	Кси	кс	60
Ѱѱ	Пси	пс	700
Ѳѳ	Фита	ф	9
Ѵѵ	Ижица	и (в)	нет

1.5. Арабские цифры … из Индии

> … Записи сделаны с цифрами римскими, отнюдь не арабскими, считавшимися легкомысленным новшеством, непристойным для деловых книг…
> ***Из описания книги 1494 года.***

Система счисления, используемая сейчас повсеместно, пришла к нам из Индии. Словосочетание «арабские цифры», честно говоря, не имеет никакого исторического смысла, поскольку эти цифры (как и система счисления) не были арабами ни изобретены, ни даже использованы, кроме как математиками и астрономами. Но и ученые, в основном, пользовались шумерской системой, а купцы – греческой и израильской. Однако, поскольку эти цифры попали сначала к персам, от них – к арабам, а потом уже от арабов в Европу, за ними закрепилось название «арабские». Сами же арабы называли их «индийскими цифрами».

Изначально индийская система счисления была построена на алфавитной основе, как и у большинства народов античности. В этой системе 33 согласных буквы индийского алфавита обозначали цифры 1,2,3, ..., 25,30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 и 100, а большие числа образовывались добавлением различных гласных. Фактически эта система мало отличалась от ионической, или милетской.

Но затем индийский математик Арьябхата[17] в своем фундаментальном труде «*Арьябхатия*» произвел поистине революционное преобразование этой системы.

Вместо специальных символов для 10, 20, 30, ... он использовал, по существу, запись 1×10^1, 2×10^1, 3×10^1... , а для 100, 200, 300,... –1×10^2, 2×10^2, 3×10^2, ... и т.д. Используя этот способ, можно было легко записать любые числа. Например, огромное число 706 005 000 400 003, легко записывалось как $7\times10^{14} + 6\times10^{12} + 5\times10^9 +$

[17] **Арьябхата** (476-550), крупнейший древнеиндийский астроном и математик. Его называют также Арьябхата Старший, чтобы отличать от однофамильца-математика, который работал в X веке. Книга «*Арьябхатия*» описывала гелиоцентрическую модель Вселенной, давала основы арифметики, алгебры, обычной и сферической тригонометрии. Им было вычислено число «пи» с точностью до пяти знаков.

$4\times10^5 + 3\times10^0$, где к тому же степень десятки обозначалась просто порядковым номером цифры, считая справа налево.

В отличие от аддитивных (т.е., таких, где используется только операция сложения, как у греков), такие системы называют мультипликативными (от латинского слова, означающего «*умножение*»).

Поистине, это изобретение бесценно: благодаря ему, проведение любых арифметических операций существенно упростилось. Действительно, разве можно себе представить сложение в столбик, деление или умножение, как это сейчас делает любой первоклассник, используя римские цифры или числа, записанные в алфавитной системе?

По поводу этой системы Пьер Лаплас[18] в своей статье «*Обзор индийской математики*» заметил:

> *«Мысль выражать все числа десятью символами, каждый из которых имеет свое численное значение и позицию в числе, возникла в Индии. Эта идея, кажется, сейчас настолько простой, что никто не отдает дани ее значительности и огромной важности. Именно ее простота делает вычисления удобными и делает арифметику одним из наиболее полезным открытий. Важность этого открытия позволяет оценить тот факт, что эта идея оказалась скрытой даже от двух величайших гениев античности – Архимеда и Аполлония».*

А почему, собственно, основанием системы выбрано число 10? Математических причин особых на то нет. Скорее всего, виноваты наши две пятерни с 10-ю пальцами: ведь начиная с пещерных неандертальцев, пальцы долго оставались основным «вычислительным инструментом» человека.

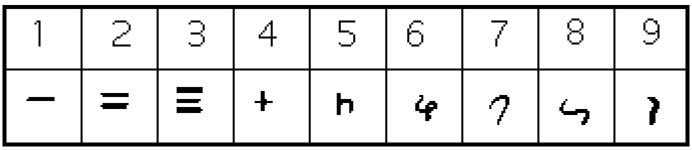
Первой позиционной системой, как мы уже говорили, была шестидесятеричная система шумеров, но она не прижилась из-за громоздкости.

---

18 **Пьер Симон Лаплас** (1749-1827), великий французский математик, физик и астроном. Основатель теории вероятностей, математической физики и небесной механики. Сделал фундаментальный вклад в дифференциальные уравнения, алгебру, акустику, термодинамику, геодезию. ***Подробнее см. в Главе «Пантеон» книги 1.***

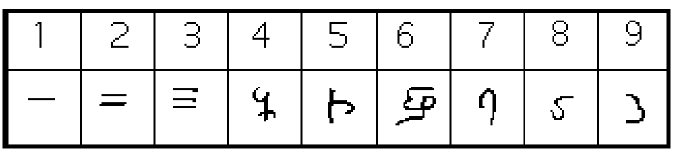
Правда, во времена Великой Французской революции, на заседаниях Революционной комиссии по весам и мерам, высказывались мнения о введения двенадцатеричной системы, но в яростных дискуссиях победила десятичная система. Возможно, причиной было то, что в существовавшей системе было 10 устоявшихся символов, и введение дополнительно двух новых могло привести к большой путанице в финансовых и экономических институтах государства.

Десяти символам, используемым для обозначения десяти цифр – 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9, – потребовалось немало времени, чтобы обрести их нынешнюю форму. Считается, что образ современных цифр начал формироваться на базе санскритских букв. В I веке н.э. в Индии существовали браминские цифры:

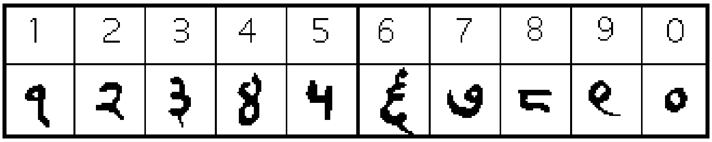


Затем во времена династии Гупта, которая правила в IV – VI веках в царстве Магадха (северо-восточная часть Индии), браминские цифры были вытеснены цифрами Гупта. Как и в случае с александрийской системой счисления, новые символы Гупта распространились по большой территории стран, завоеванных этим царством.

Однако, отличие цифр Гупта не было столь уж существенным.



Затем появились цифры Нагари, которые иногда называют Деванагари, что буквально переводится с санскрита, как «написанные богом». В VI веке они вытеснили цифры Гупта. Кстати, в эту новую систему уже был включен ноль, что было принципиальным нововведением.



Эти цифры по своему начертанию уже весьма близки к современным, хотя некоторые из них занимают не совсем привычные позиции. Но не будем забывать, что путешествуя через века, эти цифры подверглись неизбежному влиянию персов и арабов.

Вот как описывает Ибн аль-Кифти[19] в своей книге «*Хронология грамоты*» появление индийской децимальной системы в Багдаде:

> «*...некто из Индии предстал перед халифом аль-Мансуром*[20] *в 776 году; он хорошо владел методами вычисления положения небесных тел... Аль-Мансур приказал перевести книгу на арабский язык. Основываясь на этом переводе, арабы смогли сами вычислять движение планет...*»

Возможно, упоминалась книга Брахмагупты[21] «*Открытие Вселенной*» (*Брахмасспхутиддханта*), в которой использовалась девангарские цифры, включая ноль.

В начале IX века узбекский математик Абу Аль-Хорезми[22] написал книгу «*О вычислениях с использованием индийских цифр*», а другой математик – Абу Аль-Кинди[23], выпустил четырехтомник «*Об ис-*

---

[19] **Ибн аль-Кифти** (1172-1248), арабский ученый, известный работами по логике, астрономии, математике, истории и медицине.

[20] **Абу Джафар абд-Аллах аль-Мансур** (754–75), арабский халиф, основатель города Багдада, ставшего столицей государства.

[21] **Брахмагупта** (598 - 670), наиболее выдающийся индийский математик своего времени. Он сделал весомый вклад в астрономию и особенно в математику, дав алгоритм извлечения квадратного корня, а также решения квадратных уравнений.

[22] **Абу Джафар Мухаммад ибн Муса аль-Хорезми**, или на латыни **Алгоритми** (790-840), узбекский математик и астроном, которого называют «отцом алгебры». Его книга «*Аль-Китаб аль-ксар фи хисаб аль-джабр вал-мугабала*» была переведена в Европе в XII веке. Часть арабского названия книги («*аль-джабр*») дала название алгебре, а имя самого автора в латинском написании породило термин «*алгоритм*».

[23] **Абу Юсуф Якуб ибн Ишак аль-Саббах аль-Кинди** (805-873), арабский математик, астроном, физик и географ, а также талантливый музыкант.

пользовании индийской нумерологии». Полагают, что именно эти две книги сыграли огромную роль в «завоевании» Европы и Среднего Востока индийской десятичной системой.

Достоверно неизвестно, когда десятичная система счисления впервые появилась в Европе: есть свидетельства о многих разрозненных появлениях ее в разных местах. Старейший испанский манускрипт, впервые содержащий десятичную систему, датирован 976 годом. Однако, даже несмотря на то, что французский монах Герберт Реймский (или Герберт из Орийака) (940-1003), который был весьма неплохим математиком, в 999 стал Римским Папой Сильвестром (Sylvester) II, использовал арабские цифры в некоторых своих сочинениях, они не получили широкого признания.

Увы! Даже Папа Римский не смог внедрить новую систему счисления: еще многие десятилетия ученые Европы использовали греческую систему, а купцы продолжали писать в своих бухгалтерских записях все те же неуклюжие римские цифры...

Первым, кто наиболее активно начал внедрять арабскую систему среди ученых Европы, был итальянский математик Леонардо Фибоначчи[24], получивший образование в Алжире и узнавший там о новой системе счисления. В 1202 году в Италии появилась его «Книга о счёте» (*Liber abaci*), по которой десятичная система в последующие века начала изучаться в первых, начавших появляться, европейских университетах.

Однако широкое использование десятичной системы в Европе началось лишь с после изобретения Иоганном Гуттенбергом[25] печатного станка.

---

[24] **Фибоначчи**, или **Леонардо из Пизы** (1175 – 1240), одна из самых крупных фигур в средневековой математике. ***Подробнее см. в главе «Пантеон» книги 3.***

[25] **Иоганн Гуттенберг** (1398 – 1468), немецкий изобретатель впервые построивший печатный станок. В 1455 году он отпечатал двухтомную Библию, которая до сих пор рассматривается шедевром книгопечатания. Гуттенберг – это его прозвище Иоганна по имени города, в котором он жил, а истинная фамилия была Генсфлайш.

What kind of numeration system may be

We used to decimal numeration system: units digit, tens digit, hundreds digit, etc. Where did it originated? How did it develop? Why does this system exist in different countries? Do there other numeration systems exist?

One of usual answers on the first question is: "A man used to count with the use of fingers, and there are 10 fingers on the both hands". Indeed, this suggestion is, probably, very close to the truth. However, immediately a question arises: "Were there six-fingered people on Britain islands where the duodecimal numerical system deeply penetrate in common life?" Indeed, There are the following measures of length in English system, coming to us from Meddle Ages: an inch consists of 12 lines, a foot consists of 12 inches[26]… A similar situation with weight measurements where Britons use sexadecimal system:16 drams form one ounce, and 16 ounces form one pound...

If we did deeper (and into the farer past – almost 4 millenniums from now), we find even more exotic numerical systems. For instance, Sumerians and after them Babylonians widely used sexagesimal numerical system. Strange? Not so strange: we use this numerical system even nowadays☺: 60 seconds compose a minute, and 60 minutes compose one hour. Moreover, remember about 360 degrees and 360 days a year (approximately).

At the same time, modern computers use simplest numerical system – binary one. (We will consider this more detailed in the book of this series "From finger count to computer".)

Now, let us "design" ourselves, for instance, quintary numerical system. First, recollect that many people of the past used repetition of a symbol for visual presentation of increased row of numbers. For

[26] One line equals 2,1167 mm, and, correspondingly, inch and foot are equal to 2/54csm and 30.48 cm.

instance, first Roman numbers were I for 1, II for 2, III for 3, IIII for 4, and only for 5 they used a new sign – Г. So, let us call some imaginary unit in our new quintary system by symbol "A" and call it "Abrik". For number "5" we introduce a unit of the next rank that is denoted by "B" and called "Babrik". Units of next ranks will be "Cabrik" ("C"=25), Dabrik" ("D"=125), etc. Using these notations, let us compile the following self-explanatory table

Decimal	0	1	2	3	4
Quintary		A	AA	AAA	AAAA
Decimal	5	6	7	8	9
Quintary	B	BA	BAA	BAAA	BAAAA
	.				
Decimal	10	11	12	13	14
Quintary	BB	BBA	BBAA	BBAAA	BBAAAA
	.				
Decimal	15	16	17	18	…
Quintary	BBB	BBBA	BBBAA	BBBAAA	..
	. . . .				

Thus, B = AAAA+A, C = BBBBAAAA+A, D = CCCCBBBBAAAA+A, and so on.

Quintary system	Decimal	Quintary system	Decimal
A×A = A A×AA = AA A×AAA = AAA A×AAAA = AAAA	1×1=1 1×2=2 1×3=3 1×4=4	AA×A = AA AA×AA = AAAA AA×AAA = BA AA×AAAA = BAAA	2×1=2 2×2=4 2×3=6 2×4=8
Quintary system	Decimal	Quintary system	Decimal
AAA×A = AAA AAA×AA = BA AAA×AAA = BAAA AAA×AAAA = BBAA	3×1=3 3×2=6 3×3=9 3×4=12	AAAA×A = AAAA AAAA×AA = BAAA AAAA×AAA = BBAA AAAA×AAAA =BBBAAA	4×1=4 4×2=8 4×3=12 4×4=16

Of course this table can be continued.

For transforming a number written in our new quintary notation as DDCCCBAAA into common decimal numerical system, one needs to perform the following calculations:

$AA\times D + AAA\times C + A\times B + AAA\times A = 2\times D + 3\times C + 1\times B + A\times 1 =$ $2\times 125 + 3\times 25 + 1\times 5 + 3\times 1 = 433$.

This number in “Quintarians” language that we introduced above should be pronounced like:

“(AA times D)-and-(AAA times C)-and-(A times B)-and-(AAA)”.

Of course, there is no needs to invent “abriks-babriks”. One can use images of decimal figures, however correctly understands what new “tens”, “hundreds” and “thousands” actually mean.

By the way, if one decides to use numerical system with larger number of figures of the 1st rank than in decimal system, then anyway it is necessary to introduce a new notation. For instance, duodecimal system needs new symbols for 10 and 11, say, A=10 and B=11. Then decimal 12 in duodecimal system is denoted as 10 and decimal 25 denoted as 21. Further, for decimal 12×12=144, in duodecimal system one has to write 100 (i.e. unit of the third order.

Different numerical systems can help you to make jokes. Assume that you are 9 years old. Somebody asks you: “How old are you?” You answer nothing though write “1oo”on a sheet of paper and show it. “O, you are a joker!” – “No, it is my age but written in ternary system…”

Indeed, using decimal figures, you can write the following table:

Decimal	0	1	2
Ternary		1	2
Decimal	3	4	5
Ternary	10	11	12
Decimal	6	7	8
Ternary	20	21	22
Decimal	9	10	11
Ternary	100	101	102
Decimal	12	13	14
Ternary	1000	1001	1002
…			

1.6. Скромное обаяние нуля

> Ноль... Ничто, пустота... Но представьте себе зарплату всего 1, но зато с пятью нулями! Это уже нечто!
>
> ***Лука Умищев***

Мухаммед бен Муса из Средней Азии, более широко известный нам под именем аль-Хорезми, был одним из первых арабоязычных математиков, освоивших индийскую десятичную систему. Он же обратил внимание и на важное нововведение – нуль: «Если не остается ничего, – писал он о вычитании, – то пишут маленький кружочек, чтобы место не оставалось пустым. Этот кружок должен занять место, потому что в противном случае у числа окажется меньше разрядов, и второй, например, разряд мы можем счесть за первый».

Когда последние разряды заполнялись «круглыми нулями», такие числа называли «круглыми».

Нуль, несмотря на свою кажущуюся вспомогательную роль, число очень интересное. В системе счисления у нуля две обязанности: одна – указывать на пропущенную позицию в позиционной записи числа, а другая быть обычным числом – номером, стоящим по порядку перед единицей.

Учительница:

- Вовочка, назови числа, которые в сумме давали бы десять.

Вовочка:

- Один и ноль!

Откуда появилось само название «нуль»? В Индии в VI веке н. э. десятичные числа записывались девятью цифрами, а вместо нуля на счетной доске оставляли пустой столбец. Но при прочтении числа уже использовали санскритское слово «шунья» (*sunya*), что означало «*пусто*». Когда в VIII веке н. э. арабы переводили индийские математические трактаты, то этот термин зазвучал как «аль-сифр» (*al-sifr*).

Леонардо Фибоначчи, внедривший десятичную систему в Европе, записал звучание этого слова на латыни, как «*zephirum*». Слово «*zephirum*» прижилось и даже породило термин «*zero*» (нуль) в английском и французском языках. От него же пошло и французское слово «*chiffre*», немецкое «*ziffer*», английское «*cipher*», а уже от них и русское слово «*цифра*». Кстати, английское слово «cipher», кроме значений «арабская цифра» и «шифр», имеет также смысл «пустота, ничтожество», т.е., тот же нуль, но уже в уничижительном смысле!

Нуль – это математическое изобретение! И очень крупное. «Самая важная цифра есть нуль, – пишет Бартел Ван-дер-Варден[27]. – Это была гениальная идея – сделать нечто из ничего, дать этому нечто имя и изобрести для него символ».

Для записи многоразрядных чисел просто необходимо было ввести какой-то символ обозначающий «пустоту» на нужной позиции (скажем, есть только сотни и десятки, а сверх того единиц нет, или есть только сотни и единицы, а нет десятков). Нужна была "никакая цифра" (на латыни, *nulla figura*, откуда и пошел «нуль» и «ноль»[28]). Такой знак появился в ассиро-вавилонской математике в VIII в. до н. э., и он отмечал в ней уже двенадцатеричные разряды.

Индусы, по-видимому, сам символ для нуля заимствовали у древних греков, которые использовали для обозначения «пустоты», «ничего» букву омикрон (*o*). Согласно другой версии, такое изображение нуля можно связывать с одним из индийских названий нуля – «дыра» (*кха*). Ну, а как еще изобразить дыру, как ни символом «*O*»?»

---

27 **Бартел Лендерт Ван-дер-Варден** (1903–1996), известный современный голландский математик, автор монографий по математической статистике, алгебре и истории математики.

28 Слово «нуль» существует в русском языке с Петровских времен, когда в России в Санкт- Петербургской Академии Наук активно начала работать замечательная плеяда математиков (Л. Эйлер, братья Бернулли и др.). Слово «ноль» в русском языке появилось позднее. В русском языке «нуль» и «ноль» разнятся по смыслу. «Нуль», как слово более старое бытует и в разговорном языке, например, «сила равна нулю», «температура ниже нуля». В то же время мы говорим «ноль целых», «счет матча ноль-ноль». Одним словом: ноль внимания – все сводится к нулю...

Во всяком случае, подобный же круглый значок использовался для обозначения нуля и в древнем Китае, и в Индонезии, а те вряд ли слышали о греческом алфавите, а тем паче, откуда взялся омикрон.

Признать нуль мерой количества предметов догадались лишь в Индии V века. Великий индийский математик Арьябхата в своем трактате «*Арьябхатия*» так сформулировал свойства этого ни на что не похожего числа: если прибавить нуль к какому-либо числу, то число останется неизменным; оно не изменится также, если отнять от него нуль; если же умножить число на нуль, то получится всегда нуль. О делении на нуль мудрый индус тактично умолчал. В явном виде запрет деления на нуль был осознан только в XII веке.

Ибн Эзра[29] в XII веке написал три труда о числах, что немало способствовало тому, что на десятичную систему, включая и десятичные дроби, обратили свое внимание многие образованные люди Европы. Его «*Книга чисел*» дает описание десятичной системы, причем он использовал традиционное написание многоразрядных чисел слева направо. Число нуль он называл «*галгал*», что в переводе с иврита означает «колесо» или «окружность».

Замечательная индийская система счисления столь же успешно стала проникать и на Восток. В 1247 году китайский математик Цзинь Цзю-шао[30] написал свое «*Математическое исследование в девяти частях*», где символ «*O*» использован для обозначения нуля.

Греки не то, что бы не додумались до числа с такими свойствами: известны споры на эту тему ещё у пифагорейцев. Однако великие греческие мыслители, искавшие во всём геометрический смысл, отвергли нуль, отказали ему в праве быть числом, поскольку в геометрии отрезок длины нуль или фигура с нулем вершин не существуют.

---

[29] **Абрахам бен Меир ибн Эзра** (1092-1167), еврейский ученый, философ, теолог, астроном, поэт и знаток иврита. Он ввел десятичную систему счисления для евреев, живших в христианском мире. Он использовал буквы иврита (от алев до тет) для обозначения чисел от 1 до 9, но ввел также специальный знак для нуля.

[30] **Цзинь Цзю-шао** (1202-1261), китайский математик, считающийся одни из величайших математиков XIII века. Замечательно то, что математика не была его основной профессией: он работал во многих других областях.

Римские мудрецы формулировали свое отношение к нулю с присущим им изяществом: «*Ex nihilo nihil*», что означает «*Из ничего – ничто*», или, как у нас часто говорят, «*Из ничего "чего" не получишь*».

Почему же индусов не смутили загадки, связанные с нулем? Некоторые историки полагают, что, в отличие от Греции или Рима, Индия никогда не испытывала ужас ни перед бесконечностью, ни перед пустотой.

Упомянем и о другой великой цивилизации, которая имела позиционную систему счисления, содержавшую нуль. Речь идет о Майя, которые обитали в Центральной Америке. Расцвет их цивилизации пришелся на период от середины III до конца VIII веков. Как показывают исследования, Майя владели двадцатеричной позиционной системой, причем они знали и использовали в своих вычислениях нуль. Это было удивительное математическое достижение, которое, к сожалению, никак не затронуло остальное человечество...

Большой толчок развитию позиционной системы в Европе дало массовое внедрение в XIII –XIV дешевой бумаги вместо дорого пергамента. С повсеместным применением бухгалтерских книг процесс вытеснения римских цифр арабскими стал необратимым. Философия философией, а приходы и расходы в десятичной системе записывать куда проще, чем в римской.

Рене Декарт
(1596 - 1650)

Знаменитый французский философ, математик, физик и физиолог. Во время Тридцатилетней войны служил в армии. Несколько лет путешествовал по Европе, а с 35 лет обосновался в Нидерландах, где издал свои основные книги.

Через 20 лет по личному приглашению королевы переехал в Швецию и вскоре умер от случайной простуды. Он заложил основы аналитической геометрии (декартовы координаты). Основал Картезианскую философскую школу (от латинского написания его имени *Renatus Cartesius*), знаменитое мотто которой было: «Cogito *ergo sum*» (« Я мыслю, следовательно, я существую»).

Тем не менее, в Европе нуль был окончательно воспринят только в XVII веке после работ Рене Декарта. (Интересно, что сам Декарт первоначально выступал ярым противником нуля!)

2. О ЧИСЛАХ

Вам поклоняюсь, вас желаю, числа!
Свободные, бесплотные, как тени,
Вы радугой связующей повисли
К раздумиям с вершины вдохновенья!
Валерий Брюсов[31].

2.1. Семь, семь, семь...

Всё есть число семь.
Пифагор

Неинтересных чисел нет. Но число 7 – число очень интересное! В детстве, многие из нас наверняка играли в такую незамысловатую игру: один спрашивал другого: «Загадай быстро число и скажи!» Чаще всего ответом было: «Семь!» Или спрашивали друг у друга: «Какое твое самое счастливое число? Отвечай быстро!» и получали почему-то почти всегда один и тот же ответ: «Семь!»

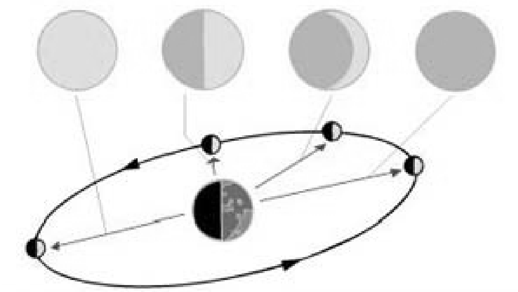
Чем же привлекает это неказистое число. Похожее то ли на косу, то ли на кочергу? Что же за такая особая магия кроется в числе 7? Ответа на этот вопрос не знает никто, хотя многие ученые и пытались его найти. В результате собрано много примеров из древней истории человечества. В стародавние времена числам придавалось особое значение, но среди всех число семь признавалось священным всеми цивилизованными народами античности и Востока.

Семь цветов радуги... Семь нот в музыке...

---

[31] **Валерий Яковлевич Брюсов** (1873-1924) – русский поэт, прозаик, драматург, переводчик, литературовед, литературный критик и историк. Один из основоположников русского символизма.

Одна из теорий происхождения культа числа 7 связана с астрономией. Человек, с незапамятных времен боготворил небеса. Самые большие и яркие светила в его глазах становились наиважнейшими и высочайшими из сил, а античный мир насчитывал семь «небожителей»: Солнце, Луну, Венеру, Марс, Меркурий, Юпитер, Сатурн – те, которые видны невооруженным глазом. Кроме того, в пользу астрономической теории числа 7 говорит и тот факт, что люди в самых разных местах Земли определили неделю семидневной. В далекие времена за основу исчисления был взят лунный цикл, равный 28 дням. За этот период Луна проходит через 4 фазы по семь дней в каждой: (1) новолуние[32] плюс «молодая луна»; (2) первая четверть плюс «растущий месяц»; (3) полнолуние плюс «убывающий месяц»; (4); вторая четверть плюс «старая луна».



Лунный цикл.

В античном мире семь небесных светил обожествлялись: у египтян и финикийцев было семь изначальных высших богов, у парсов[33] - семь ангелов и семь противостоящих им демонов...

Священники многих восточных народов подразделялись на семь степеней, семь ступенек вели к алтарям...

Христианские религиозные процессии обходили храмы семь раз, и прежде чем дать обет, верующие должны были семь раз преклонить колена.

Семь, семь, семь...

---

[32] Первое появление Луны на небе называется «*неомения*».

[33] **Парсы** – последователи древнеиранского пророка Заратуштры (Зороастра), переселившиеся из Персии в Индию в древние времена.

Древний Китай подразделялся на семь провинций, древняя Персия - на семь сатрапий.

В Древней Греции семь – символ Аполлона. Аполлон родился в седьмой день месяца, его лира имела семь струн. Мифологическому человеко-быку Минотавру, обитавшему в лабиринте на острове Крит, жители Афин ежегодно в качестве дани посылали на съедение по семи юношей и девушек, нимфа острова Огигия Калипсо семь лет держала в плену Одиссея; у Атланта, подпиравшего плечами небесный свод, было семь дочерей-плеяд, превращенных в созвездие. В легендах можно встретить семь Гесперид, семь кругов ада, семь циклопов, семь детей Ниобы, семь трубок флейты Пана и т. д.

Семь, семь, семь...

Рим был построен на семи холмах, а посему звался Градом на Семи Холмах и Градом Семи Башен. Согласно мусульманским источникам, «он осаждался семь раз и был взят спустя семь недель седьмым султаном Османской империи».

Семь чудес света (сохранившиеся, правда, кроме пирамиды Хеопса, лишь в памяти людской и в придуманных по древним описаниям рисункам и архитектурным макетам)...

Пифагорейцы, которые считали, что число лежит в основе всего, почитали число семь особо. Они называли его символом святости, здоровья, разума.

Еще бы! Число семь является в некотором смысле граничным внутри первой десятки: $1\times2\times3\times4\times5\times6\times7 = 7\times8\times9\times10 = 5040$...

А это удивительное свойство периодических десятичных дробей, получающихся при делении на семь

$$1/7=0.(142857)$$
$$2/7=0.(285714)$$
$$3/7=0.(428571)$$
$$4/7=0.(572428)$$
$$5/7=0.(714285)$$
$$6/7=0.(857142)$$
$$7/7=1$$
$$8/7=1+(1/7) = 1.(142857)$$
$$9/7= 1+2/7 = 1.(285714)$$
$$10/7= 1+ 3/7 = 1.(428571)$$

и т.д.

Ведь каждый период – это циклический сдвиг одних и тех же цифр: 142857!

(Правда, древние греки здесь не при чем – они не знали десятичных дробей).

Но, возвращаясь к древним грекам, следует заметить, что число «7» называлось «числом девственницы»: нет числа, меньшего 7 которое входило бы в него (было бы делителем), как нет ни одного числа внутри первых десяти, которое могло бы произвести «7» в результате деления другого числа, т.е. «7» рассматривалось как число, замкнутое в себе. Действительно, $2 = 6:3 = 8:4 = 10:5$, $3 = 6:2 = 9:3$, $4 = 2\times2= 8: 2$; $5 = 10:2$; $6 =3\times2$; $8 =4\times2$; $9 = 3\times3$, а вот 7 таким образом не получишь!

Семь, семь, семь...

Число «семь» имеет особое значение в иудаизме: «все седьмое любимо». Наиболее знамениты в иудаизме две «семерки»: седьмой день недели, суббота, и седьмой, «субботний», год. У них есть даже свои названия: «суббота человека» и «суббота земли».

Менора – иудейский ритуальный подсвечник имеет семь ветвей...

Менора и герб государства Израиль.

Правда, есть менора и с девятью ветвями, но в этом случае ее называют Ханукией, или ханукальной менорой...

Отдавая дань числу 7, заметим все же, что неинтересных чисел нет, как доказал Евгений Скляревский (см. http://arbuz.uz).

Действительно, предположим обратное, то есть что можно разделить числа на две части - интересные и неинтересные. Возьмем самое маленькое число из неинтересной части – это же интересное свойство данного числа, а ведь оно было отнесено к неинтересным! Таким образом, приходим к противоречию. Что и требовалось доказать…

Согласно Священному Писанию, семь - совершенное число. Оно правит временем и пространством. Число семь упоминается в Ветхом и Новом Заветах более 600 (!) раз.

Например: «Всякому, кто убьет Каина, отмстится всемеро», «...и прошло семь лет изобилия... и наступили семь лет голода», «через семь дней воды потока пришли на землю» и т. д.

В Библии приводится семь главных грехов для христианина: гордыня, тщеславие, нечистота, зависть, неумеренность в еде и питье, гнев и лень. И им противопоставлено семь добродетелей: мудрость и мужество, умеренность и справедливость, вера, надежда и любовь. Из Библии известны и семь обязанностей милосердия: голодного накормить, жаждущего напоить, бездомного приютить, нагого одеть, больного навестить, умершего похоронить, сохранить память о нем.

Христианская молитва «Отче наш» состоит из семи обращений и просьб.

Да что там! Господь при всем своем всемогуществе сотворял Землю в течение семи дней (включая выходной...)!

Еврейский новый год – Рош ха-Шана и праздник Йом Киппур приходятся на седьмой месяц, отсчитывая от месяца нисана.

В талмуде упоминаются семь пророчиц: Сара, Мириам, Дебора, Хана, Абигайль, Хулда, Эстер.

Число архангелов также семь: Уриил, Рафаил, Рагуил, Михаил, Саракаил, Гавриил и Иеремиил.

Египетская богиня Сешат.

Семь, семь, семь...

В античной Греции семерка считалась святой цифрой, связанной с солнечными богами – Аполлоном, Гелиосом и Афиной. У Гелиоса было семь сыновей и семь дочерей. Фивы имели семь ворот, которые защищали от нападения врагов семь героев... Согласно учению пифагорейцев, семерка являлась символом сотворения Вселенной.

В Древнем Египте насчитывалось семь, богов света и семь – тьмы. Это число очищения, покаяния (за каждый грех каяться следует семь лет, рабов освобождали на седьмой год, траур носили семь дней и т.д.). Так же семь было священным числом бога Осириса (символ бессмертия), а богиня знаний, письма, счета и хронологии Сешат изображалась в виде женщины с семиконечной звездой...

В Исламе также царит цифра 7: семь небес, семь земель, семь адов, семь райских врат, семь пророков. В Мекке паломник во время хаджа должен семь раз обойти вокруг Каабы[34].

Паломники во время хаджа у Каабы.

Душа умершего семь дней проводит возле могилы. Новорожденный получает имя лишь на седьмой день.

Семь, семь, семь...

В средневековье было семь «свободных искусств» (грамматика, риторика, диалектика, арифметика, геометрия, музыка, астрономия). Тогда же присяга давалась перед семью свидетелями, а самого присягающего семь раз окропляли кровью.

Семь печатей, семь смертных грехов, семь чаш гнева, семь громов, семь цветов радуги, семь золотых подсвечников, семь голов зверя, семь нот, семь богатырей, семь гномов, семь дней недели, семь ветров, семь Столпов Мудрости…

Семь, семь, семь...

[34] **Кааба** – мусульманская святыня в виде большого черного камня высотой 15 метров и сторонами в 10 и 12 метров. Находится во внутреннем дворе Запретной Мечети (Мекка). Кааба содержит чёрный камень. Кааба служит ориентиром, к которому обращают свое лицо мусульмане всего мира во время молитвы.

Статуя Свободы в Нью-Йорке.

Кстати, у американской Статуи Свободы от головы отходят семь лучей...

Что я хотел всем этим сказать? Да ничего! Просто любопытно…

Пословицы и поговорки с числом 7

- В гору-то семеро тащат, а с горы и один столкнет
- Глядит, ровно семерых проглотил, осьмым поперхнулся.
- Двое пашут, а семеро руками машут.
- Для бешеной собаки семь верст не крюк.
- До седьмого колена.
- До седьмого пота.
- Живёт и такой год, что на день семь погод.
- За семь верст киселя хлебать.
- За семью морями.
- За семью печатями.
- Лиса семерых волков проведёт.
- Лук - от семи недуг.
- На дню семь пятниц.
- На седьмом небе.
- На семерых пьяных одной головы не хватит.
- На семи ветрах.

- На семь пар ног надо семь пар сапог.
- Не в семи слониках счастье.
- Не велик городок, да семь воевод
- Не строй семь церквей, а пристрой семь детей.
- Один с сошкой – семеро с ложкой.
- Пока баба с печи летит, семьдесят семь дум передумает.
- Пошел за семь верст киселя хлебать.
- Пустой штоф – что радуга без семи цветов.
- Седьмая вода на киселе.
- Семеркой туза не перешибить.
- Семеро ворот, да все в огород.
- Семеро генералов над одним солдатом.
- Семеро не один, в обиду не дадим.
- Семеро одного не ждут.
- Семеро одну соломинку никак не подымут.
- Семеро по зайцам, а шкурки нет.
- Семеро с ложкой, а один с сошкой.
- Семь бед – один ответ.
- Семь верст до небес и всё лесом.
- Семь верст киселя хлебать.
- Семь дел в одни руки не берут.
- Семь деревень, а лошадка одна.
- Семь лет мак не родил, а голода не было.
- Семь лет молчал, на восьмой вскричал.
- Семь лет не виделись, а сошлись - и говорить нечего.
- Семь пядей во лбу.
- Семь пятниц на неделе.
- Семь раз отмерь – один раз отрежь.
- Семь раз по-твоему, да хоть раз по-моему.
- Семь рек осушила, холста не смочила.
- Семь серых волков на одного косого.
- Семь смертных грехов.
- Семь топоров вместе лежат, а две прялки врозь.
- Семь четвергов, да и все в пятницу.
- У одной овечки да семь пастухов.
- У семи нянек дитя без глазу.
- Хоть и осьминог – да хром на семь ног.

2. Enigmatic number Nine

This trick was very popular in my childhood. You write in advance number 9 on a piece of paper and put it in your pocket. Then you offer your friend: "Think of a two-digit number. Add one digit to another. Extract the obtained sum of digits from the initial number Did it?” At this moment you take out of your pocket a piece of paper with number nine and declare: “Your new number can be divided by this number!”

You became a real magician in eyes of your friends!

Everybody begins to try: 16 – (1+6) = 9; 93 – (9+3) = 81… and so on!

Let us explain this mathematical trick. At the beginning, let us compile the following table:

0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
10	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**
20	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**
30	**31**	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**
40	**41**	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**	**49**
50	**51**	**52**	**53**	**54**	**55**	**56**	**57**	**58**	**59**
60	**61**	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**	**67**	**68**	**69**
70	**71**	**72**	**73**	**74**	**75**	**76**	**77**	**78**	**79**
80	**81**	**82**	**83**	**84**	**85**	**86**	**87**	**88**	**89**
90	**91**	**92**	**93**	**94**	**95**	**96**	**97**	**98**	**99**

You can observe that all numbers on the shadowed diagonal have the form of $9\times n$, where n is equal 1, or 2, or 3, …, or 10. Then you take notice of a strange thing: if you will perform operations described above, you get only numbers belonging to that shadowed diagonal. Indeed, all numbers of the first line give always number 9: indeed, 11 – (1+1) = 9; 12 – (1+2) = 9; …; 19 – (1+9) = 9. Then all numbers on the second line give always number 18: indeed, 21 – (2+1) =18; 22 – (2+2) = 18; …; and finally, 29 – (2+9) = 18, etc.

It is interesting that all numbers on the shadowed diagonal have sum of their digits equals to 9! It makes, probably, even more intriguing form of the question after your friend got the final two-digit number: “Now, add both digits of the obtained number. You got…” And you again show the same piece of paper with written in advance number 9. It seems that such trick is even more intriguing than initial one!

Your sceptical friend may notice: “However, you considered only numbers less than hundred…” And he will be right! For instance if you take number 101 and perform with it all described above operations, you get:

101 – (1+1) =99 and 9+9 =18, not 9. Though, as you notice the obtained number is divided by 9 without reminder.

O.K., now let us explain why all it happens.

Take an arbitrary two-digital number consisting of X tens and Y units. The number can be written in the form X×10 + Y. Now extract from this number the sum of X and Y:

$$X\times10 + Y - (X+Y) = [X\times10 - X] + [Y - Y] = X\times(10 - 1) = X\times9.$$

The last number is always can be divided by 9 without reminder! And moreover, this statement is correct for any initial numbers. For instance, take some huge number, say, 9376. The sum of digits gives 9+3+7+6 = 25. Take the initial number and extract 25: 9376 – 25 = 9351. Now, take sum of digits of the obtained number: 9+3+5+1 = 18! Again we have a number that can be divided by 9 without reminder.

Thus, you can declare that for arbitrary numbers the sum of a new number (obtained after completing the described above operations) can be always divided by 9 without reminder.

2.2. Дюжина

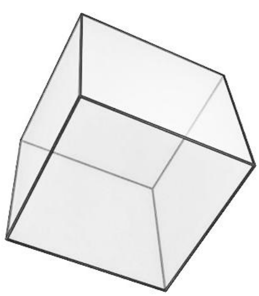
Итак, вы помните, что число 12 было очень важным в древней Шумерии. Видимо, его возникновению мы обязаны древнейшим наблюдениям людей за звездным небом: а год наблюдалось 12 полных лун. Правда, то, что месяц длится 30 дней, а не 24 и не 36, помешало абсолютному «культу числа 12» – вмешалась еще и пятерка...

Однако шумеры все же разделили день и ночь на 12 равных частей. Об этом нам денно и нощно напоминают часы своим циферблатом. А потом пошло-поехало!

Число 12 является, в определенном смысле, исключительным: мифология, религия, литература буквально кишат числом двенадцать...

Но мы начнем с более формальных вещей: посмотрим внимательно на Платоновы тела – правильные многогранники, для которых число 12 является весьма существенным.

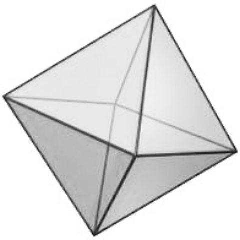
Куб не нуждается в особом представлении – он всем хорошо известен. За-



Куб, или гекосаэдр.

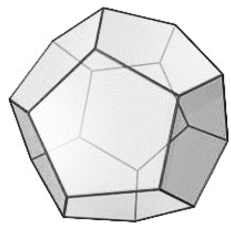
метим только, что среди Платоновых тел у него есть свое «аристократическое» имя – гексаэдр, что по-гречески означает «шестигранник» Остается только заметить, что у куба 12 ребер: четыре на верхней грани, четыре на нижней и четыре по бокам.

Следующая относительно простая фигура – октаэдр (две пирамиды, сложенные днищами). Это греческое слово означает восьмигранник. У этого Платонова тела 12 рёбер, 8 треугольных граней и 6 вершин (в каждой из них сходятся 4 ребра).



Восьмигранник, или октаэдр.

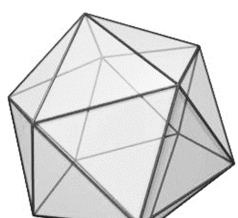
Додекаэдр – это правильный двенадцатигранник (что, кстати, и означает это греческое слово), каждая грань которого представляет собой правильный пятиугольник. Каждая вершина додекаэдра является вершиной трёх смежных правильных пятиугольников. Додекаэдр имеет 30 рёбер и 20 вершин.



Додекаэдер.

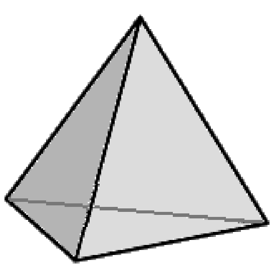
Икосаэдр (греческое слово, означающее 20-гранник) – это правильный выпуклый двадцатигранник, являющийся одним из Платоновых тел. Каждая грань икосаэдра представляет собой равносторонний треугольник. Число вершин у этой фигуры равно 12, а число ребер – 30.

Вот так уж получилось, что из пяти Платоновых тел лишь тетраэдр (четырехгранник, т.е. обычная трехгранная пирамида) не попал в список тел, у которых число 12 является характеристическим.



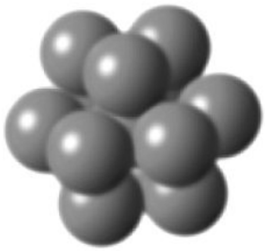
Икосаэдр.

Зато у него сумма всех граней, ребер и вершин равно чертовой дюжине – тринадцати! Но о чертовой дюжине чуть позже...



Тетраэдр.

Кроме того, есть еще одна чисто геометрическая (более поздняя задача) о размещении сфер в 3-мерном Евклидовом пространстве: можно поместить максимум 12 непересекающихся сфер единичного радиуса, касающихся данной сферы единичного радиуса.



Шары вокруг шара.

Так что вы видите, что число 12 в той или иной мере участвует во всех «Платоновых телах». Ну, как после этого древним грекам не заподозрить, что в этом числе запрятано нечто магическое?

Число 12 богато рассыпано также по эллинской мифологии и последующей мировой литературе.

12 олимпийских богов образовывали пантеон, Геракл совершил 12 подвигов.

12 – число верховных богов в Греции и Риме.

Один Гомер писал про 12 убитых фракийцев, 12 погибших троянцев; 12 жертвенных быков, 12 женихов Пенелопы, 12 коней Агамемнона; 12 жертвенных телят Гектора; 12 ног у Сциллы и этим примерам у Гомера несть числа!

Число 12 часто встречается в Библии, как в Ветхом, так и Новом Заветах.

12 – это число это число сыновей Иакова: Рувим, Симеон, Левий, Иуда, Иссахар, Завулон, Дан, Неффалим, Гад, Асир, Иосиф, Вениамин (шесть из них рождены Иаковом от его двоюродной сестры Лии, два – от другой двоюродной сестры - Рахили, остальные – от служанок Лии и Рахили; вот так раньше жили люди!).

12 – это число колен Израилевых (по числу сыновей Иакова – никто из них не оказался бесплодным!).

12 – это число Ветхозаветных пророков.

12- число ворот в Иерусалим.

Нужно заметить, что в иудаизме число двенадцать соотносилось с изобилием и цельностью. В целом, оно трактовалось как число Израиля.

Христианство унаследовало эту символику, применив ее, соответственно, к собственным реалиям:

12 – число апостолов у Христа.

12 – число драгоценных камней, перечисленных в «Апокалипсисе», которыми будут украшены 12 оснований стены города:

яспис, сапфир, халцедон, смарагд (изумруд), сардоникс, сердолик, хризолит, берилл, топаз, хризопраз, аметист, гиацинт.

В целом в христианстве двенадцать рассматривается как произведение божественного числа три на человеческое числа четыре.

В иудаизме и христианстве числа 12 считалось совершенным числом, символом божественной гармонии.

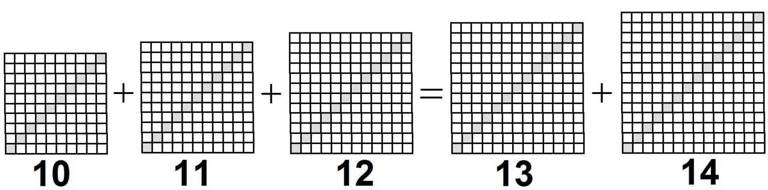
Дюжина многие века была основной единицей счета во многих странах. Сохранилась она и до сих пор в Великобритании и США: единица длины фут равна 12 дюймам (около 2.5 сантиметров), а единица веса фунт равна 12 унциям около 30 граммов). В Англии лишь в 1966 году в связи с переходом на десятичную монетарную систему перестали выпускать шиллинги, которые были равны 12 пенсам.

В России число 12 называется также дюжиной. Дюжина дюжин именовалась «гроссом», а дюжина гроссов – «массой». Впервые в русском языке слово «дюжина» упоминается во времен Петра Первого. Это слово заимствовано из французского (douzaine), либо из итальянского (dozzina), куда это слово, в свою очередь, пришло из латыни (duodecim), где означало просто 12.

Поклонники числа 12 заметили одно интересное свойство: только для одной пятерки подряд идущих чисел, а именно, 10, 11, 12, 13 и 14, выполняется любопытное равенство:

$$10^2+11^2+12^2=13^2+14^2.$$

Это равенство красиво иллюстрируется рисунком.



Завершим обсуждение числа 12 примерами написания этого числа в различных цифровых системах

Запись числа 12 в различных алфавитных системах.

١٢	**арабская**	ԺԲ	**армянская**

𒌋𒐖	**вавилонская**	ιβ΄	**греческая (ионическая)**
ΔΙΙ	**греческая (аттическая)**	יב	**еврейская**
∩||	**древнеегипетская**	१२	**индийская**
В҃І	**кириллица**	十二	**китайская и японская**
𝋬	**майя**	க௨	**тамильская**
XII	**римская и этрусская**	สิบ๒	**тайская**

Рассказав про число 12, нельзя обойти молчанием и число 13: где дюжина – там и чертова дюжина!

Число 12 завершает некий цикл... А число 13 начинает новый цикл и, таким образом, нарушает равновесие, достигнутое в предыдущем цикле (если оно, конечно было!). Число тринадцать, как «избывающее» полноту двенадцати, знаменует конец старого и начало нового цикла. По этой причине с ним ассоциируется нечто отрицательное.

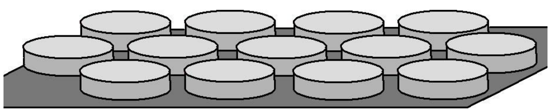
А с распространением единобожия число 13 и вовсе каким-то образом стало ассоциироваться не с концом некоего цикла, а вообще со смертью. Однако не будем чересчур суровы к современным религиям: число 13 на Ближнем Востоке и в Китае до сих пор считается числом смерти. В древнем Китае при использовании лунного календаря, по прошествии некоторого числа лет необходимо было добавлять тринадцатый «високосный» месяц, который считался несчастливым.

Это странное суеверие успешно продолжает существовать! Многие и сейчас не начинают важных дел 13-го числа. Да и вообще, в христианстве число 13 считается символом предательства (помните, Иуда был тринадцатым учеником Христа). В медицине известна даже специфическая психическая болезнь – трискаидекафобия (или тердекафобия). Эта болезнь заключается в непреодолимой боязни числа 13. Специфический страх может возникать перед пятницей 13-го, который даже имеет особое название параскаведекатриафобия, или фриггатрискаидекафобия. Как известно (из Библии, конечно) Иисус был распят в пятницу...

Австрийский композитор Арнольд Шёнберг[35] страдал трискаидекафобией. Поэтому свою последнюю оперу он назвал «Moses und Aron» вместо «Moses und Aaron» , поскольку в правильном написании название состояло из 13 букв. Сам композитор родился 13-го числа, считая это дурным предзнаменованием. Он боялся того дня, когда ему исполнится 76, потому что сумма этих цифр равна 13, а к тому же это была пятница 13-го июля 1951 года. Весь тот день он пробыл в постели, готовясь к предполагаемой смерти. Жена пыталась уговорить мужа встать и «не дурить», но он, не ответив ей, умер: было ровно без 13 минут полночь... (Легенда есть легенда, но красиво!)

Чтобы не нервировать трискаидекафобов, в некоторых гостиницах и официальных учреждениях на Западе этажи нумеруются так, что после 12-го этажа может сразу следовать 14-й этаж или же этаж «12А». Во многих странах эта цифра отсутствует на дверях кабинетов, номеров в гостиницах, кают кораблей, домов.

В Англии число 13 часто называют «дюжина булочника». Дело в том, что в средние века было суровое наказание за обман покупателей (вплоть до отсечения руки). Предусмотрительные булочники, боясь обвинений в мошенничестве, в то время обычно добавляли лишнюю булочку к каждой продаваемой дюжине, чтобы случайно не обсчитаться в свою пользу!



«Дюжина булочника».

Более того, оккультная традиция вообще связывает числи 13 не больше не меньше, как со смертью! И в зависимости от причин, вызывающих смерть, разложение числа на «составляющие» выражается различными способами:

1) 13=1+12 – добровольная жертвенная смерть;

---

[35] **Арнольд Франц Вальтер Шёнберг** (1874-1951), австрийский композитор, дирижёр, музыковед и художник-живописец, работавший в США. Один из наиболее влиятельных деятелей западной музыки XX века.

2) 13=12+1 – насильственная смерть;
3) 13=11+2 – осознанно выбранная смерть;
4) 13=2+11 – смерть как исчерпание задачи человека на земле;
5) 13=3+10 – смерть от старости;
6) 13=10+3 – естественная, но преждевременная смерть (например, при родах);
7) 13=4+9 – смерть, раскрывшая свои тайны при посвящении;
8) 13=9+4 – преждевременная смерть от плохих условий жизни;
9) 13=5+8 – смерть по приговору суда;
10) 13=8+5 – самоубийство;
11) 13=6+7 – смерть за идею;
12) 13=7+6 – смерть в неравном бою.

Что бы это значило, объяснить невозможно, если вы не являетесь профессиональным «черным магом»! Все бы хорошо, но что дает знание этих цифр тому, кто уже стоит на эшафоте или же стоит на табуретке с петлей на шее?

В то же время нельзя не отметить, что во многих странах (например, в США и во Франции) существуют "Клубы тринадцати", целью которых является своеобразная борьба с этим предрассудком. Тринадцать членов каждого такого клуба собираются 13-го числа каждого месяца в комнате №13 на традиционный дружеский обед. И надо же – пока неизвестно ни одного экстраординарного случая ни с одним из членов таких клубов! (Иначе падкая на любые нелепые сенсации современная пресса уже раззвенела бы об этом по всему белу свету!)

Но даже в христианстве число 13 не всегда такое уж зловещее: имя Иисуса Христа по-гречески пишется тринадцатью буквами. (Это, правда, слабоватый аргумент: можно ведь и на других языках попробовать, да не везде получается!)

Ну, а иудаизм, что на этот счет скажет? Народ иудейский состоит из двенадцати колен Израиля и тринадцатого колена хазар (которые, кстати, и составляют большинство евреев). В Библии перечисляются 13 важных качеств Бога. Каббала говорит о тринадцати небесных фонтанах, тринадцати воротах милосердия, и тринадцати реках бальзама, которые благочестивый найдёт в раю. А вот король Франции Людовик XIII не без оснований считал число 13 счастливым. Он даже женился на Анне Австрийской, когда было ей 13 лет.

Интересно, что цифра 13 многократно присутствует во многих государственных символах США. Возьмем герб США.

Над орлом сияет гексаэдр, составленный из 13 звезд, на его груди – герб с 13 чередующимися красными и белыми полосами, в левой когтистой ноге зажато 13 стрел, а в правой – оливковая ветвь с тринадцатью листьями и тринадцатью оливками... Да и девиз «Epluribus unum» («Из многих – одно»), написанный на развевающихся лентах содержит 13 букв!

Конечно, конечно – но при чем здесь масоны? Официально считается, что 13 означает число первоначально объединившихся штатов. Допустим, а приглядимся к столь всем знакомому доллару.

Видите – на оборотной стороне опять то же число: 13 слоев камней в пирамиде, тот же девиз – тоже из 13 букв...

Но обратите внимание на треугольник с расположенным внутри его глазом. Ведь это общепринятый символ масонства[36],

---

[36] **Масонство**, или **франкмасонство** – это возникшее в XVIII веке религиозно-этическое движение, организованное в виде тайного общества с мистическими обрядами. Название происходит от

который называется «лучезарная дельта»! А вам тут про 13 штатов мозги пудрят... ☺

Наверное, не последнюю роль сыграло здесь то, что один из американских «отцов-основателей», а именно первый Президент Соединенных Штатов Джордж Вашингтон был масоном.

Впрочем, в Америке отношение к числу 13 было всегда хорошим. Индейцы племен майя и ацтеков считали число 13 священным числом. В их мифологии небо делилось на 13 уровней, в каждом из которых жил свой бог, а в календаре исконных жителей Америки были тринадцатидневные «недели».

французского слова franc-maçon, буквальный перевод которого означает «вольный каменщик».

2.3. Шесть и шестьсот шестьдесят шесть...

Иоанну я не верю
Будто есть число у зверя.
Даже и у Богослова
Есть не более чем слово.
Лука Умищев

Шесть, шесть, шесть... 666... Оказывается, что и это совершенно особенное число! И особый смысл этого числа, который, правда, всяк толкует по-своему, кроется в том, что число это упоминается в последней главе Библии – в «Откровении Святого Иоанна Богослова»: «Здесь мудрость. Кто имеет ум, тот сочти число зверя, ибо это число человеческое; число его шестьсот шестьдесят шесть».

Не будем вдаваться в толкование глубокого тайного смысла этого текста. Какая такая здесь мудрость? Какой особый ум нужен, чтобы счесть число 666? Почему «число зверя» есть «человеческое число»?

Но заметим, что число это многие века будоражит человеческие умы – уж очень хочется увидеть что-то этакое...

Как мы уже видели, в древности многие народы в качестве цифр использовали буквы своего алфавита. Например, число 666 древние греки записывали, как

χξϛ

что читалось как «хи-кси-стигма», а в старославянской кириллицей это же число записывалось в виде

х҃ѯ҃ѕ҃

а читалось, как «хер-кси-зело».

Посему многие полагают, что число это может означать какое-либо имя или понятие, сумма числовых значений букв которого составляет 666. (А ведь стоило бы задуматься, как было записано «число зверя» в греческом первоисточнике. Это для нас три арабские шестерки несут в себе нечто мистическое, а в те времена оно выглядело иначе.)

Вспомните: в «Войне и мире» Льва Толстого[37] Пьер Безухов, сидя в оставленной русской армией Москве и ожидая французов, видимо, от нечего делать да чтобы скоротать времечко, исчисляет, что сумма номеров букв имени Наполеона Бонапарта[38] в аккурат составляет 666! (Все бы хорошо и увлекательно, да вот Святой Иоанн вряд ли имел какое представление о русском или даже французском алфавитах!)

Но неугомонные мистики и любители арифметики находили и другие имена, например, «Нерон[39] кесарь» и «Мартин Лютер[40]». Почти все толкования «числа зверя» были связаны с Дьяволом или Антихристом. Но тут – на тебе: имя «Царь Израилев» да еще на еврейском «ха-мелек – ле-ишраель»... Попадем туда же. Неувязочка получилась, пардон. А ведь и не пахнет Антихристом!

А один досужий американец-хохмач не поленился, перевел имя Билла Клинтона[41] на греческий и еврейский языки и, подсчитав порядковые номера букв, тоже нашел число 666! Господи, да какой же Билл «зверь»? Милейший парень!

Но все же, не дай Бог, и ваше имя окажется в том же списке!.. Как на вас будут смотреть соседи?..

Более интересны наблюдения, сделанные своеобразными современными пифагорейцами, очарованными магией чисел. Помните, что Пифагор считал число 6 совершенным: сумма его делителей равна самому числу (1+2+3=6). К сожалению, 666 не совершенное по Пифагору число[42], но все три раза шестерка – тоже не хухры-мухры!

Так вот современные последователи Пифагорейской школы обнаружили, что число 666 равно сумме первых 36 чисел. «Ариф-

---

[37] **Лев Николаевич Толстой** (1828-1910), великий русский писатель.

[38] **Наполеон Бонапарт** (1769-1821), французский император, вторгшийся в Россию и разгромленный в Отечественной войне 1812 года.

[39] **Тиберий Клавдий Нерон** (37-68), римский император.

[40] **Мартин Лютер** (1483-1546), основоположник и вождь Реформации в Германии, основатель немецкого протестантизма (лютеранства), переводчик Библии на немецкий язык.

[41] **Билл** (**Уильям Джефферсон**) **Клинтон** (р. 1946), 42-й Президент США (1993—2001).

метические мистики» – тут как тут: поясняют, что в 36 лет у человека укрощаются страсти и обретается разум. Вот она отгадка! (Но ведь это кому как повезет...)

Другие заметили, что число 666 равно сумме квадратов первых семи простых чисел:

$2^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 11^2 + 13^2 + 17^2 = 666.$

Аж дух захватывает! А ведь и само возведение в квадрат со времен основателя нумерологии Пифагора считалось магической операцией.

В заключение заметим, к полному разочарованию поклонников всяческой мистики: в некоторых манускриптах «число зверя» читается как 616...

2.4. Загадки простых чисел

Простые числа не так просты, как это кажется с первого взгляда!
Лука Умищев

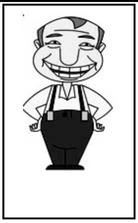
Простые числа интриговали математиков с давних времен. Что такое простое число? Это целое положительное число, делящееся только само на себя и на единицу (например, 2, 3, 5, 7, 11, 13 и так далее). Понятно, что все простые числа – нечетные (кроме 2), поскольку четные числа всегда кратны ещё и двум. Для любознательных список простых чисел, меньших пятисот, приведен ниже:

2	3	5	7	11	13
17	19	23	29	31	37
41	43	47	53	59	61
67	71	73	79	83	89
97	101	103	107	109	113
127	131	137	139	149	151
157	163	167	173	179	181
191	193	197	199	211	223
227	229	233	239	241	251
257	263	269	271	277	281
283	293	307	311	313	317

331	337	347	349	353	359
367	373	379	383	389	397
401	409	419	421	431	433
439	443	449	457	461	463
467	479	487	491	499	

Распределение простых чисел носит весьма неравномерный характер: их, что называется, то густо, то пусто, хотя, как вы увидите ниже, не так уж и пусто (да и достаточно равномерно!). Поэтому распределение простых чисел было даже названо «заколдованным». Пример распределения простых чисел приведен ниже.

Рассматриваемый интервал	**Число простых чисел**
От 0 до 99	25
От 100 до 199	21
От 200 до 299	16
От 300 до 399	16
От 400 до 499	17
....	....
От 1000 до 1099	16
....	....
От 2000 до 2099	14
....	....
От 3000 до 3099	12
....	....
От 4000 до 4099	15
....	....
От 5000 до 5099	12
....	....



Математик, физик и инженер доказывают одно и то же утверждение: все нечетные числа – простые.
Математик, подумав, говорит: «3 – простое, 5 – простое, 7 – простое, 9 – не простое... Это контрпример, значит, утверждение неверно».

Физик, с карандашом и бумагой: «3, 5 и 7– простые, 9 – ошибка эксперимента, 11 и 13 – простые и так далее. Похоже, что все нечетные числа – простые».
Инженер, глядя на потолок, говорит: «Значит, так... 3– простое, 5 – простое, 7 – простое, 9 – приблизительно простое, 11 – простое, 13 – тоже простое... Да все нечетные числа – простые!»

Среди простых чисел встречаются так называемые «числа-близнецы» или пары простых чисел, между которыми размещается всего одно четное число, например, 11 и 13, 41 и 43. «Близнецы» появляются довольно редко, но так же с непонятной периодичностью, причем, чем больше числа, тем реже среди них встречаются «близнецы». Например, в пределах первой сотни такие пары: (3, 5); (5, 7); (11, 13); (17, 19); (29, 31); (41, 43) и (59, 61). Числа (3, 5, 7) можно даже назвать «тройняшками», но подобных триплетов, видимо, больше не существует.

Можно встретить «близнецов»-соседей, например, пары (9767, 9769) и (9857, 9859), расположенных в окрестности 10 000 на расстоянии всего около сотни!

То же происходит и с обычными простыми числами. Так, в числах, близких к триллиону, лишь примерно одно из каждых 28 чисел является простым. Но если посмотреть подальше, то можно найти сколь угодно большие интервалы, в которых простых чисел вообще нет.

Ответа на вопрос, конечно или бесконечно множество "близнецов", пока не существует.

На сегодняшний день найдены такие пока самые большие близнецы:

$$(1\,706\,595 \cdot 211235 - 1) \text{ и } (1\,706\,595 \cdot 211235 + 1).$$

Сколько же всего простых чисел? Еще Евклид знал, что их бесконечно много. Элегантное доказательство, приведенное в его великих «*Началах*» (книга IX, утверждение 20), может быть кратко воспроизведено так:

«Представим, что множество простых чисел конечно. Перемножим их и прибавим единицу. Полученное число не делится ни на одно из конечного набора простых чисел, потому что остаток от деления на любое из них даёт единицу. Значит, число делится только на себя, а значит является простым». Правда же, гениально просто?

На сегодняшний день существует множество различных алгоритмов поиска простых чисел или их проверки на простоту. Тем не менее, до сих пор эта задача остаётся не тривиальной. Математики и программисты пытаются найти всё более надежные и быстрые методы.

Самый же первый и самый простой метод нахождения простых чисел предложил еще Эратосфен[43]. Этот метод, известный под названием «Решето Эратосфена», который автор реализовал следующим образом: на папирусе, натянутом на рамке, он написал все числа от 1 до 1000 и прокалывал последовательно все составные числа. Сначала прокалывались все четные числа, потом все числа кратные трем потом все числа кратные пяти и т.д. Папирус превратился в решето, которое «просеивает» составные числа, а простые оставляет.

Числа	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	...
Кратные 2	2	3	•	5	•	7	•	9	•	11	•	13	•	15	•	17	•	19	...
Кратные 3	2	3	•	5	•	7	•	•	•	11	•	13	•	•	•	17	•	19	...
Кратные 5	2	3	•	5	•	7	•	•	•	11	•	13	•	•	•	17	•	19	...

Процесс продолжается...

Пьер Ферма[44] сделал массу интригующих замечаний и догадок на полях книги Диофанта[45], известной теперь всему миру из-за того, что там же записана и Великая (или Последняя) теорема Ферма. Им там же сформулирована и одна теорема о простых числах. Ферма заметил, что все простые числа подразделяются на числа, представимые в виде $4n+1$, и числа, представимые в виде $4n-1$, где n – некоторое целое число. Так, число 13 принадлежит к первой группе ($13 = 4 \cdot 3 + 1$), а число 19 — ко второй группе ($19 = 4 \cdot 5 - 1$). Теорема Ферма о простых числах утверждает, что простые числа первой группы всегда представимы в виде суммы двух квадратов ($13 = 2^2 + 3^2$), в то время как простые числа второй группы никогда в

---

43 **Эратосфен из Кирены** (275-194 до н.э.), греческий поэт и необычайно разносторонний ученый, занимавшийся математикой, астрономией, географией филологией и хронологией. ***Подробнее см. в главе «Пантеон» книги 1.***

44 **Пьер Ферма** (1601-1665), французский математик, один из создателей аналитической геометрии и теории чисел, автор работ в области теории вероятностей, оптики, исчислении бесконечно малых величин.

45 **Диофант Александрийский** (III в.), древнегреческий математик. В своем трактате «Арифметика» дал решение задач, приводимых к так называемым диофантовым уравнениям (с решениями только в целых числах), впервые ввел буквенную символику в алгебру.

виде суммы двух квадратов не представимы (например, число 19). Это свойство простых чисел формулируется изящно и просто, но все попытки доказать, что им обладает любое простое число, наталкиваются на значительные трудности, а сам великий «математик-мистификатор» Ферма доказательства, как и в других случаях, не оставил. Только спустя почти 100 лет Леонарду Эйлеру удалось доказать эту теорему!

В 1859 году Георг Риман ввел понятие аналитической дзета-функции и высказал гипотезу (так называемая Гипотеза Римана), что число простых чисел, не превосходящих X, выражается через распределение нетривиальных нулей этой функции. Риман высказал гипотезу, не доказанную и не опровергнутую до сих пор. Большинство математиков верят, что гипотеза верна. На сегодняшний день проверены первые 1,500,000,000 решений...

Георг Фридрих Бернхард Риман
(1826-1866)

Немецкий математик, ученик Карла Гаусса, создавший Риманову геометрию, которая не является Евклидовой. Ввел интеграл Римана. Его идеи нашли применение и в физике: разработанная им теория квадратичных дифференциальных форм используется в теории относительности.

Последняя его работа «О числе простых чисел, не превышающих данной величины» содержала так называемую гипотезу Римана о распределении простых чисел.

Риман был избран членом Лондонского королевского общества и Французской Академии наук.

Гипотеза Римана входит в число семи главных нерешённых математических проблем. За её доказательство Институт математики Клея (Кембридж, США) готов выплатить приз в 1 миллион долларов. Так что, у кого не хватает денег на карманные расходы – вперед!

Среди простых чисел особую роль играют простые числа Мерсенна[46] – числа вида $M_p = 2^p - 1$, где p – простое число. Конечно, не все числа вида $2^p - 1$ являются простыми. Так, $M_2=2^2-1= 3$, $M_3=2^3-1=7$, $M_5=2^5-1=31$, $M_7=2^7-1=127$ – простые числа Мерсенна. Однако, число $M_{11}=2^{11}-1=2047=23\times89$, а посему простым не является.

До 1750 года было найдено всего 8 простых чисел Мерсенна: M_2, M_3, M_5, M_7, M_{13}, M_{17}, M_{19}, M_{31}. То, что M_{31} – простое число, доказал в 1750 году Леонард Эйлер. В 1876 году Эдуард Люка[47] установил, что простым является число

$$M_{127}=170141183460469231731687303715884105727.$$

Пожалуй, самый поразительный случай произошел в России: в 1883 году Иван Первушин[48], сельский священник, служивший в Пермской губернии в селе с неприглядным названием «Замараево», без всяких вычислительных приборов доказал, что число M_{61}=2305843009213693951 является простым. Позднее было установлено, что числа M_{89} и M_{107} - простые. Использование ЭВМ позволило в 1952-1964 годах доказать, что числа M_{521}, M_{607}, M_{1279}, M_{2203}, M_{2281}, M_{3217}, M_{4253}, M_{4423}, M_{2689}, M_{9941}, M_{11213} – простые... До 1964 года было найдено 23 числа Мерсенна.

В 2003 году Майкл Шайфер, студент-химик Мичиганского университета (США) построил уже 40-е число Мерсенна, которое равно $2^{20\ 996\ 001} - 1$ (это число содержит 6 320 430 цифр). Наибольшее же известное на данный момент простое число Мерсенна $M_{24036583} = 2^{24036583} - 1$ содержит 7 235 733 десятичных цифр. Это 41-е известное простое число в 2004 году нашел Джош Финдлей.

---

[46] **Марен Мерсенн** (1588-1648), французский монах-математик, один из основателей Парижской Академии наук, друг Декарта и Ферма.

[47] **Франсуа Эдуард Анатоль Люка** (1842-1891), французский математик

[48] **Иван Михеевич Первушин** (1827-1900), российский священник и математик, специалист в области теории чисел. За свои достижения в математике был избран членом-корреспондентом Петербургской, Неаполитанской и Парижской академий наук.

В феврале 2005 года врач-офтальмолог Мартин Новак из города Михельфельд (Германия), работавший также в рамках GIMPS, нашел $M_{42}=2^{25964951}-1$, которое записывается 7816230 десятичными знаками. Он потратил на расчеты 6 лет, используя ... 24 компьютера глазной клиники, в которой работал.

Наконец, последнее (на время написания книги) найденное простое число Мерсенна имеет номер 43... Найдено оно в конце декабря 2005 года командой Университета Миссури (США) под руководством профессоров Куртиса Купера и Стивена Буна. Это число $2^{30402457}-1$ содержит 9 152 052 десятичных цифр и является самым большим из известных простых чисел. Тем не менее, оно «не тянет» на награду в 100 тыс. долларов, обещанную Electronic Frontier Foundation за нахождение простого числа с более чем 10 миллионами цифр.

Конечно, получить все простые числа с помощью процедуры Мерсенна не удается. (Имеется в виду, конечно, все простые числа в интервале от 1 до наибольшего числа Мерсенна.) Числа Мерсенна выгодно отличаются от остальных наличием эффективного теста для проверки того, является ли число простым. Это так называемый тест Люка-Лемера[49], объяснение которого мы давать не будем, чтобы не пугать даже непугливого читателя. Благодаря этому тесту, простые числа Мерсенна давно удерживают рекорд как самые большие известные простые числа. Кстати, за нахождение простого числа из более чем 107 десятичных знаков назначена награда в 100 000 долларов... Меньше, чем за доказательство гипотезы Римана, но все же неплохие деньги! Спешите, спешите!

Спрашивается: ну, и что за хипеш вокруг этих безумных чисел Мерсенна? Какой «навар» мы с них имеем? Ответ простой: эти цифры играют первейшую роль на практике при построении генераторов псевдо-случайных чисел с большими периодами, а также в криптографии.

До сих пор существует много открытых вопросов относительно простых чисел.

Например,

---

[49] Этот тест изначально предложил в 1878 г. **Эдуард Люка**, а в 1930 г. его существенно усовершенствовал американский ученый **Деррик Норман Лемер** (1867-1938).

- Проблема Гольдбаха[50]: верно ли, что каждое чётное число больше двух, может быть представлено в виде суммы двух простых чисел?
- Верно ли, что существует бесконечно много «простых близнецов»?

Проблема Гольдбаха — это одна из самых старых, до сих пор не разрешённых, проблем математики. В 1742 г. Христиан Гольдбах послал письмо Леонарду Эйлеру, в котором он высказал следующее предположение: «Каждое нечётное число большее 5 можно представить в виде суммы трёх различающихся между собой простых чисел». Эйлер, заинтересовавшись проблемой, выдвинул более сильную гипотезу: «Каждое чётное число большее двух можно представить в виде суммы двух различающихся между собой простых чисел».

Первое утверждение называется слабой проблемой Гольдбаха, второе – сильной проблемой Гольдбаха (или проблемой Гольдбаха в формулировке Эйлера).

Из справедливости утверждения сильной проблемы Гольдбаха автоматически следует справедливость слабой проблемы Гольдбаха: если каждое чётное число больше 4 есть сумма двух простых чисел, то, добавляя 3 к каждому чётному числу, можно получить все нечётные числа больше 7.

Чтобы «пощупать» гипотезу Гольдбаха в формулировке Эйлера, рассмотрим несколько примеров:

$4=3+1$
$6=5+1$
$8=5+3=7+1$
$10=7+3$
$12=7+5=11+1$
$14=11+3=13+1$
$16=11+5=13+3$
$18=11+7=13+5=17+1$
$20=13+7= 17+3= 19+1$
$22=13+11=17+5=19+3$, и так далее.

Вот такое простенькое на вид утверждение не доказано и поныне, хотя проведено много интересных попыток. К 2004 году,

---

[50] **Христиан Гольдбах** (1690-1764), уроженец Пруссии, российский математик, профессор астрономии, один из первых академиков Петербургской Академии наук.

сильная гипотеза Гольдбаха проверена для всех чётных чисел, не превышающих 2 · 1017.

Нужно сказать, что для практических потребностей (например, в криптографии) нужно не только и не столько строить последовательность всех простых чисел, а важнее уметь определять, является ли данное число простым или нет.

Доказательство, казалось бы, отвлеченной и абстрактной математической задачи может в корне изменить концепции, лежащие в основе современных криптографических систем, которые играют существеннейшую роль в современном обществе – от охраны государственных секретов до обеспечения функционирования онлайновых финансовых и торговых систем.

2.5. А какие бывают дроби?

> Дробь применяется при снаряжении охотничьих патронов и для стрельбы на стенде. В зависимости от содержания в ней сурьмы и соединений мышьяка производится охотничья твердая, охотничья мягкая и спортивная твердая дробь...
>
> Здесь-то все просто... А вот как с математическими дробями?
>
> ***Лука Умищев.***

Целые числа – это, конечно, очень интересно... Однако не менее интригующими объектами являются дроби, с которыми мы сталкиваемся в нашей повседневной жизни: рациональные дроби, числители и знаменатели которых являются целыми числами; иррациональные числа, которые порождаются решениями алгебраических уравнений; и, наконец, трансцендентные числа, которые, будучи иррациональными, не являются корнями алгебраических выражений.

Есть несколько видов записи обыкновенных дробей в печатном виде:

- ½
- 1/2 или $^{1}/_{2}$(наклонная черта называется «солидус»[2])

- выключная формула: $\frac{1}{2}$(горизонтальная черта называется Винкулиум (*англ.*))

Рациональное число это такое число, которое может быть представлено в виде дроби m/n, где m и n – целые числа. Рациональное число может быть также представлено конечной десятичной или бесконечной периодической дробью. Такие дроби нами уже рассматривались, когда мы рассматривали число «7». А может быть и такая Частный пример такой десятичной дроби, например, 0.37666666... или в сокращенной форме 0.37(6) соответствует дроби 119/300.

Если к рациональным числам добавить все возможные бесконечные периодические и непериодические десятичные дроби, называемые иррациональными числами, мы получим вещественные числа. (Кстати, «*irrationalis*» на латыни означает «*неразумный*»...).

Можно подразделить числа и по иному признаку. Алгебраическими числами называются те вещественные числа, которые могут быть получены при решении алгебраических уравнений, они могут быть как рациональными (естественно, в том числе и целыми), так и иррациональными. Простейшими примерами алгебраических чисел являются корни различных целых степеней из целых чисел, например, $\sqrt{4} = 2$ или $\sqrt{2}$ =1.4142135623731…

Иррациональные алгебраические числа составляют лишь часть всех иррациональных чисел. Остальную часть иррациональных чисел составляют трансцендентные числа, к которым мы подойдем несколько позже...

В связи с рациональными и иррациональными числами возник очень интересный математический объект – так называемые цепные дроби. Цепной дробью называется выражение вида:

$$\frac{a}{b} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{\cdots \cfrac{\cdots}{q_n + \cfrac{1}{q_{n+1}}}}}}$$

Цепная дробь может быть как конечной (содержащей конечное число дробных линий и неполных частных), так и бесконечной. Значение конечной цепной дроби вычисляется «снизу вверх». Для пояснения рассмотрим цепную дробь

$$2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{8}}}.$$

Сначала вычисляем $4 + \frac{1}{8} = \frac{33}{8}$. Затем $5 + \frac{8}{33} = \frac{173}{33}$. И, наконец, $2 + \frac{33}{173}$.

Приведем правило записи рациональной дроби в виде конечной цепной дроби, пояснив его, для прозрачности, простым числовым примером. Это правило изобрел великий Евклид, и называется оно *алгоритм Евклида*.

Рассмотрим значение $50/13$. На первом шаге построения цепной дроби получаем

$$\frac{50}{13} = 3 + \frac{11}{13} = 3 + \frac{1}{\Delta_1}.$$

Из обозначения понятно, что $\Delta_1 = 13/11$. Поступаем с этим отношением точно так же, как и в предыдущем случае, продолжая, пока возможно:

$$\Delta_1 = \frac{13}{11} = 1 + \frac{2}{11} = 1 + \frac{1}{\Delta_2},$$

$$\Delta_2 = \frac{11}{2} = 5 + \frac{1}{2},$$

и, наконец,

$$\Delta_3 = \frac{2}{1} = 2.$$

Теперь, подставив все найденные Δ_k, получаем цепную дробь вида

$$\frac{50}{13} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2}}}.$$

Примером бесконечной цепной дроби может служить выражение для $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}}$$

Значением (или величиной) бесконечной цепной дроби называется предел бесконечной последовательности увеличивающихся по длине соответствующих дробей.

Может быть доказана теорема, что всякое действительное число может быть разложено в цепную дробь единственным образом, и всякая конечная или бесконечная цепная дробь имеет своим значением некоторое действительное число. Доказывается эта «простая» (по формулировке) теорема достаточно непросто, поэтому предлагается поверить автору на слово.

Несколько слов о трансцендентных числах. Прежде всего, *transcendentis* на латыни означает «выходящий за пределы». Иррациональное число, не являющееся алгебраическим, т.е. на являющееся корнем алгебраического уравнения с действительными коэффициентами, называется трансцендентным. Каждый из вас встречался с трансцендентными числами, возможно, и не подозревая этого – это знаменитые числа «пи» и «е». Еще одним фундаментальным иррациональным числом является «Золотая пропорция». Оно вошло в математику в античный период вместе с числом «пи». (Число «е» было введено в обращение лишь в XVI веке.)

О существовании трансцендентных чисел подозревали еще в XVIII веке, но первое трансцендентное число указал Жозеф Лиувилль[51] в 1844 г. Другое доказательство существования трансцендентных чисел дал Георг Кантор[52] в 1874 г., заметив, что множество всех алгебраических чисел счётно, то есть все алгебраические числа могут быть перенумерованы. Естественно, что «счетность» не предполагает конечности, просто имеется правило, указывающее возможность такого, пусть даже и бесконечно процесса «счета». Множество же всех действительных чисел несчётно, то есть является континуумом. Отсюда следует, что множество трансцендентных чисел несчётно, т.е. они составляют основную массу среди множества всех чисел.

В 1873 году Шарль Эрмит[53] доказал трансцендентность числа «е», играющего большую роль в математическом анализе, а в 1882 году Фердинанд фон Линдеман[54], развивая метод Эрмита, установил трансцендентность еще более знаменитого числа «пи». На какое-то время на этом успехи прекратились.

---

[51] **Жозеф Лиувилль** (1809-1882), французский математик очень широкого диапазона, член Парижской Академии и иностранный почетный член Петербургской Академии наук.

[52] **Георг Кантор** (1845-1918), немецкий математик, основоположник теории множеств.

[53] **Шарль Эрмит** (1822–1901), французский математик,член Парижской Академии наук и Лондонского королевского общества. Работы посвящены теории чисел, алгебре и теории эллиптических функций.

[54] **Фердинанд фон Линдеман** (1852-1939), немецкий математик.

2.6. Иррациональные числа в этом рациональном мире...

> Какой потребовался разум и рассудок, чтобы понять неразумные и безрассудные цифры!
>
> ***Лука Умищев.***

Термин рациональный происходит от латинского слова «*ratio*» – «*отношение*», которое римляне использовали для перевода греческого слова «*логос*» и в смысле «*логичный*», «*правильный*», и в смысле соизмерения двух величин, в частности, чисел m и n (сейчас мы это обозначаем дробью m/n). Соответственно, слово «*алогос*», в смысле отрицания, они переводили, как «*irrational*» и использовали, в основном, для обозначения понятий «*нелогичный*», «*неразумный*» и даже «*безрассудный*». Это название и получили иррациональные числа, не представимые формулой m/n.

Открыли такие числа в школе великого Пифагора, который пытался найти всеобщий закон гармонии мира и описать все его явления соотношением чисел и геометрическими чертежами.

Научная школа Пифагора (так называемые пифагорейцы) всю свою философию строила на гармонии чисел. Для Пифагора идея красоты математики состояла в том, что рациональные числа (целые числа и обыкновенные дроби) позволяют объяснить все явления в природе. Любой отказ от этой идеи у пифагорейцев рассматривался как отступничество.

И все же, как говорится, «против природы не попрешь»! Сами же пифагорейцы и обнаружили «несоизмеримые отрезки», что считается одним из главных их математических открытий. Исследуя отношение диагонали к стороне квадрата, пифагорейцы поняли, что это отношение не может быть выражено в виде отношения двух натуральных чисел, то есть является – в современных терминах – «иррациональным».

Как говорит предание, Пифагор не признал этого открытия (для него это было бы трагедией, поскольку рушился идеал красоты мироздания), и до конца своей жизни пытался найти числа m и n, чтобы соотношение m/n было равно длине диагонали квадрата с единичными сторонами.

Существует легенда, что один из учеников Пифагора по имени Гиппас, рассматривая квадрат с единичными сторонами, пытался найти эквивалентную обыкновенную дробь, эквивалентную диагонали этого квадрата, т.е. величине $\sqrt{2}$. После долгих и безуспешных попыток, он, в конце концов, понял, что такой дроби не существует. Открытие Гиппаса могло бы повлечь за собой «математическую смуту» среди учеников Пифагора. Суд пифагорейского братства приговорил Гиппаса к смерти через утопление. По одному варианту легенды Гиппаса утопили, а по другому – боги устроил так, что корабль с Гиппасом на борту затонул.

Но потребовалось еще около двух веков, чтобы, наконец, Евклид строго доказал, что число $\sqrt{2}$ является иррациональным. Доказательство Евклида настолько простое и элегантное, что мы изменим своему общему правилу и приведем его полностью.

Евклид, доказывая иррациональность числа $\sqrt{2}$, впервые ввел в математику доказательство от противного. Предполагаем, что верно противоположное утверждение, т.е. что число $\sqrt{2}$ представимо в виде некоторой неизвестной дроби. Запишем эту дробь в виде p/q, где p и q целые числа.

Возводя обе части равенства $\sqrt{2} = p/q$ в квадрат, получаем $2 = p^2/q^2$, или, переписав, $2q^2 = p^2$. Каково бы ни было число q^2, после удвоения оно четно, т.е. четно и p^2, а следовательно, и p. Но если p – четно, то оно может быть представлено в виде $2m$, где m – некоторое другое целое число. Подставляя $p = 2m$ в равенство для p^2, получаем 2q2 = $(2m)^2$ = 4m2. Сократив правую и левую части равенства на 2, получим: $q^2 = 2m^2$.

Евклид Александрийский,
или **Евклид из Мегара**
(365 - 300 до н. э.)

Великий древнегреческий математик, ученик великого философа Платона, один из основателей Александрийской научной школы, Музейона и Александрийской библиотеки. (Царь Сотер Птолемей – не путать с великим ученым Клавдием Птолемеем! – построил дворец в честь муз – богинь-покровительниц наук и искусств.)

В своем фундаментальном труде «Элементы» он подвел итог всем математическим знаниям своего времени. Эта книга служила учебником геометрии на протяжении почти двух тысячелетий. Многие из доказательств Евклида входят и в современные учебники.

Подробнее см. в главе «Пантеон».

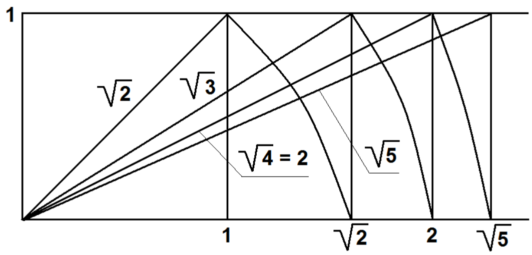
Из тех же соображений, что и выше, приходим к заключению, что число q^2 должно быть четным, т.е. четно и само число q. Возвращаясь к исходной записи числа $\sqrt{2}$, получаем: $\sqrt{2} = p/q =$ 2m/2n.

Дробь $2m/2n$ можно сократить, разделив числитель и знаменатель на 2: $\sqrt{2} = m/n$. Полученная дробь проще, чем p/q, и мы оказались на исходной позиции. Из описания доказательства понятно, что подобную процедуру можно проделывать бесконечное число раз. Но дробь при любых сколь угодно больших числителе и знаменателе невозможно упрощать бесконечно – всегда существует простейшая дробь!

Поскольку наша исходная гипотетическая дробь p/q, не подчиняется этому правилу, мы пришли к противоречию, т.е. число $\sqrt{2}$ не представимо в виде дроби, т.е. оно является иррациональным числом.

Именно $\sqrt{2}$ оказалось первым числом, иррациональность которого была в математике строго доказана. В конечном итоге, это открытие привело к разработке теории иррациональных чисел и созданию современной «непрерывной» математики. (Следует, наверное заметить, что Евклид сначала сделал попытку доказать иррациональность числа «пи», но потом переключился на $\sqrt{2}$.)

Величин вида $\sqrt{n}$ можно получить бесконечно много, например, чисто геометрическим построением.



Гипотенуза единичного прямоугольного треугольника (или диагональ единичного квадрата) дает нам $\sqrt{2}$. Отложив эту величину циркулем на горизонтальной оси, получаем прямоугольник со сторонами 1 и $\sqrt{2}$. Его гипотенуза по теореме Пифагора равна $\sqrt{1^2+\left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{3}$. Продолжая аналогичное построение, получаем $\sqrt{n}$ для любого натурального *n*. И все они, кроме целых квадратов, – иррациональные.

Евклид дает теорию величин – длин отрезков, среди которых есть и иррациональные, за самими числами он оставляет право быть только рациональными. Вот насколько силен был научный авторитет Пифагора!

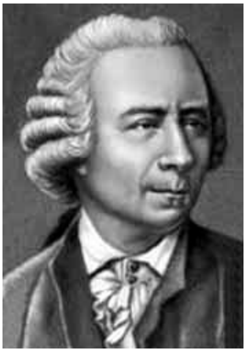
Греки и римляне, вслед за Евклидом, так и не признали права рациональных чисел называться числами. Арабы перевели обозначение величин вида $\sqrt{n}$ словом «*асамм*» - глухой (инвалид), но уже Омар Хайям[55] в своих трудах отмечает, что *иррациональные числа*

[55] **Гиясаддин Абу-ль Фатх Омар ибн Ибрахим Хайям Нишапури,** или **Омар Хайям** (1048 – 1122), персидский поэт, философ, математик, астроном, последователь Аристотеля и Ибн Сины. Создал теорию решения квадратных и кубических уравнений, в геометрическом исследовании первым высказал идею возможного пересечения параллельных прямых, возглавлял астрономическую обсерваторию, ввёл

имеют сходные свойства с *рациональными*. В работах Масуда Аль-Каши[56] и Симона Стевина[57] дается идея приближенного представления иррациональных чисел десятичными дробями. Наконец, много времени спустя Рене Декарт уравнял все числа в правах, разместив их на одной числовой оси. Исаак Ньютон писал:

> *«Под числом мы понимаем не множество единиц, а отношение любой величины к другой того же рода, принятой за единицу».*

Но только, когда великий Леонард Эйлер доказал, что иррациональные числа представимы в виде бесконечных непериодических десятичных дробей, спор вокруг них окончательно перешел в сферу математики.



Леонард Эйлер
(1707–1783)

Один из самых великих математиков новой истории. Родился и учился в Швейцарии, был членом Петербургской Академии наук, потом четверть века проработал в Германии и вновь вернулся в Россию.

Сделал огромный вклад в математический анализ, теорию чисел, комбинаторику, теорию вероятностей, механику, оптику, астрономию, физику, даже в музыку. ***Подробнее см. в главе «Пантеон».***

календарь, более точный, чем григорианский. В поэзии создал новую форму – широко известные ныне рубаи.

[56] **Гияс-ад-дин Джемшид ибн Масуд аль-Каши** (? - 1436), среднеазиатский математик и астроном. Работал на обсерватории Улугбека. В основном труде «*Ключ арифметики*» («*Мифах алхисаб*») ввел в употребление десятичные дроби, изложил приемы извлечения корней.

[57] **Симон Стевин** (1548-1620),голландский математик и инженер. Впервые в Европе ввел десятичные дроби (европейцы тогда еще не знали о работах аль-Каши). Ввел отрицательные корни уравнений, сформулировал условия существования корня в данном интервале и предложил способ его приближенного вычисления.

3. СОВЕРШЕННО ОСОБЕННЫЕ ЧИСЛА

А разве есть не особенные числа? Назовите мне первое из них: ведь оно особенное уже тем, что является первым не особенным числом!
Е. Скляревский[58].

3.1. Совершенные числа

Совершенные числа, как и совершенные люди, крайне редки.
Рене Декарт

Олимпийские игры... Чемпионаты мира... Конкурс красоты «Мисс Вселенная»... Кто же не любит быть совершенным (или, по крайней мере, носить такой титул)?

А вот можете представить, что среди чисел действительно есть совершенные! Натуральное число P называется совершенным, если оно равно сумме всех своих делителей (кроме, естественно, самого себя).

Древним грекам были известны только 4 первых совершенных числа. Числа P_2=6 (1+2+3=6) и P_3=28 (1+2+4+7+14=28) были известны ещё пифагорейцам.

Пифагор старался найти какое-то более глубокое значение совершенных чисел. Одно из его открытий состояло в том, что совершенство чисел тесно связано с «двоичностью». Мы изложим это для простоты понимания в современной записи, используя степени чисел. Числа 4=2·2, 8=2·2·2, 16=2·2·2·2 и т.д. могут быть представлены в виде 2n, где n означает число перемноженных двоек. Все степени числа 2 чуть-чуть «не дотягивают» до того, чтобы стать совершенными, так как сумма их делителей всегда на единичку меньше самого числа:

2^2 = 2·2 = 4, делители этого числа: 1, 2, а их сумма равна 3,
2^3 = 2·2·2 = 8, делители этого числа: 1, 2, 4, а их сумма равна 7,
2^4 = 2·2·2·2 = 16, делители этого числа: 1, 2, 4, 8, а их сумма равна 15,

---

[58] **Евгеий Семенович Скляревский** (род. 1956) – автор замечательного научно-просветительского сайта «Арбуз» http://arbuz.uz/

$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$, делители этого числа: 1, 2, 4, 8, 16, а их сумма равна 31...

Два столетия спустя, Евклид уточнил замеченную Пифагором взаимосвязь между двоичностью и совершенством. Евклид открыл, что совершенные числа всегда кратны двум числам, одно из которых равно степени числа 2, а другое на единицу меньше следующей степени числа 2:

$$6 = 2^1 \cdot (2^2 - 1),$$
$$28 = 2^2 \cdot (2^3 - 1),$$
$$496 = 2^4 \cdot (2^5 - 1),$$
$$8128 = 2^6 \cdot (2^7 - 1).$$

Затем уже Леонард Эйлер строго доказал, что если оба числа p и 2^p-1 простые числа, то число $P_p=2^{p-1}\times(2^p-1)$ является совершенным. Давайте продемонстрируем это на паре числовых примеров.

Пусть $p=3$, тогда $2^p-1=7$, т.е. оба числа – простые. В результате получаем $2^2\times 7=28$ – совершенное число. Теперь пусть $p=5$, тогда $2^5-1=31$, а $2^4\times 31=496$ – опять, как нам уже известно от Евклида, совершенное число.

С помощью современных компьютеров, поиски продолжались... Уже обнаружено чудовищно большой «числовой монстр» – совершенное число $2^{216090} \cdot (2^{216091} - 1)$, содержащее более 130 000 цифр, которое подчиняется правилу Евклида.

Пифагор также заметил, что совершенные числа не только равны сумме своих делителей, но и обладают некоторыми другими изящными свойствами: они всегда равны сумме нескольких последовательных натуральных чисел, например, $6=1+2+3$, $28=1+2+3+4+5+6+7$ и т.д.

В XII веке церковь даже учила, что для спасения души достаточно изучать совершенные числа и тому, кто найдёт пятое божественное совершенное число, уготовано вечное блаженство... Поэтому становится понятным исключительный интерес к этим числам. Пятое совершенное число, P_{13}, было найдено в XV веке, но имя спасшего свою душу осталось истории и даже церкви неизвестным...

Интересовались совершенными числами и ранние христианские проповедники. В частности, Св. Августин (354-430) в своем сочинении «Град Божий», говоря о сотворении мира, писал: «Этот труд был завершен за шесть дней, потому что шесть есть число совершенное, а не потому что Богу требовалось столько времени – Он мог бы сотворить мир за одно мгновение. Но работа Его была ознаменована числом шесть» (Том XI, Глава 30 «О совершенстве числа шесть»).

Не будем спорить с одним из отцов христианской церкви: ему виднее (да и до Бога поближе, чем нам, смертным).

С математической точки зрения, чётные совершенные числа по-своему уникальны:

- сумма величин, обратных всем делителям числа, включая само число, всегда равна двум,
- остаток от деления совершенного числа (кроме 6, конечно!) на 9 равен 1,
- в двоичной системе совершенное число P_p начинается p единицами, потом следуют p-1 нулей. Например: P_2=110, P_3=11100, P_5 =111110000, P_7 =1111111000000, и т.д.,
- последняя цифра чётного совершенного числа или 6, или 8, причём, если 8, то ей предшествует 2.

Совершенные числа ещё не полностью исследованы: неизвестно конечно или бесконечно число совершенных чисел, до сих пор не найдено ни одно нечетное совершенное число. Высказано, правда, предположение, что если такое число существует, то оно должно иметь не менее 36 знаков.

Ну, что ж: поживем – увидим...

Совершенные числа породили и так называемые «дружественные числа». Дружественными числами называются два числа, каждое из которых равно сумме делителей другого числа. Пифагорейцы совершили необычайное открытие, установив, что 220 и 284 – дружественные числа. Делителями числа 220 служат числа 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110, а их сумма равна 284. С другой стороны, делителями числа 284 служат числа 1, 2, 4, 71, 142, сумма которых равна 220.

Помимо 220 и 284 других дружественных чисел не было известно вплоть до 1636 года, когда Пьер Ферма обнаружил пару 17 296 и 18 416. И хотя это открытие не более чем курьез, оно свидетельствует о том, что Ферма хорошо знал натуральные числа и любил «поиграться» с ними. Рене Декарт открыл третью пару (9 363 584 и 9 437 056), а неутомимый Леонард Эйлер продолжил список дружественных чисел, добавив еще 59 пар! Интересно отметить, что и Декарт, и Эйлер пропустили гораздо меньшую пару дружественных чисел. В 1866 году 16-летний Николо Паганини (нет, не родственник, а всего лишь «двойной тезка» великого скрипача[59]) открыл пару 1184 и 1210.

Если вы устали от совершенных и дружественных чисел, я развлеку вас немного «смешными» числами...

- Если число 111 111 111 помножить на себя самого, то получится смешное число 12345678987654321 (цифры сначала возрастают, а потом убывают).
- Если число 21978 умножить на 4, то оно «обидится» и «отвернется»: 21978 × 4 = 87912.

I96I год… Чем же он был замечателен? - Встань на голову. Прочитай: «опять двадцать пять» - тот же I96I! Следующим таким годом будет 6009! Боюсь, не доживем...

Но и на этом не успокоились пытливые умы: математическая кунсткамера продолжала пополняться новыми экспонатами... В XX веке математики обобщили понятие дружественных чисел и занялись поиском так называемых «общительных» чисел – замкнутых циклов из трех и более чисел. Например, в тройке чисел

(1 945 330 728 960; 2 324 196 638 720; 2 615 631 953 920)

делители первого числа в сумме дают второе число, делители второго в сумме дают третье число, а делители третьего числа в сумме

59 **Николо Паганини** (1782 – 1840), итальянский скрипач и композитор, один из величайших виртуозов в истории мирового музыкального искусства.

дают первое число. Самый длинный из известных циклов состоит из 28 «общительных» чисел, первое из которых равно 14 316...

Все это интересно, но все же невольно возникает вопрос: НУ И ЧТО?

3.2. Число Эйлера

Что же это было: шутка гения
Или простое совпадение.
Конечно, я не буквоед,
Но в «Euler» первой буквой – «E»!
Лука Умищев.

Число Эйлера – «*e*» равно 2,718281828459045235360287 5…

Что же это за магическое число? Чем оно интересно? Почему множество математиков пыталось найти формулу для его вычисления?

Впервые константа, которую мы сейчас называем «число *e*» была упомянута в 1618 году в работе уже знакомого нам Джона Непера, хотя и не в явном виде: в работе содержится только таблица натуральных логарифмов, сама же константа не определена. Тем не менее, число *e* иногда называют *константой Непера.*

Вывел эту константу в явном виде работавший в Петербургской Академии Наук швейцарский математик Якоб Бернулли при попытке вычислить значение так называемого «второго замечательного предела»[60]:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}.$$

Первое известное использование этой константы, где она обозначалась буквой *b*, встречается в письмах Готфрида Лейбница Христиану Гюйгенсу в их переписке в конце XVII века. Букву *e* для обозначения этой важной математической константы ввел в «математический обиход» Леонард Эйлер в 1727 году. Именно поэтому число *e* чаще всего называют *числом Эйлера.*

[60] Первым замечательным пределом называют $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$

Число e обладает рядом замечательных свойств. Так, формулы математического анализа, содержащие экспоненциальные функции или логарифмы, записываются проще, если логарифмы брать по основанию e, а не какому-либо другому основанию.

Леонард Эйлер указал на трансцендентность числа e, а также дал два представления его в виде цепных дробей:

$$e = 1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{18 + \ldots}}}}}$$

и

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \ldots}}}}}}}}$$

Чем удобна экспоненциальная функция $y = e^x$? Это функция, которая является единственно возможным решением дифференциального[61] уравнения $\frac{dy(x)}{dx} = y(x)$. Функция e^x обладает интересным свойством – интеграл от функции равен самой функции и производная от функции равна самой функции! Иными словами,

$$\int e^x dx = e^x \text{ и } \frac{d}{dx} e^x = e^x.$$

[61] Приносим здесь извинения перед читателями, которые не знакомы с началами высшей математики.

По сумасшедшему дому бегает Федор Раскольников и, подбегая к каждому, кричит: «Я сейчас тебя на смерть заинтегрирую!». Все в испуге падают, притворяясь убитыми. Один из больных оказался математиком и ответил ему: «Не сможешь – я «е» в степени икс!». - «А я тогда тебя насмерть задифференцирую!» - «Не сможешь! Я же сказал, что я «е» в степени икс!». - « Ну, что же... Тогда придется, как старушку – топориком...»

Для вычисления значения числа *e*, кроме формулы Якоба Бернулли, обычно используется также формула:

$$e = \sum_{0 \le n \le \infty} \frac{1}{n!}.$$

В последней формуле $n!$ – это так называемый факториал числа *n*. Факториал определяется как

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = \prod_{k=1}^{n} k,$$

при этом полагают, что 0!=1.

Студент пишет на доске формулу разложения для «*e*»:

$$e = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$$

Профессор просит его: «Прочитайте, пожалуйста, формулу вслух».

- Один плюс один разделить на ДВА!!! плюс один разделить на ТРИ!!! плюс один разделить на ЧЕТЫРЕ!!!..
- А что вы так кричите?
- Так вон ведь – восклицательные знаки стоят...

Конечно, легко написать и формулу Бернулли, и сумму обратных значений факториалов, но как считать? Там же присутствуют бесконечности... Кстати, предел по формуле Бернулли сходится не так, чтобы уж очень быстро (посмотрите на табличку, приведенную ниже).

n	$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$
10	2.593742460
20	2.653297705
30	2.674318776
40	2.685063838
50	2.691588029
100	2.704813829
200	2.711517123
300	2.713765158
400	2.714891744
500	2.715568521
1000	2.716923932
10000	2.718145927

А вот считая по второй формуле, до 2.718… можно добраться уже на шестом шагу по сравнению с 10-тысячным в первом случае.

0	1
1	2
2	2.5
3	2.666666667
4	2.708333333
5	2.716666667
6	2.718055556
7	2.718253968
8	2.71827877
9	2.718281526
10	2.718281801
11	2.718281826
12	2.718281828
13	2.718281828
14	2.718281828
15	2.718281828

Заметим, что трансцендентность числа *e* строго доказал Шарль Эрмит[62] в 1873 году.

Поскольку число *e* часто используется в математике, то неплохо бы запомнить его как можно точнее… Надо сказать, что существует немало мнемонических способов, помогающих запомнить это число. Приведем два из них:

Русский вариант до 15-го знака после запятой (*e* = 2,718281828459045...): Двум запятым семь вёрст не крюк (2,7) + два Льва Толстых (год рождения Толстого - 1828) + прямоугольный равнобедренный (углы равнобедренного прямоугольного треугольника - 45, 90, 45).

Моя школьная учительница предлагала нам на уроке запомнить значение числа *e* при помощи такого мнемонического правила.

Но поди вспомни, когда родился Лев Толстой! А вот когда убили Пушкина – я помнил. Да и с треугольниками вечно была путаница: про равнобедренный треугольник я забывал и называл другой, которым мы пользовались в классе, – прямоугольный, но с углами 30, 60 и 90...

Да и зачем школьнику знать число *e* с точностью до 15-го знака после запятой?

Вечно эти учителя забивают головы ученикам всякой ерундой! А на что справочники?

[62] **Шарль Эрмит** (1822-1901) – французский математик, автор трудов по математическому анализу, теории чисел, алгебре. Был почетным членом Петербургской Академии наук.

3.3. Число π

Спроси у недруга иль друга,
Что в мире есть важнее круга?
Ты обойди хоть целый свет –
Важнее круга в мире нет!
Не напастись бы миру слёз.
Когда бы не было колес.
А квадратные очки
Носили б только дурачки...

Лука Умищев

Символ π («пи») используется для обозначения отношение длины окружности к ее диаметру.

$$\pi=3{,}14159265358979\ldots$$

Хотите узнать значение числа «пи» поточнее? Это можно: посмотрите таблицу в конце этой главы: там приводится «Книга рекордов Гиннеса». Даются значения числа «пи» с умопомрачительной точностью! Признаюсь: берет сомнение, что кому-либо из нас пригодятся столь точные значения...

Само обозначение числа «пи» – π, было введено английским математиком Уильямом Джонсом[63] в 1707 году, который выбрал для этого числа первую букву греческого слова περιφερια, означающего «окружность». Общепринятым это обозначение стало только после работ все того же Леонарда Эйлера, который начал систематически употреблять его в своих работах.

Само же число «пи» известно с незапамятных времен. Самая ранняя ссылка на число «пи» него найдена в египетском папирусе, датируемом примерно 2000-м годом до н.э. В Древнем Египте площадь круга диаметром *d* определяли как $\left(d-\frac{d}{9}\right)^2$, т.е. $d^2\left(\frac{8}{9}\right)^2$. Поскольку мы знаем, что площадь круга равна $\pi\frac{d^2}{4}$, то отсюда нетрудно найти, что по представлению древних египтян $\pi=4\cdot\frac{64}{81}=\frac{256}{81}\approx 3.1605...$

Но давайте отвлечемся от «чистой математики» на минуточку. Число «пи» в Древнем Египте встречалось не только на папирусах.

[63] **Уильям Джонс** (1675 - 749) — британский математик.

Великая Пирамида Хеопса, последнее оставшееся на Земле чудо из древнего списка Семи Чудес Света, является не только удивительнейшим шедевром инженерного искусства, но служит также и хранителем удивительной загадки: отношение длины основания пирамиды к ее высоте, разделенное пополам, дает число «пи» с точностью до шестого знака! И это – не простое совпадение: в древнеегипетском папирусе Ринда также упоминается число «пи»! Число «пи», «зашифрованное» в размерах пирамиды Хеопса, точнее чем то, которое вычислил великий Архимед, живший позже на 2000 лет!

Трудно удержаться от комментария... Не подумайте, что я не уважаю ученость древних египтян, а паче того тех, кто их ученость обнаруживает. Упаси Господь! Но относительно таинственного появления числа «пи» в пирамидах... Поставьте себя на место любого древнего египтянина или древнегреческого римлянина: будете ли вы ломать голову над измерением длины стороны пирамиды, чтобы она была в «пи» раз длиннее ее высоты? Да нет! Вы возьмете колесо, поставите колесо на колесо, скажем 100 раз и получите высоту пирамиды, измеренную в диаметрах колеса. Потом то же колесо прокатите по земле 2100 раз – вот вам и сторона пирамиды

Вот и появилось мистическое число «пи»!

Древние вавилоняне давали простое, но в то же время и менее точное значение числа «пи»: $\pi = 3\frac{1}{8} = 3.125$.

В Древней Индии, за несколько веков до н.э., число «пи» полагали равным $\sqrt{10} = 3.1622...$ (Заметим, что это соответствует отношению диагонали к малой стороне прямоугольника со сторонами 1 и 3.)

Китайцы пользовались в древности приближением $\frac{22}{7} \approx 3.1429$. Затем уже в пятом веке н.э. китайский математик Цзу

Чунчжи[64] нашел выражение для величины числа «пи» в виде конечной цепной дроби:

$$3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1}}}$$

что дает 3 + 1/(7 + 1/16) = 3 + 1/(113/16) = 3 + 16/113 или 355/113.

Это приближение дает 7 верных значащих цифр. Прошло более десяти веков, пока это же приближение не было вновь «открыто» в Европе!

Древние греки[65] пытались построить отрезок, равный длине окружности, используя простые измерения с помощью циркуля. Естественно их попытки выразить число «пи» в виде рационального числа были обречены на неудачу. Зато в историю математики вошла задача о «квадратуре круга» – одна из трех классических задач Античности[66]. Неразрешимая задача – построение квадрата, площадь которого равна площади заданного круга, повлекла за собой шлейф драматических исторических и курьезных занимательных фактов, среди которых мы находим и начало геометрического вычисления числа «пи».

Великий Архимед предложил схему вычисления числа «пи», которая в принципе позволяла вычислять его с любой наперед заданной точностью. Более того, Архимед «между делом» предложил впервые в истории математики итерационный алгоритм!

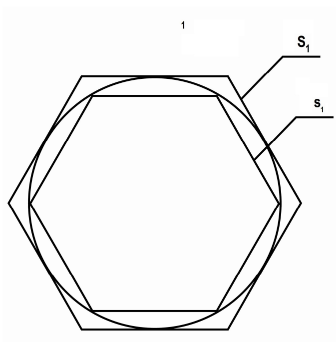
Суть идеи Архимеда заключалась в следующем: он брал круг и строил два шестиугольника (гексагона) – вписанный и описанный и измерил их периметры: s_1 и S_1, измеряемые в длинах радиусов. Если обозначить длину окружности через X, то понятно, что $s_1 < X < S_1$.

---

[64] **Цзу Чунчжи** (430-501), китайский математик.

[65] Первым сделал серьезный вклад **Евдокс Книдский** (408-355 до н.э.) – древнегреческий математик, астроном и философ

[66] Три задачи Античности: удвоение куба, трисекция угла и квадратура круга.



Затем он удвоил число сторон, и вновь измерил периметры полученных вписанных и описанных 12-угольников: *s2* и *S2*. Из приведенного чертежа видно, что *s2* > *s1* и, в то же время, *S2* < *S1* (Кстати, древние греки часто использовали именно такой прием доказательства: «Смотри чертеж!»).

Условие $s_2 < X < S_2$ сохранилось, в то же время верхняя граница стала меньше, а нижняя – больше, т.е. они сблизились.

Понятно, что с увеличением числа сторон, периметр внутреннего многоугольника будет приближаться к длине окружности, но никогда ее не превысит, а периметр внешнего многоугольника будет стремиться к длине окружности, никогда не становясь меньше ее.

В III в до н.э. Архимед в своей работе «*Измерение круга*» в качестве одного из постулатов дал следующий: «Отношение длины окружности к ее диаметру меньше, чем $3\frac{1}{7}$, и больше, чем $3\frac{10}{71}$», или, используя современные обозначения:

$$3.140845... < \pi < 3.142875...$$

Архимед обосновал свое предложение последовательным вычислением периметров правильных вписанных и описанных многоугольников с 6, 12, 24, 48 и 96 сторонами.

Как все просто, не правда ли? Нет, это не только просто – это гениально!

Изобретя этот метод, Архимед фактически создал понятие приближенного вычисления, и определил алгоритм приближенного вычисления числа «пи». Впоследствии, практически все ученые древнего мира использовали аналогичный алгоритм в своих уточнениях числа «пи».

Сам Архимед определил приближенное значение числа «пи», равное 3.1419...

В средневековой математике происходили почти «спортивные соревнования» по вычислению числа «пи» с наибольшим числом правильных знаков после запятой.

Однако, даже такой математик как Леонардо Фибоначчи[67], в 1220 определил число «пи» лишь с точностью до трех десятичных знаков.

Леонардо да Винчи также не оставил число «пи» без внимания, отметив в одном из своих сочинений: «Колесо повозки оборачивается на протяжении 10 локтей, откуда следует, что диаметр равен $3\frac{2}{11}$ локтя. И доказывается тем, что если этот диаметр будет умножен на $3\frac{1}{7}$, увидишь, что это произведение составит 10 в точности».

Из этой цитаты следует, что Леонардо полагал, что число «пи» равно $3\frac{1}{7}$.

Интересно, что вычислением числа «пи» занимался ученый и поэт Омар Хайям[68]. А в первой половине XV века в обсерватории Улугбека[69], возле Самарканда, астроном и математик Масуд аль-Каши (о котором мы уже упоминали ранее) вычислил число «пи» с 16 десятичными знаками, после 27 удвоений числа сторон треугольни-

---

[67] **Фибоначчи**, или **Леонардо из Пизы** (1170 - 1250), один из самых значительных математиков средневековья. ***Подробнее см. в главе «Пантеон» книги 3.***

[68] **Абу-ль-Фатху Омар Хайям**, или **Омар Хайям из Нишапура** (1048-1131), астроном и математику, поэт и ученый. Кроме вычисления с большой точностью числа «пи», нашел несколько способов приближенного вычисления корней кубических уравнений, составил подробные таблицы синусов.

[69] **Мирза Мухаммед ибн Шахрух ибн Тимур** (**Тарагай**) **Улугбек Гуран,** или **Улугбек** (1394 –1449), великий узбекский астроном («по совместительству», правитель Самарканда), построивший в 1425 году крупнейшую в мире обсерваторию , знаменитую огромным (40,6м) мраморным секстантом. Известен многими научными результатами. Кстати, Улугбек был внуком легендарного полководца средневековья – Тимура (Тамерлана).

ка, т.е. построив многоугольник с почти десятью тысячами сторон. Рекорд аль-Каши продержался два с половиной столетия!

В Европе Франсуа Виет[70] нашел число «пи» всего с 9 правильными десятичными знаками, сделав 16 удвоений числа сторон многоугольников, т.е. менее точно и на полтора столетия позже Масуда аль-Каши. Однако Виет сделал важное открытие: он первым заметил, что число «пи» можно отыскать, используя пределы некоторых рядов. Это открытие имело огромное значение, так как позволило вычислять число «пи» с любой точностью методами, более удобными, чем тот, который предложил Архимед.

А потом, как говорится, пошло-поехало! В 1949 году Джон фон Нейман[71] получил 2037 десятичных знаков, а уж с появлением современных ЭВМ все превратилось уже скорее в погоню за чистыми рекордами – к настоящему времени число «пи» вычислено с точностью до биллиона десятичных знаков. Программисты идут все дальше и дальше: компьютер железный – он все вынесет!

Заметим, что лишь в конце XVIII века было установлено, что число «пи» является иррациональным, т.е. не может быть выражено в виде натуральной дроби, а затем в конце XIX века было доказано, что оно трансцендентное, т.е. не может удовлетворять никакому алгебраическому уравнению с целыми коэффициентами.

Но интересно не то, с какой точностью произведены вычисления числа «пи», а то, какие методы были при этом использованы. Ниже приводится несколько таких методов. Они совершенно разные, но дают один и тот же результат!

Так, Франсуа Виет доказал, что

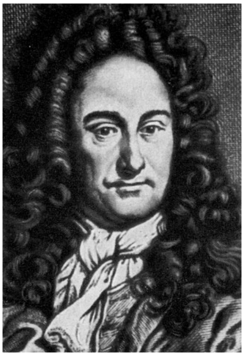
$$\frac{\pi}{4}=\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}}\cdot\ldots\right)^{-1}.$$

70 **Франсуа Виет** (1540-1603), французский математик, который разработал практически всю элементарную алгебру. Формулы Виета дают зависимость между корнями и коэффициентами алгебраического уравнения: сумма корней приведенного квадратного уравнения равна коэффициенту при *x*, взятому с обратным знаком, а произведение – свободному члену.

71 **Джон (Янош) фон Нейман** (1903-1957), венгерский ученый, в 1930 году эмигрировавший в США. Внес большой вклад в создание первых ЭВМ и разработку методов их применения.

Один из величайших математиков всех времен – Готфрид Лейбниц впервые вычислил число «пи» с помощью ряда:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \ldots$$



Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646-1716)

Немецкий философ и математик, славянского происхождения. В 15-летнем возрасте поступил в Лейпцигский университет, а уже в 1666 защитил диссертацию. Являлся действительным членом английского Королевского общества и первым президентом Берлинской Академии. Лейбниц был, наряду с Ньютоном и независимо от него, создателем дифференциального и интегрального исчисления. Лейбниц также ввёл бинарную систему счисления с цифрами 0 и 1, на котором базируется современная вычислительная техника.

Позже Эйлер вычислял «пи» с помощью другого ряда:

$$\frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{5\cdot 2^5} - \frac{1}{7\cdot 2^7} + \ldots\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} - \frac{1}{7\cdot 3^7} + \ldots\right)$$

Интересное бесконечное произведение, с помощью которого можно вычислить число «пи», нашел Джон Валлис[72]:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot \ldots}{1\cdot 1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots}$$

72 **Джон Валлис** (1616-1703), английский математик, был одним из основателей и первых членов Лондонского королевского общества. Кстати, именно он ввел символ «∞» для обозначения бесконечности.

Интересное выражение нашел Рамануджан[73]:

$$1+\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}+\cdots+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{4}{1+\cfrac{5}{1+\cdots}}}}}}=\sqrt{\frac{e\cdot\pi}{2}}$$

Кстати, он же нашел любопытное выражение для обыкновенного числа «три»:

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\ldots}}}}=3$$

Опять же возникает обычный вопрос: «Ну и что?» И как всегда, ответ: «А ничего... Просто красиво!»

Но вернемся к числу «пи». В заключение хочется привести не очень известную выдержку из Библии, где приводится своеобразная спецификация храма Царя Соломона: «И сделал литое из меди море, – от края его до края его десять локтей, – совсем круглое, вышиною в пять локтей, и шнурок в тридцать локтей обнимал его кругом» (3-я Книга Царств, Гл. 7, стих 23). Отсюда следует, что «библейское число пи» равно трем!

Математики не обошли число «пи» вниманием, сочиняя анекдоты на около-математические темы.
Ну, а почему бы и, правда, не посмеяться? Ведь смеяться, право, не грешно над тем, что кажется смешно!

[73] **Сриниваса Айенгор Рамануджан** (1887-1920), индийский математик, который, не имея специального математического образования, получил замечательные результаты в области теории чисел.

Смешилки про число «пи» из копилки профессора Луки Умищева

π π π π π

Собрались математик, физик и инженер. Вопрос: «Что такое число "пи"?»
Математик:
- «Пи» - это число, равное отношению длины окружности к ее диаметру.
Физик:
- «Пи» - это 3.142± 0.0005.
Инженер:
- «Пи» - это, кажется, что-то около 3.
Как видите, инженер принял поистине «Соломоново решение»!

π π π π π

Агентство Рейтер (Reuters), 2 июля 2005, 09:53 утра: «*Как сообщают японские СМИ, 59-летний Акира Харагучи установил новый мировой рекорд, назвав число «пи» с 83431 знаками после запятой. Харагучи начал произносить по памяти число «пи» 1 июля около 9:00 утра, сбился в районе полудня, вновь начал вспоминать и закончил лишь рано утром 2 июля. Ранее рекорд принадлежал также японцу, который назвал «пи» с 42195 знаками после запятой*».

Но это еще не все: в сентябре 2006 года он же довел рекорд до 100 тысяч знаков после запятой! Произносил эту цифру он в течение 16 часов... Воистину, нет предела человеческой... Да-да – конечно же, способности!

Рекорды для «Книги π-Гиннеса»

В Книгу Гиннеса, как известно, заносятся различные (иногда совершенно нелепые) «рекорды мира», например:

- По достоверным данным, самой старой собаке 29 лет 5 месяцев.
- Самой маленькой лошадью был жеребец Литтл Пампкин: его рост составлял 35.5 см, а вес – 9 кг.
- Рой Луикинг прошел 100 метров на ходулях за 13.01 сек.
- Вивьен Уиллер – обладательница самой длинной бороды среди женщин – 27.9 см.
- Самую длинную бороду имел Ганс Лангсет – 5 метров 33 сантиметра.
- Самой худой женщиной была лилипутка Лючия Сарате: при росте 67 сантиметров она весила всего лишь 2.13 кг.

И так далее, и тому подобное...

Ниже в таблице приводятся данные: «Кто? Где? Когда?» измерял число «пи» и с какой точностью. Как видно, до XVI века ученые искали то, что нужно, а позднее, особенно с середины прошлого века просто «удовлетворяли свое любопытство за счет налогоплательщика». Тем не менее, история эта даже в виде «сухой» таблицы весьма увлекательна (а возможно, и поучительна).

История вычисления числа «пи».

Когда	Кто и где	Значение или число знаков	Инструмент
XX до н.э.	Египет	3,1605	Голова
XX до н.э.	Вавилон	3,125	Голова
X до н.э.	Индия	3,1622	Голова
X до н.э.	Китай	3,1429	Голова
III до н.э.	Архимед, Греция	3,1419	Голова
I н.э.	Птолемей, Греция	3,1417	Голова
III	Чанг-Хуинг, Китай	3,1416	Голова
V	Чжу-Чонгжи, Китай	3,1415927	Голова
VI	Арьябхата, Индия	3,1416	Голова
IX	Аль-Хорезми, Персия	3,142857	Голова
XIII	Фибоначчи, Италия	3,141818	Голова
XV	Аль-Каши, Персия	16 правильных зн.	Голова
XV	Мадхава, Индия	3,14159265359	Голова
XVI	Да Винчи, Италия	3,142857	Голова
XVI	Виет, Франция	9 зн.	Голова
XVI	Романус, Бельгия	16 зн.	Голова
XVII	Сойлен, Голландия	35 зн.	Голова
XVIII	Мекин, Англия	100 зн.	Голова
XVIII	Вега, Словения	140 зн.	Голова
XIX	Рихтер, Германия	330 зн.	Голова
1949	Нейман, США	2037 зн.	ЭВМ
1973	Гийу и Буйе	1000000 зн.	ЭВМ
1986	Бейли, США	19 млн. зн.	ЭВМ
1987	Канада*, Япония	134 млн. зн.	ЭВМ
1989	Чудновские**, США	1 млрд. зн.	ЭВМ
1991	Чудновские**, США	2.3 млрд. зн.	ЭВМ

Когда	Кто и где	Значение или число знаков	Инструмент
1994	Чудновские**, США	4 млрд. зн.	ЭВМ
1995	Канада*, Япония	4,3 млрд. зн.	ЭВМ
1997	Канада*, Япония	51 млрд. зн.	ЭВМ
1999	Проект HINTS, США	206 млрд. зн.	СуперЭВМ

*Канада – в данном случае не название страны, а фамилия японского математика ☺.
**Чудновские – наши братья-славяне, развлекающиеся за счет американского налогоплательщика.

Нужны ли вычисления числа «пи» с такой точностью?

Для практики, в пределах Земли достаточно знать число «пи» с точностью 11 знаков после запятой. Например, радиус Земли равен 6400 км или 6,4·1012 миллиметров, то есть, получится, что мы, отбросив двенадцатую цифру «пи» после точки при вычислении длины меридиана, ошибемся на несколько миллиметров. А при расчете длины Земной орбиты при вращении вокруг Солнца (средний радиус орбиты равен 150 млн. км = $1.5 \cdot 10^{14}$ мм) для такой же точности в несколько мм достаточно использовать «пи» с четырнадцатью знаками после запятой. Среднее расстояние от Солнца до Плутона – самой далекой планеты Солнечной системы – в 40 раз больше среднего расстояния от Земли до Солнца, т.е. для вычисления длины орбиты Плутона с ошибкой в несколько миллиметров достаточно шестнадцати знаков в числе «пи». Да возьмем хоть всю нашу Галактику с диаметром в 100 000 световых лет, что составит или 10^{18} км или 10^{30} мм (один световой год – это примерно 10^{13} км)... Для измерения с той же никому не нужной точностью, достаточно числа «пи» с 34 знаками, а такое значение было получено еще в XXVII веке!

Но наука не признает границ!

И все же, хотите увидеть число «пи» с точностью 100 десятичных знаков после запятой? Зачем? Да просто ради кайфа! Тогда смотрите и наслаждайтесь:

3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209 74944 59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679...

***

И завершение небольшая шутка.

Говорят, что любители числа «пи» в США отмечают «День π» марта, так как в Америке эта дата записывается как 3.14. (Кстати, в этот день родился Альберт Эйнштейн). В Европе же, где записывают даты в обратном порядке (сначала число, потом месяц) «День π» отмечается 22 июля (28/VII,т.е. 22:7 = 3.1429...).

4. ОЧЕНЬ БОЛЬШИЕ ЧИСЛА

4.1. О шахматах и очень больших числах

Большому куску рот радуется, а
большому числу – мозг радуется.
Лука Умищев.

Истинная история возникновения этой замечательной игры неизвестна. По одним легендам изобретение шахмат приписывают библейскому царю Соломону, по другим – древнегреческому богу Гермесу... Однако, по наиболее правдоподобной версии, шахматы появились впервые в VI или VII веке новой эры, т.е. намного позже и Гермеса, и Соломона.

Название игры – «шахматы» происходит от соединения двух слов: персидского «шах» (король) и арабского – «мат» (умер), т.е. означает в переводе «Король умер!». Француз бы при этом автоматически добавил: «Vive le Roy![74]»

Согласно одной из легенд, шахматы были изобретены около тысячи лет до н.э., индийским математиком, который автоматически стал известен и тем, что изобрел математическое действие возведения в степень. Вот о чем гласит эта легенда.

Один индийский раджа, завоевавший все соседние страны, провозгласил себя всемогущим. Но мудрец, живший в его царстве, сказал, что без войска и всемогущий бессилен, и слова эти дошли до раджи. Разгневанный раджа велел привести мудреца во дворец и сказал тому: «Если не докажешь правоты своих слов – голова с плеч! Докажешь – помилую. Ночь тебе на раздумье».

[74] «Да здравствует король!» – так кричал народ в монархической Франции, когда уличный глашатай объявлял о смерти короля и вступлении на престол его наследника.

Поутру мудрец принёс радже игру, которую он придумал за ночь – шахматы. Игра в иносказательной форме подтвердила правоту мудреца: один король – в поле не воин!

Радже так понравилась игра, что он предложил мудрецу просить любую награду. Мудрец не попросил ни земель, ни денег, ни драгоценностей, а скромно попросил у раджи пшеничных зерен: «Повели визирю своему положить одно пшеничное зерно на первую клетку шахматной доски, потом – в два на вторую клетку, потом на третью клетку в два раза больше, чем на вторую, и пусть он продолжает так класть на каждую следующую клетку вдвое больше зерен, чем на предыдущую, пока не будут заполнены все клетки».

Раджа удивился: мудрец отдает свою игру за бесценок! Он велел своему визирю наградить мудреца пшеницей, которую тот просил. Однако на следующий день придворные математики сообщили своему повелителю, никто не в состоянии исполнить желание хитроумного мудреца: нет стольких зерен ни в царстве самого раджи, ни во всех царствах мира. А ведь мудрец скромно потребовал всего $1+2+2^2+\ldots+2^{63}$ зерен...

Но так ли уж это много? Это *безумно* много! Это число, записанное в виде геометрического ряда, представленного выше, равно числу $2^{64}-1$, которое в нашей десятичной системе называется 18 квинтильонов 446 квадрильонов 744 триллиона 73 биллиона 709 миллионов 551 тысяча 615 и записывается, как

18 446 744 073 709 551 615

Для того, чтобы хранить такое количество зерна, необходимо было бы построить амбар высотой 5 метров, шириной – 16 метров, а длиной ... от Земли до Солнца[75]!

Такие большие числа называются «астрономическими». Но о больших числах пойдет речь чуть позже. А пока быстренько проследим историю развития шахмат: ведь обычно те, кто интересуется математикой, любят играть в эту увлекательную игру (хотя обратное утверждение и не всегда справедливо ☺).

[75] См. Я.И. Перельман «*Живая математика*», Москва, АСТ, 2003.

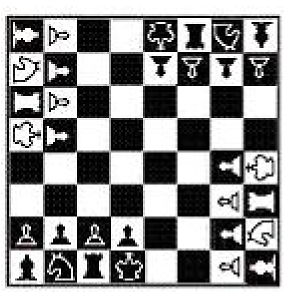
4.2. История шахмат

Шахматы - это море, в котором колибри
может напиться, а слон - искупаться
Индийская пословица.

Конечно, эта игра, как и все в подлунном мире, развивалась и появилась не сразу в таком виде, какой мы знаем ее сейчас. Археологические находки свидетельствуют о том, что игры с фишками на доске были известны в древние времена в Ассирии, Месопотамии и Египте уже в 3-4 веках до н.э. Однако это были еще не шахматы, а игры типа, кто кого обгонит («вперегонки»), где передвижение фишек определялось бросанием игральных костей.

Однако от того, что она игралась на доске и с фигурками, еще не значило, что игра была даже предвестником шахмат: ведь и у стола, и у собаки по четыре ноги, но кроме этого между ними нет ничего общего!

Родиной шахмат, как мы уже говорили, считается Индия. Шахматы, в их первоначальном варианте, были игрой для четверых человек с четырьмя наборами фигур и назывались чатранга (на санскрите «чатр» означает «четыре», а «анга» означает «отряд»). В Индии в состав войска входили боевые колесницы, слоны, конница и пешие воины. Игра символизировала одновременную битву четырех войск с участием четырех родов войск с полководцем во главе каждого войска. Каждая из воюющих сторон изначально располагалась по углам 64-клеточной квадратной доски. Игра сводилась не к матованию короля, а к уничтожению сил каждого из соперников. Причем ходы делались после бросания игральной кости: так, если выпадала цифра 2, то играла ладья, если 3 – то конь, 4 – то слон и так далее. Все клеточки на доске были одного цвета. А фигуры были четырех различных цветов.



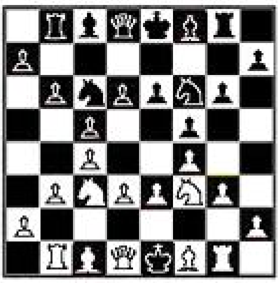
Чатранга (начальное расположение).

Со временем чатранга превратилась в шатранг – игру для двух соперников. В таком виде, на рубеже VI-VII веков, игра пересекла границу, где она стала созвучно называться «шатранджм». (Кстати так шахматы называются на фарси до сих пор.)

Правила еще отличались от нынешних: не было рокировки, слон передвигался только на три поля, хотя мог перепрыгивать через фигуры и пешки.

Распространение шахмат в арабском мире изменило внешний вид фигур: дело в том, что Ислам запрещает изображения животных. Конь снова появился только уже в европейском варианте шахматных фигур, а от слона осталось все равно одно название... Русские игроки попроще вообще называют его «офицером».

Медлительность шатранджа породила так называемые табии – изначальные расстановки фигур на доске, отличные от исходной.



Иными словами, игроками как бы уже было сделано по несколько симметричных ходов. Например, одна из начальных расстановок, называемая «альмуджаннах», в которой игроками сделано по 12 ходов[76], представлена на рисунке ниже.

Первое литературное упоминание о шахматах в Западной Европе относится к самому началу XI в. Однако во время недавних раскопок византийского дворца, который находился на территории современной южной Албании, были обнаружены шахматные фигурки из моржовой кости, что показывает, что в Европе играли в шахматы уже в VI веке нашей эры. (И с моржовой костью на юге Европы были уже знакомы!)

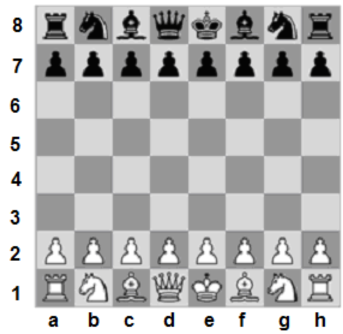
В Западной Европе шатрандж претерпел значительные изменения. Во-первых, начиная с XI в. шахматная доска стала двухцветной. Во-вторых, вместо трех путей к победе – мата, пата и уничтожения всех боевых сил, остался лишь один – мат. В-третьих, для ускорения игры был разрешен первый двойной ход пешкой, введена рокировка.

Кроме того, загадочные для европейцев абстрактные фигуры шатранджа вновь стали принимать изобразительную форму.

[76] Вы можете насчитать всего по 10 ходов с каждой стороны, но имейте в виду, что тогда пешке разрешалось двигаться вперед всего на одно поле.

Русь, как всегда, отставала: первое упоминание о шахматах на Руси относится ко второй половине XIII века. Раскопки в Новгороде показали, что в шахматы играли бояре и холопы, купцы и ремесленники, а порой поигрывали даже и служители культа...

Удивительно, но небольшая, в общем-то, шахматная доска предоставляет поистине необъятное поле для комбинаций. Так, в самом начале партии игрок имеет 20 вариантов для первого хода; его партнер, в свою очередь, может ответить 20 ходами на каждый ход...



4.3. Гугол и его друзья

Играйте, дети, лучше в кукол,
А не изобретайте Гугол!
Лука Умищев

Многие знают, что в Интернете есть поисковая система под названием GOOGLE. А все ли слышали, что есть такое математическое чудовище – гугол[77]?

Что же это такое? Помните такое русское выражение для обозначения большого числа каких-то предметов – *тьма*? Так вот, *гугол* во много-много раз больше *тьмы*! Почему? Да потому что в мире просто не существует такого числа никаких объектов – даже мельчайших микрочастиц материи! А *тьма* все же имела дело с реальным миром...

[77] В отличие от поисковой системы Google, число гугол пишется “googol”.

О гуголе впервые написал американский математик Эдвард Каснер[78]. По его словам, назвать «гуголом» (googol) большое число предложил его девятилетний племянник Милтон Сиротта. Бедный «Сироттинушка» и не подумал, что число, которому он дал имя имеет вид

Гугол = 10^{100} = 1 0000000000 0000000000 0000000000 0000000000 0000000000 0000000000 0000000000 0000000000 0000000000 0000000000. (Нули можете не пересчитывать – их ровно сто штук. ☺)

Мне думается, что обыкновенный русский сирота назвал бы это число как-нибудь попроще, например, «д**о**фига». И был бы прав! Ведь число гугол достаточно для того, чтобы измерять *все, что угодно*, в нашей вселенной! Давайте посмотрим, какие из известных нам физических величин меньше гугола:

(а) Длительность существования Вселенной после «Большого взрыва» (Big Bang) до наших дней, измеряемая в наносекундах (10^{-9} часть секунды).
(б) Максимальный диаметр Вселенной, измеряемый в ангстремах (10^{-8} часть сантиметра).
(в) Число элементарных частиц во вселенной.

Но Каснер был азартным человеком, он не успокоился на гуголе и придумал еще «*гуголплекс*»! Это число-монстр записывается в виде:

гуголплекс = $10^{\text{гугол}} = 10^{10^{100}}$ = 1 000… (гугол штук нулей) ... 000.

Этот гуголплекс не имеет никакого смысла вообще...

В «естественном виде» (т.е. со всеми нулями) это число даже невозможно записать: если всю материю Вселенной перевести не то что в бумагу, а в супер-ёмкую компьютерную память, то и тогда той памяти не хватило бы для записи этого числа!

Впрочем, понапридумывать произвольных фантастических чисел – не хитрое дело. Почему бы, например, не придумать и вовсе «страшное» число - «супер-гуголплекс», равное единице с последующими гуголплекс нулями?! А то еще и пуще этого, например, *гугол*$^{\text{гугол}}$ да и назвать его похлеще, например ГУГ☺ЛИЩЕ, или «по-аглицки» G☺☺G☺L… А если взять ГУГ☺ЛИЩЕ$^{\text{ГУГ☺ЛИЩЕ}}$?! Аж

[78] **Эдвард Каснер** (1878-1965), американский математик.

дух захватывает! И все равно опять возникает резонный вопрос: «Ну и что?!!!» В данном случае хорошего ответа не возникает...

Однако совсем иное дело, когда большие числа появляются не от праздного горения ума, а при решении тех или иных физических или даже чисто математических проблем. В первом случае возникают гигантские числа, известные как «внесистемные числа» (но о них немного погодя), а во втором – так называемые комбинаторные числа (заметим, что гугол «приблизительно» равен факториалу числа 70, а насколько коварен в этом смысле факториал, мы еще увидим).

Итак, простим Каснера с его бессмысленным гуголплексом. Он своего добился: прославился, как герой чеховского рассказа «*Прославился*» Митя Кулдаров[79], который попал под лошадь!

Но вот осмысленными большими числами люди интересовались задолго до Каснера. Впервые вопрос о больших числах поднял, видимо, Архимед. Он решил исчислить вошедшую в поговорки многих народов мира неисчислимость песчинок. Согласно его схеме Вселенная (в его представлении сфера с радиусом от Земли до Солнца), будучи наполнена песком, содержит (в современном представлении) не более, чем 10^{51} песчинок.

В схеме Архимеда «последним» числом является некое число, которое в современной записи выглядит как $10^{8\cdot 10^{15}}$.

«Самое большое» число появилось у Архимеда только лишь потому, что представление чисел «уперлось» в недостаток подходящих обозначений.

Были свои названия больших чисел и у древних славян:

- 10^4 – тьма
- 10^5 – легион
- 10^6 – леодр

[79] Герой рассказа Чехова был несказанно рад, что его в газете пропечатали: «29 декабря, в 11 часов вечера, коллежский регистратор Дмитрий Кулдаров, находясь в нетрезвом состоянии, попал под лошадь...». Большинству аналогичный эпизод известен по книге И. Ильфа и Е. Петрова «12 стульев»: «Вчера на площади Свердлова попал под лошадь извозчика № 8974 гр. О. Бендер». Вот ведь Кулдаров с Бендером и гугола не изобрели, а тоже прославились!

- 10^7 – вран (ворон)
- 10^8 – колода.

Интересно, что имена современных супербольших чисел в основе своей имеют названия римских цифр, которые сами по себе в естественном виде не превышают всего-навсего тысячи! Названия больших чисел построены довольно простым образом: в начале идет латинское порядковое числительное, а в конце к ней добавляется суффикс – «иллион». (Исключение составляет название «миллион», которое образовано от корня «mille» (тысяча) и увеличительного суффикса -иллион.)

В мире в основном используются следующие названия чисел:

- 10 - десять
- 10^2 - сто
- 10^3 – тысяча
- 10^6- миллион
- 10^9- миллиард (в США – биллион)
- 10^{12}- триллион
- 10^{15}- квадриллион
- 10^{21}- секстиллион
- 10^{24}- септиллион
- 10^{27}- октиллион
- 10^{30}- нониллион
- 10^{33}- дециллион

Ну, наверное, хватит, а то мы уподобимся Каснеру!

Давайте лучше рассмотрим один «реальный» пример. Пророк Магомет, доставленный белым конем на небо, сразу же сделал следующее заявление: «Я увидел ангела, самого большого из всех существующих созданий. У него было 70 тысяч голов, каждая голова имела 70 тысяч лиц, каждое лицо имело 70 тысяч ртов, в каждом рту было по 70 тысяч языков, каждый из которых говорил на 70 тысячах наречий, и все они славили Аллаха». Ежели аккуратненько посчитать, то Аллах был прославляем почти на полутора септиллионах наречий. (Вот только откуда взялось такое количество языков? Не иначе, как здесь не обошлось без инопланетян с других галактик!)

Заметим, что в древнем буддийском трактате Джинна-сутра, относящемся к первому веку до н.э. введено число «асанкхейя»[80],

---

[80] От китайского *асэнци* – неисчислимый. Вот уж где древние китайцы-буддисты оказались правы!

которое изображается единицей со 140 нулями, т.е. 10^{140}. Считается, что этому числу равно количество космических циклов, необходимых для обретения нирваны. Ну, вот это совсем иное дело – это не какой-то абстрактный гугол! У этого числа есть самое прямое практическое приложение: кому не хочется нирваны?! Да вот жаль: не дождаться никогда...

Математики позаботились о том, чтобы напугать вас большими числами... Один этот, как его там, плакса-гугол!.. Но главное, что – как говорится в пословице – тяжело в ученье, легко в бою. Почти наверняка, вам не придется сталкиваться с числами-монстрами.

Тем не менее, чтобы сделать перерыв, я расскажу вам очередную порцию математических анекдотов.

Смешилки о математиках из копилки проф. Л. Умищева

***

Шерлок Холмс с Ватсоном летели на воздушном шаре и, находясь в течение долгого времени в густом облаке, потеряли всяческую ориентацию. Наконец, в просвете они увидели домик с лужайкой, на которой стоял молодой мужчина. Ватсон закричал: «Эй! На земле! Скажите нам, где мы находимся?» Человек, немного подумав, крикнул им вслед, когда путешественники уже опять скрывались в облаках: «Вы находитесь в корзине воздушного шара!»

Шерлок Холмс сказал: «Ватсон, я уверен, что этот человек – математик...» – «Почему вы так думаете?» – «Потому что его ответ был абсолютно точен, но в то же время и абсолютно бесполезен...»

***

Идет математик по улице и видит афишу на столбе: «Выступает *камерный* оркестр». Думает: «*k*-мерный оркестр? Это интересно!» Покупает билет, заходит, оглядывает зал, слушает первые аккорды, потом недовольный выходит, бормоча: «Обещали *k*-мерный, а показали всего частный случай, когда *k* равно трём».

***

Идет экзамен по математике. Профессор, чтобы успокоить нервничающего студента, дружелюбно улыбается экзаменуемому:

– Мы, кажется, уже знакомы, – ободряюще говорит он. – Не встречались ли мы раньше?

– Да, я сдавал вам в прошлом году. Но, к сожалению, провалился.

– Ну, на этот раз, я уверен, все пойдет отлично. Не помните ли, какой первый вопрос я задавал вам на прошлом экзамене?

– Вы спросили: «Не встречались ли мы с вами раньше?»

***

После ответов студента на вопросы, профессор математики раздраженно пишет в зачетке студента печатными буквами в графе, где проставляется оценка, –"КОЗЁЛ".

Студент выходит в коридор, открывает зачетку, потом вбегает назад в аудиторию со словами: «Профессор, вы только расписались, а оценку не поставили!»

***

Математик решил повесить картину на стену, залез на стремянку с молотком, но забыл гвоздь. Кричит жене в кухню: «Матрёна, принеси, пожалуйста гвоздь!» Жена приносит гвоздь и уходит. Математик берет гвоздь, приставляет его шляпкой к стене, видя, что что-то не так, кричит опять: «Матрена! Ты принесла мне гвоздь от противоположной стены!..»

***

Сержант собрал солдат для проведения землеройных работ: «Так, значит – всем копать! Кто тут из вас склонен к математике? Ты – Сидоров? Бери лопату – будешь корни извлекать!»

***

Ассистент сообщает профессору по математике, жена которого лежала в роддоме:

– Только что позвонили из роддома и сказали, что у вас родилась дочь.

Профессор, не поднимая головы от книги:

– Сообщите, пожалуйста, об этом моей супруге.

5. МАГИЯ ЧИСЕЛ

Мир построен на силе чисел.
Пифагор

5.1. Пифагорейцы

Душа от чисел только греется
У каждого пифагорейца.
А вам все подавай дрова!
Так для чего ж вам голова?
Лука Умищев.

Когда великий греческий ученый Пифагор основал свою школу, которая получила в античной истории название «Пифагорейской школы», обычные до сего времени числа стали играть мистическую и важную роль...

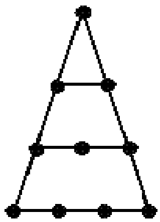
Пифагорейская философская школа имела характер религиозно-философского аристократического братства и оказала большое влияние на тогдашнее общество и на многие последующие поколения.

Жизнь Пифагорейского братства была окружена тайной, поскольку его члены считали, что фундаментальное познание природы должно быть тайным. Приобщенными к их научным тайнам оказывались лишь те, кто был способен оценить величие научных истин.

Основой учения Пифагора была вера в переселение душ и гармоничное устройство мира. Пифагорейцы полагали, что душу очищают музыка и умственный труд, поэтому они считали обязательным совершенствование в «четырёх искусствах» – арифметике, музыке, геометрии и астрономии.

Пифагор особенное внимание уделял числам, их свойствам, их «характеру», видел в них тайный смысл вещей, через них объяснял многие явления окружающего мира. Числам придавался мистический смысл, они понимались как суть всего существующего.

Именно такое внимание к числам и операциям над ними и привело к тому, что Пифагорейская школа положила начало систематическому изучению математики.



Тетрактис Пифагора.

Основой пифагорейской математики было учение о «декаде»: 1+2+3+4=10. Эти четыре числа, по представлению пифагорейцев, описывают все процессы, происходящие в мире. Тетрактис Пифагора (пирамида из десяти точек), представленный ниже, был символом огромной важности, потому что, как провозглашалось пифагорейцами, он открывал проницательному уму тайну мироздания.

В частности, декада отображает законы музыкальной гармонии: через нее выражаются основные музыкальные интервалы – октава (2:1), квинта (3:2) и кварта (4:3).

Самым важным инструментом в древнегреческой музыке был тетрахорд, или четырехструнная лира. Лиры настраивали только по слуху, пока не устанавливалось гармоническое звучание струн – процесс, который Платон называл «пыткой настроечных колков».

То же самое вы можете наблюдать и сейчас, например, перед началом симфонического концерта или же на домашней вечеринке, когда перед началом игры на гитаре гитарист начинает «пытать колки».

Интересна легенда о том, как Пифагор открыл законы музыкальной гармонии. Однажды проходя мимо кузницы, он услышал удары молотков о железо, производивших во всех комбинациях, кроме одной, разнообразные гармонические звуки. Войдя в кузницу, Пифагор обнаружил, что только те из них порождали гармоническое звучание, массы которых образовывали друг с другом простые отношения, или дроби типа 1:2, 2:3 и т.д.

Магия чисел охватывала почти все направления математических изысканий пифагорейцев. Квадрат числа был для них символом справедливости и равенства. Символом постоянства было число девять, поскольку кратные девяти числа имеют сумму цифр, опять-таки равную девяти: 9×2=18, а 1+8=9; 9×3=27, а 2+7=9; 9×4=36, а 3+6=9; 9×5=46, а 4+5=9; 9×6=54, а 5+4=9; 9×9=81, а

8+1=9! Не правда ли, в этом и на самом деле есть нечто чарующее?

Более того, если перемножить любые числа, каждое из которых представляет собой произведение какого либо числа на 9, то получится тот же эффект (при многократном применении аналогичной процедуры), например:

$(3\times9)\times(4\times9)=27\times36=972$, где $9+7+2=18$, а затем $1+8=9$!

Число восемь у пифагорейцев символизировало смерть, так как числа, кратные восьми имеют уменьшающуюся сумму цифр. Действительно, начинается с 8. Потом число 16, равное 8×2, для которого $1+6=7$. Затем следует 24, для которого $2+4=6$, затем – 32, с суммой цифр $3+2=5$! Опять какая-то чертовщина: как тут не поверить в магию, если ты при этом еще и древний грек?

Пифагорейцы считали четные числа *женскими*, а нечетные *мужскими*. Нечетное число – «оплодотворяющее»: если его сочетать с четным (попросту говоря, сложить), оно возобладает, т.е. появляется опять нечетное число. Символ брака у пифагорейцев состоял из суммы мужского (нечетного) числа 3 и женского (четного) числа два. Естественно, напрашивается, что брак – это 5 (сумма 3+2). По той же причине прямоугольный треугольник со сторонами три, четыре и пять был назван ими «фигура невесты».

Пифагорейцы считали, что первое совершенное число – число 6 – является символом души.

Но не только магия чисел лежала в основе Пифагорейской школы. Основной целью школы было нравственное обновление и очищение религиозных воззрений ее членов. Нравственные принципы для пифагорейцев были очень важны, и их учителя провозглашали: «В словах и поступках своих стремись быть всегда справедливым» или «Пусть главным судьей твоим станет твоя совесть» и тому подобное. В конце каждого дня, каждый из пифагорейцев сам для себя взвешивал, что сделано хорошего или дурного за день, а также решал, что предстоит свершить завтра: «В успокоительный сон не должно тебе погружаться прежде, чем снова не вспомнишь о каждом сегодняшнем деле: В чем провинился? Что мог совершить? И чего не исполнил?»

Пифагорейцам принадлежит учение о музыке сфер и о музыкальном звукоряде, отражающем гармонию Солнечной системы, где каждой планете соответствует определенная нота, а все вместе они создают интервалы музыкальной гаммы. Ими же положено и начало музыкальной психологии: музыка использовалась как средство воспитания и исцеления души и тела.

Пифагор создал теорию гармонии, работая с *монохордом*, однострунным инструментом собственного изобретения. Он рассматривал Вселенную как колоссальный монохорд, единственная струна которого прикреплена вверху к абсолютному духу, а внизу – к абсолютной материи. Иными словами, эта струна связывает земное с небесным. Согласно Пифагору, музыка находилась в подчинении у высшей из наук – математики, и ее гармонии жестко регулировались математическими пропорциями.

В пифагорейской школе начали развиваться астрономия и медицина. Ею создано множество аллегорических комментариев к Гомеру, а также грамматика греческого языка.

Таким образом, пифагорейцев можно, в некотором роде, считать родоначальниками гуманитарной, естественной и точной наук.

5.2. Нумерология

Гадают на кофейной гуще,
По звездам, в небе что повисли...
Но мне же всех гаданий пуще –
Магические эти числа!
Лука Умищев

Уж коли пошел разговор о цифрах в связи с пифагорейцами, то никак нельзя оставить в стороне нумерологию.

Нумерология – это древняя эзотерическая[81] наука о числах. Конечно, наукой эти упражнения с цифрами назвать нельзя даже с большой натяжкой – это некая магия чисел, которая близка по духу к астрологии, гаданию по руке или «чтению» кристаллов. Право называться наукой нумерология потеряла уже в средневековье. Однако, многие верят и сейчас в гадание на кофейной гуще, так почему бы и нам не совершить небольшое путешествие в страну мистических чисел?

---

[81] Эзотерический (от греч. «*esoterikos*» – *внутренний*) – тайный, скрытый, предназначенный исключительно для посвященных.

Трудно сказать, когда именно зародилась нумерология, однако основные принципы нынешнего варианта западной нумерологии были разработаны в VI веке до н.э. Пифагором. Он каждое из чисел сводил к «корневым»: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 или 9, а уж каждому из «корневых» чисел соответствуют определенные оккультные характеристики, влияющие на жизнь человека.

Чтобы свести число к «корневому» Пифагор вычислял сумму всех цифр, стоящих во всех разрядах десятичного числа, если при этом получалось многоразрядное число, то процедура продолжалась, пока не получалось «корневое число». Например, числу 27 соответствует «корневое число» 9, т.к. 2+7=9, а числу 28 соответствует 1, поскольку 2+8=10, что затем дает 1+0=1.

Заметим, что можно в рамках нумерологии перенумеровывать буквы слова, а затем со словом действовать по тому же принципу, что и с многоразрядным числом. Одним словом, все очень удобно: не понравилась характеристика, выданная цифрой, которая соответствует вашему дню рождения, возьмите свое имя, и посчитайте новое «корневое» число! Опять результат не устраивает – займитесь фамилией... Добавим от себя, что можно и этим не ограничиваться: не понравилось гадание по имени – попробуйте написать его латинскими буквами, а то и на кириллице...

Итак, «Наши цели ясны, задачи определены, – как говорил один из мудрецов прошлого. – За работу, товарищи!»

Раз, два, три, четыре, пять – я иду искать. Кто не спрятался – я не отвечаю!

* * *

Число 1. **(**Дни рождения 1, 10, 19 или 28).

Люди, родившиеся в эти числа, отличаются целеустремленностью, сильным характером, они горды и упрямы. Они созидательны, честолюбивы, в общении не всегда приятны и полагаются только на себя, не принимая ничьих советов. Их мало интересует дружба и любовь: они не любят ограничиваться домашним кругом. Но при этом у них мало близких друзей. Если же они и проявляют к кому симпатию, то вызвано это корыстными соображениями. Они любят командовать, подчас доходя до тирании.

У-у-у-ффф!.. Извиняйте за такую характеристику... Как говорится, всыпали по первое число тем, кто родился первого числа! ☺

Для любознательных (ради беспристрастного перечисления все фамилии расположены по алфавиту): Александр Блок (28 ноября), Леонид Брежнев (1 января), Диана, которая Принцесса (1 июля), Борис Ельцин (1 февраля), Бил Клинтон (19 августа), Софья Ковалевская (10 февраля), Николай Коперник (19 февраля), Ада Лавлейс (10 декабря), Готфрид Лейбниц (1 июня), Николай Некрасов (10 декабря), Борис Пастернак (10 февраля), Сергей Рахманинов (1 апреля).

Немного странно, что в эту компанию в общем-то милых людей затесались Брежнев и Ельцин. Впрочем, они горды и упрямы, как и сообщает нам нумерология...

Скорее, не подходят сюда наши не наши поэты... Но, как говорится, из песни слова не выбросишь...

Число 2. (Дни рождения 2, 11, 20 или 29.)

Первое четное число, 2, традиционно ассоциирующееся с женственностью. Людям этого числа свойственны мягкость, нежность, скромность, послушание, подчинение. Обычно «двойки» стремятся быть ведомыми и становятся прекрасными исполнителями – честными, аккуратными и скромными. Они часто меняют свои взгляды, колеблются и проявляют нерешительность.

Как всегда при гадании, возможная многозначность просто необходима, иначе легко совершить грубую ошибку. Поэтому тут же обычно дается и диаметрально противоположная характеристика: у этого числа есть и темная, зловещая сторона, которая может выражаться в жестокости, злобности и лживости, поскольку двойка связана с «Диаволом». Еще Святой Августин (а уж кто, как не он, знал Божьи секреты!) отметил, что «нечистые твари входили в Ноев ковчег по двое, а чистые – седьмицами».

Для любознательных: Анна Ахматова (11 июня), Йозеф Геббельс (29 октября), Адольф Гитлер (20 апреля), Михаил Горбачёв (2 марта), Сальвадор Дали (11 мая), Феликс Дзержинский (11 сентября), Екатерина Великая (2 мая), Джон Кеннеди (29 мая), Николай Лобачевский (20 ноября), Бенито Муссолини (29 июля), Пророк Мухаммед (20 апреля),

Ах, как трудно удержаться от комментариев!
Вот тебе на! Женственность, мягкость...
Но по части жестокости и злобности – хорошая угадка: тут и Гитлер, и Геббельс, и Муссолини и наш родной Дзержинский.
Да и Пророк Мухаммед... Кто он?
Только вот как в такую компанийку затесался такой человек, как Горбачев?

Число 3. (Дни рождения 3, 12, 21 или 30.)

Ну, конечно же, 3 связано с Троицей, а отсюда и все вытекающие последствия. Правда, древние греки, будучи язычниками, находили мощь числа в другом (им Троица была еще неведома). Пифагорейцы называли 3 совершенным числом, потому что оно имеет начало, середину и конец (☺ 😐 ☹), а естественно, что все, лишенное начала, середины или конца, является несовершенным.

Если число вашего рождения - 3, вы будете легко и успешно двигаться по жизни, без усилий приобретая деньги и признание. (Надеемся, что вы, читатель, родились именно третьего числа!) Поскольку 3 является числом созидания, люди этого числа испытывают мощную потребность созидать и самовыражаться. Они разговорчивы и остроумны, энергичны и подвижны, как правило, это натуры творческие и азартные. Чаще всего они преуспевают в жизни. Иногда они неудержимо стремятся к популярности и болезненно нуждаются в одобрении окружающих.

Однако немного горького «на закуску»: у обладателей «3» может присутствовать и нечто демоническое и ненатуральное – ведь нет же (комментарий нумерологов, не наш!) на земле тварей о трех ногах...

Для любознательных: Джордж Буш старший (12 июня), Винсент Ван Гог (30 марта), Фридрих Гаусс (30 апреля), Федор Достоевский (30 октября), Сергей Есенин (3 октября), Андрей Колмогоров (12 апреля), Сергей Королев (12 января), Игорь Курчатов (12 января), Исаак Левитан (30 августа),Юрий Лужков (21 сентября), Никита Михалков (21 октября), Амадео Модильяни (12 июля), Андрей Сахаров (21 мая), Иосиф Сталин (21 декабря), Дмитрий Шостакович (12 сентября).

Список – как специально для подтверждения истинности гадания на кофейной гуще: все как на подбор настоящие творцы...
Вы недоуменно спросите: «А как же корифей всех времен и народов товарищ Сталин?!»
Но ведь и тут все верно: он столько зла сотворил... Такого до него (а пока и после) никому не удавалось!
Но вот Сахаров и Сталин в одной строке – это загадка черной магии!

Число 4. (Дни рождения 4, 13, 22 или 31.)

Число «4» черпает свою значительность (если даже не многозначительность) из нескольких источников. Один из них- чисто «математический» заключается в том, что число «4» является первым «составным» числом, поскольку оно появляется впервые как продукт другого числа: действительно, 2× 2 = 4. Добавим к этому еще один пифагорейский аргумент геометрической природы: простейший правильный объемный объект (тетраэдр) имеет 4 стороны. А посему современные нумерологи ассоциируют это число с материальным миром и, в частности, с Землей-матушкой. А в довершение всего, Земля наша характеризуется четырьмя «опорными направлениями»: Север, Юг, Восток и Запад... А взять время: год состоит из четырех сезонов, месяц состоит из четырех недель (с некоторой натяжкой, правда)... И чего только не найти, если очень хочется!

Христианские нумерологи отмечают, что жизнеописание Иисуса Христа содержится в четырех Евангелиях Нового Завета. Согласно Каббале, в иудаизме каждая буква Тетраграмматона – святого имени бога, которое нельзя произносить вслух, – соответствует одному из четырех главных первичных элементов, из которых состоит мир: огню, воздуху, земле и воде... В Китае, как и в некоторых других странах Востока, слово “4” является омонимом[82] слова «смерть». Там даже в некоторых госпиталях нет четвертого этажа ☹.

Люди, чьим числом является 4, честны и бесстрастны, практичны и приземлены, они – столпы общества. Порой они мрачны и суровы, подозрительны и скучны. Это труженики, не умеющие ни воодушевляться, ни воодушевлять других, но способные выпол-

---

[82] **Омонимы** – одинаковые по написанию и звучанию слова, которые имеют различный смысл, например, «рысь» – бег и «рысь» – животное.

нять тяжелую, нудную работу ради сомнительных и часто незначительных результатов.

Четыре – несчастливое число... По традиции, четыре – число нищеты, несчастья и поражения. Большинство современных нумерологов пытается замалчивать эти неприятные стороны, но общая характеристика числа «4» не из благоприятных... Увы! Извините те, у кого «4».

Для любознательных: Джордж Байрон (22 января), Джордж Вашингтон (22 февраля), Антонио Вивальди (4 марта), Николай Гоголь (31 марта), Шарль де Голль (22 ноября), Гарри Каспаров (13 апреля), Владимир Ленин (22 апреля), Анри Матисс (31 декабря), Исаак Ньютон (4 января), Борис Пастернак (4 апреля), Сократ (4 июня) Лука Умищев (22 января), Федор Шаляпин (13 февраля), Фредерик Шопен (22 февраля),

Ну, конечно же, люди с этим числом бесстрастны и приземлены! Особенно это касается Байрона, Вивальди, Гоголя, Матисса, Пастернака, Шопена и Шаляпина! Гадальщик (или гадальщица) прямо пальцем в небо попали со своей «бесстрастностью»!

Назовите более страстные натуры... (Кроме, конечно, Владимира Жириновского! ☺)

Число 5. (Дни рождения 5, 14 или 23.)

Родившиеся в эти дни непоседливы, умны, пытливы и эмоциональны. Их привлекает все непривычное и странное, они редко отказываются от возможности попробовать что-нибудь новенькое.

Они любят путешествовать, заводить новые знакомства, менять обстановку, а посему ни в чем не достигают совершенства, ибо они ни на чем не останавливаются. Они ненавидят ответственность и избегают ее. Зачастую они невнимательны к другим и потворствуют своим желаниям.

Некоторые нумерологи считают, что число 5 – это символ Донжуана – непостоянного, изменчивого любителя риска и приключений, привлекаемого всем и не останавливающегося ни на чем, это число человека, избегающего ответственности, возможно, даже развратника и извращенца. (Примечание: Авторы не несут ответственности за разгул астрологических фантазий в заимствованных первоисточниках. Кстати, про женщин в данном случае нумерология умалчивает. ☺)

Для любознательных: Борис Березовский (23 января), Давид Гильберт (23 января), Симон Лаплас (23 марта), Александр Матросов (5 февраля), Пеле (23 октября), Клод Моне (14 февраля), Сергей Прокофьев (23 апреля), Илья Репин (5 августа), Уильям Шекспир (23 апреля), Альберт Эйнштейн (14 марта),

Жаль, жаль... Оказывается, что, Гильберт, Лаплас, Моне, Прокофьев, Репин Шекспир и Эйнштейн так и не достигли совершенства!.. Как жаль этих гениев в своих областях!

Да и Пеле играть в футбол совсем не умел...

Вот, правда, Березовский... Но может, он хотя бы Дон-Хуан?

Число 6. (Дни рождения 6, 15 или 24.)

Число 6 – совершенное! Естественно, что люди этого числа гармоничны, выдержаны и спокойны. Число 6 – это число женской любви и домашнего уюта. Это число олицетворяет идеальную мать и домохозяйку, и люди этого числа верны, страстны, надежны, поглощены домом и детьми, усердны и трудолюбивы («и шесть дней будешь ты трудиться»), аккуратны и прилежны, болтливы, хотя, надо признать, немного скучны, но бывают порой артистичны . Друзья, компания, любовь играют значительную роль в жизни обладателя числа 6.

Здесь приходится просить прощения у мужчин: в основном говорится про женщин...

Для любознательных: Роман Абрамович[83] (24 октября), Микеланджело Буанаротти (6 марта), Михаил Булгаков (15 мая), Джордж Буш, младший (6 июля), Леонардо да Винчи (15 апреля), Галилео Галилей (15 февраля), Михаил Лермонтов (15 октября), Ал-

[83] Извиняйте, дядьку, что Абрамович стоит перед Леонардо и Галилео – сила алфавитного порядка!

ла Пугачева, (15 апреля), Александр Пушкин (6 июня), Марк Шагал (6 июля)

Да, почти все перечисленные – гармоничные люди. То, что Буш младший не вышел «гармонией», так это старший Буш виноват: «сын за отца не отвечает» (это фразой одарил нас вождь всемирного пролетариата товарищ Сталин, слыхавший про Библию еще в духовной семинарии, которую так и не смог закончить).

А уж Абрамович более чем органичен: его гармония простирается от Челси до Чукотки!

Число 7. (Дни рождения 7, 16 или 25.)

По своей природе человек числа 7 отшельник и индивидуалист, педант, склонный проявлять упрямство. Человек этот умен, склонен к наукам, при этом может не любить физический труд.

«Обладатели семерки» – затворники от природы. Они любят удаляться от мирской суеты, предпочитая размышлять и медитировать. Их не интересуют ни деньги, ни личный комфорт. Они совершенно не способны излагать собственные мысли и обычно не любят, когда им задают вопросы или вступают с ними в дискуссию. (Здесь мы приносим извинения тем профессорам и доцентам, которые родились 7, 16 или 25 числа – но против цифры не попрешь! ☺)

Порой они глубоко несчастны, пессимистичны, разочарованы, и тогда они ведут себя надменно, с чувством собственного превосходства и уничтожающим сарказмом.

Вообще 7 – самое таинственное и сверхъестественное число…

<u>Для любознательных:</u> Людвиг ван Бетховен (16 декабря), Владимир Высоцкий (25 января), Поль Гоген (7 июня), Иван Грозный (25 августа), Владимир Жириновский (25 апреля), Владимир Маяковский (7 июня), Пабло Пикассо (25 октября), Владимир Путин (7 октября), Огюст Ренуар (25 февраля), Лев Троцкий (7 ноября), Иисус Христос (25 декабря), Петр Чайковский (7 мая), Дмитрий Шостакович (25 сентября),

Конечно же, эти люди совершенно не умеют излагать свои мысли...

Вот только как насчет Высоцкого, Маяковского, Путина, Троцкого, Иисуса Христа?
А один Владимир Вольфович чего стоит!

Число 8. (Дни рождения 8, 17 или 26.)

Человек с таким днем рождения обладает гармонично развитым мышлением, неплохими организаторскими качествами, а также способностью вести бизнес и «делать деньги», не попирая закон. Во всяком случае, обладатели восьмерки сильные, жесткие, практичные люди, хотя их жизненный путь никогда не бывает простым. Их карьера зиждется на постоянной борьбе и тяжелой работе. Они все делают продуманно и осмотрительно, без каких-либо эмоциональных порывов, при этом могут быть неприятными, прагматичными, эгоистичными, иногда беспринципными и самовластными. Словом, их характер не слишком привлекателен,что они порой и сами осознают. Однако зачастую за их мрачным и холодным видом скрывается безумная эксцентричность и необузданность.

Они способны достичь огромного успеха, но постоянно сталкиваются с возможностью сокрушительной неудачи. Да это и понятно. Поскольку 8 есть сумма 4+4, то ему генетически перепадает и от числа 4: вероятность неудачи у «восьмерки» в два раза больше, чем у «четверки», однако, с другой стороны, там, где «четверка» вкалывает ради куска хлеба, «восьмерка» может добиться огромного успеха. Люди числа 8 могут как подниматься, так и опускаться вниз (а кто не может? ☺). Современные нумерологи указывают на дуалистическую природу этого числа: ее изображением – два круга один поверх другого. (Нам более естественным образом представляется знак бесконечности ∞, поставленный «на попа». ☺)

Нумерологи пошли еще дальше. Они заметили, что мужское тело имеет семь отверстий, а женское – восемь, причем восьмое представляет собой врата, через которые в мир входит новая жизнь. Поэтому 8 есть число «новой жизни», и поэтому купель во многих церквях имеет форму восьмигранника, как символ того, что крещение является воротами в новую жизнь (ой ли? неужто христиане были нумерологами?). По иудейской традиции, новорожденный мальчик получает имя и начинает самостоятельную жизнь на восьмой день после рождения. (А может, и правда, христиане и иудеи считали «отверстия»? ☺)

Для любознательных: Людвиг ван Бетховен (17 декабря), Михаил Врубель (17 марта), Джордж Гершвин (26 сентября), Аль Капоне (17 января), Хиллари Клинтон (26 октября), Надежда Крупская (26 февраля), Дмитрий Менделеев (8 февраля), Август Мёбиус (17 ноября), Константин Станиславский (17 января), Михаил Ходорковский (26 июня), Никита Хрущёв (17 апреля), Марина Цветаева (8 октября),

Конечно, Бетховен и Аль Капоне – удивительная пара!

Да и Надежда Крупская с Хиллари Клинтон тоже вместе неплохо смотрятся...

А уж про Хрущева с Ходорковским мы умолчим...

Число 9. (Дни рождения 9, 18 или 27.)

Девять – следующее магически сильное число, поскольку в нем утраивается сила «тройки» (9=3x3), а само оно завершает ряд главных чисел, а посему оно определяет «высшие» качества. (С этой точки зрения, 10 есть лишь повторение 1).

Обладатели «девятки» – люди высокого интеллектуального и духовного развития. (Обладатели других цифр – склоните головы... ☺) Им в высшей мере свойственно служить идеалам человечества, вместо того, чтобы преследовать свои корыстные цели.

Это романтичные, страстные и импульсивные идеалисты, которым присуща жажда помогать другим и служить гуманным целям. Из них получаются блестящие педагоги, ученые, художники. Они впечатлительны и доверчивы, постоянно влюбляются и разочаровываются. Однако их жажда делать добро может выражаться с вопиющей надменностью и эгоцентричностью.

Для любознательных: Петр Великий (9 июня), Юрий Гагарин (9 марта), Иоганн Кеплер (27 декабря), Джон Леннон

(9 октября), Пол Маккартни (18 июня), Вольфганг Амадей Моцарт (27 января), Ярослав Мудрый (27 февраля), Булат Окуджава (9 мая), Николо Паганини (27 октября), Герман Титов (18 октября), Лев Толстой (9 сентября), Виктор Черномырдин (9 апреля), Велемир Хлебников (9 ноября)

Хочется надеяться, что читатель убедился, какой это бред – гадание по дате дня рождения. В одной и той же категории оказываются диаметрально противоположные, а порой и просто несовместимые ни о одному значимому параметру(кроме, разве, пола). Так что, если вам попалось неугодное пророчество – наплевать и забыть, а если хорошее, то тешьте свою душеньку на здоровье...

5.3. Магические квадраты

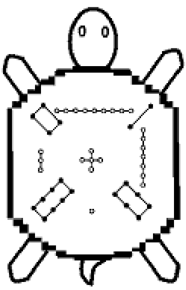
О! До чего же математика мудра ты!
Волнуют кровь магические квадраты...
Лука Умищев

В числах, действительно, есть что-то магическое... И даже мистическое... Но теперь мы это говорим не о каком-то отдельном удивительном числе, которое почему-то привлекало внимание и мудрых философов, и темных суеверных людей, как это было с числом 7. Там есть загадка, но нет разгадки!

А вот есть загадки, которые столь же завораживающи как для тех, кто ищет что-либо мистическое, так и для тех, кто пытается это «магическое» построить сам. Речь идет о так называемых магических квадратах.

Суть задачи такова. Квадрат со стороной длины n разделен на равные квадратные же клеточки, число которых равно, естественно, n^2. В этот квадрат заносятся натуральные числа: 1, 2, 3, ... и так до числа, равного n^2. Числа заносятся не «абы как», а так, чтобы сумма чисел по любому столбцу или по любой строке, а также по любой из диагоналей была бы равна одному и тому же числу!

Задача это не такая уж простая, как может показаться на первый взгляд. (Хотя и не такая уж и сложная: в простых случаях – можете попробовать сами, а еще лучше, просто прочитайте дальше.)



«Магическая» черепаха.

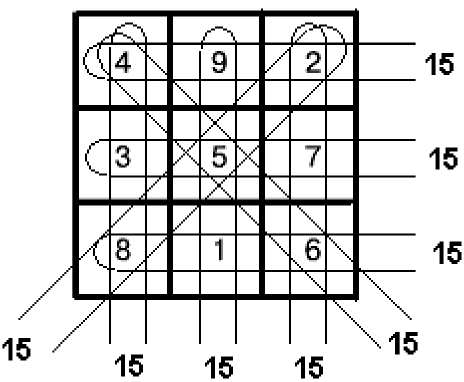
Впервые магический квадрат упоминается в Древнем Китае. Как говорит китайская легенда, во времена правления императора Ю (около II тысячелетия до н.э.) из желтых вод Желтой реки (река Хуанхэ) всплыла священная черепаха (видимо, тоже желтая), на панцире которой были начертаны некие таинственные иероглифы.

Эти знаки, известные под названием *ло-шу*, образуют магический квадрат. Действительно, давайте припишем каждой «бусинке» на рисунке число 1. Тогда рисунок на спине черепахи может быть представлен в виде следующего магического квадрата:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Магический квадрат ло-шу.

Действительно, сумма чисел в любой строке, столбце или диагонали равна пятнадцати!



Свойства квадрата ло-шу.

Китайцы приписывали этому магическому квадрату, естественно, магические же свойства. Такой магический квадрат был у древних китайцев многозначительным символом. Цифра 5 в середине означала Землю, а вокруг нее в строгом равновесии располагались Огонь (2 и 7), Вода (1 и 6), Дерево (3 и 8), Металл (4 и 9).

Давайте теперь займемся построением этого магического квадрата сами. Чему равна «магическая сумма», нетрудно посчитать. В квадрате 3×3 сумма всех чисел равна 1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45. Значит, сумма чисел в каждой рассматриваемой группе из трех чисел (столбец, строка или диагональ) должна быть равна 15.

Расположить натуральные числа от 1 до 9 по тройкам в порядке убывания, чтобы сумма их равнялась бы 15, можно 8 различными способами: 9+5+1; 9+4+2; 8+6+2; 8+5+2; 8+4+3; 7+6+2; 7+5+3 и 6+5+4.

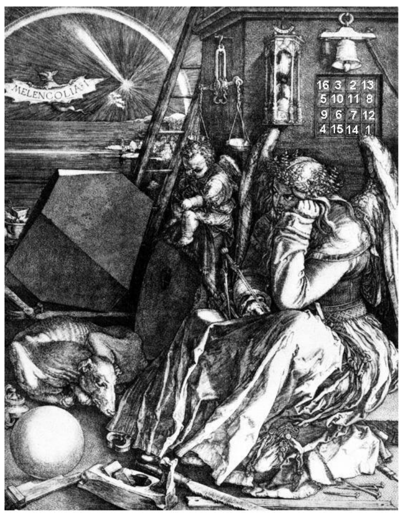
В магическом квадрате 3×3 суммы трех чисел по 8 направлениям (3 строки, 3 столбца и 2 диагонали) должны быть равны магической постоянной 15. Число, стоящее в центре квадрата, принадлежит одной строке, одному столбцу и обеим диагоналям, т.е. оно входит в 4 из 8 троек, дающих в сумме магическую постоянную. Такое число в представленных наборах всего одно и равно оно 5. Следовательно, число, стоящее в центре магического квадрата 3×3, уже известно: оно равно 5.

Возьмем теперь число 9. Оно входит в две из четырех троек чисел. Это число не может быть помещено в угол таблицы, так как оно в этом случае будет принадлежать трем тройкам: двум сторонам и одной диагонали. Следовательно, место для числа 9 только в середине верхней или нижней строки или левого или правого столбца. Выберем в качестве места расположения цифры 9 клетку над цифрой 5 (к любому другому упомянутому размещению можно придти простым поворотом квадрата вокруг центральной клеточки).

По обе стороны от девятки в строке можно разместить только числа 2 и 4, поскольку только они из оставшихся чисел (5 уже занято) в сумме дают 6, необходимое для того, чтобы сумма чисел в строке была бы равна 15. Их положение в строке «2, 9, 4» или «4, 9, 2» опять не имеет значения (они зеркальны). Выберем, например, первое из расположений: «2, 9, 4». По вертикали под 9 и 5 можно поставить только 1, по диагонали в противоположном углу от 2 может быть размещено только число 8, а по диагонали против 4 может быть размещено только число 6. Двум оставшимся цифрам – 3 и 7 – уже просто некуда деваться!

Итак, не только осуществлено построение магического квадрата 3×3, но и показана (даже доказана) его единственность. (Конечно, путем вращения любого магического квадрата вокруг любой из осей симметрии – диагоналей или центральной строки и центрального столбца, могут быть получены другие магические квадраты, но все они будут зеркальными по отношению к только что построенному).

До Индии магический квадрат добрался только в XI веке, а до Японии – еще позже. Европейцы же познакомились с этим «математическим чудом» лишь в XV веке. Первым магическим квадратом, придуманным европейцем, считается квадрат Альбрехта Дюрера[84], который тот изобразил на своей знаменитой гравюре «*Меланхолия»* в правом верхнем углу над головой ангела.



Альбрехт Дюрер. Меланхолия.

Не удивляйтесь, что цифры написаны так ясно и совсем не в стиле Дюрера (а он был сам изобретателем замечательно красивых шрифтов!) – это просто немножечко компьютерных ухищрений ☺.

Получить такой квадрат можно следующим образом. Нужно взять квадрат, разделить его на 16 клеток и в каждую из них вписать по порядку числа от 1 до 16. Затем нужно повернуть обе диагонали относительно центра, что и дает магический квадрат!

[84] **Альбрехт Дюрер** (1471-1528) – великий немецкий художник и график, которого называли Северный Леонардо» за его универсальность и превосходную графику и живопись.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

16	2	3	13
5	10	11	8
9	7	6	12
4	14	15	1

Построение магического квадрата Дюрера.

Дюрер дополнительно переставил у своего квадрата два средних столбца (без потери «магических свойств» магического квадрата), чтобы в центре нижней строки появился год создания гравюры – 1514.

Магическим квадратам приписывали различные мистические свойства. Бытовало поверье, что выгравированный на серебре магический квадрат защищает даже от чумы.

А мусульмане, например, очень благоговейно относились к магическим квадратам с цифрой 1 в середине, считая любой такой квадрат символом единства Аллаха.

5.4. Квадраты, околдовавшие мир

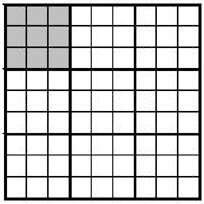
Судачили «судочники» вчера,
Что за судоку все проводят вечера:
И все же не понять с какого боку
Удобней начинать решать судоку?

Лука Умищев

Если вы еще не открыли для себя этой интереснейшей игры, то обязательно познакомьтесь с ней: речь идет о судоку. Это увлекательная головоломка с числами, играя в которую не нужно вовсе знать математику! Она сейчас публикуется в многочисленных газетах и журналах по всему миру, и конечно же вы можете найти на Интернете множество сайтов, посвященных этой игре.

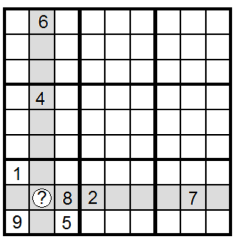
Само название судоку образовано двумя японскими словами: «су» (число) и «доку» (стоящее рядом).

В чем заключается игра? Квадратный лист бумаги делится на девять меньших равных квадратов, каждый из которых, в свою очередь, делится еще раз на девять равных квадратов.



В начальном большом квадрате 9×9 в некоторые ячейки заранее введены определенные цифры. Задачей того, кто решает эту математическую шараду, является заполнение всех свободных клеточек цифрами от 1 до 9 таким образом, чтобы ни в одном столбце и ни в одной строке не встречались бы одинаковые цифры. Как видите, решение обладает одним из свойств магического квадрата, но все же в обычной судоку отличие есть: цифры, стоящие по диагоналям квадратов могут повторяться. Зато в каждом выделенном квадрате 3×3 цифры также различны. Последнее условие и позволяет играть в судоку, не «методом тыка», а целенаправленно, используя логические заключения.

Само решение начинается обычно с «поиска слабого звена», т.е. такой пустой клеточки, где решение однозначно, при этом сравниваются цифры стоящие в соответствующей строке и соответствующем столбце, а также набор остальных цифр в малом квадрате, которому принадлежит данная ячейка. Пример подобной ситуации приведен на рисунке.



По мере заполнения большого квадрата цифрами, решение становится все быстрее и быстрее. Однако, не дай вам Бог ошибиться на промежуточном шаге – вам почти наверняка не удастся «размотать» клубок предыдущих ошибочных ходов! Поэтому игра требует терпения, внимательности и, конечно, сообразительности.

Правильно составленная судоку всегда имеет единственное решение.

Судоку сильно отличаются по сложности. Начните с простых вариантов. (Перед началом игры дьявольскую» судоку православным рекомендуется перекреститься – чем черт не шутит ☺!)

Легкая судоку

4					1			
				3		1		
9		8	5	7	6		4	
3	5			8				4
	7	1	4		3	6	5	
2							8	3
	6		1	4	2	5		8
		2					6	
			9					1

Судоку средней сложности

3		5	9	4				
1			8	7			2	
8					5	3		
	7	2	1	9				
		8				1		
				5	4	2	8	
		3	7					2
	1			8	2			5
				3	9	7		1

Трудная судоку

4					1			
	2			3		1		
9		8	5	7	6		4	
3	5			8				4
	7	1	4		3	6	5	
2				1			8	3
	6		1	4	2	5		8
		2		5			6	
			9					1

"Дьявольская" судоку

3		5	9	4				
1			8	7			2	
8					5	3		
	7	2	1	9				
		8				1		
				5	4	2	8	
		3	7					2
	1			8	2			5
				3	9	7		1

На вебсайте http://www.websudoku.com/ вы найдете тьмы и тьмы судоку различной сложности: около 3 миллиардов простых, около 6 миллиардов средних, около 7 миллиардов сложных, а «дьявольских» так и вообще (Господи, спаси!) аж 10 миллиардов!

Вас поражает число вариантов? Это еще цветочки! Знали бы вы, что полное число всевозможных судоку, как посчитали математики, равно

6 670 903 752 021 072 936 960,

что читается как шесть септиллионов шестьсот семьдесят секстильонов девятьсот три квадриллиона семьсот пятьдесят два триллиона двадцать один миллиард семьдесят два миллиона девятьсот тридцать шесть тысяч девятьсот шестьдесят... Уф-ф-ф!..

Появились судоку и для детей младшего возраста. Например, такие: нужно разместить цифры от 1 до 4 (правила те же.)

Простая

	3		1
1		4	
	4		2
2		3	

Сложная

1			2
	3	4	

Детские судоку.

В последнее время появились модификации более сложные, чем 9 на 9 клеток. Существуют судоку с размерами 15х15 или даже 16х16, предназначенные для опытных игроков.

Также существуют «диагональные” судоку. В них, в отличие от обычных судоку, поле не делится на меньшие квадраты. Требуется, чтобы в каждой строке, в каждом столбце и на двух максимальных диагоналях каждая цифра встречалась только один раз.

3						6		
				8		4		
	2			4				
		6						7
	3	7	9			2	6	
		2			7			4
							1	5
		8	6			3		

Магический квадрат, превращенный в судоку.

Как вы понимаете, такая судоку представляет собой традиционный «магический квадрат» с несколькими изъятыми цифрами. Но существуют «диагональные» судоку, у которых есть и малые квадраты.

Естественно, что чем больше ограничений на построение судоку, тем больше «подсказок» решающему, поэтому в таких судоку число заранее проставленных цифр уменьшается ради сохранения сложность игры.

Многие уверены, что судоку – японская игра. Нет, у этой игры японское лишь название, да «раскрутка» этой игры в мировом масштабе.

Первым прообразом судоку считают головоломки, публиковавшиеся с 1892 года во французской газете «*Век*» («*Le Siècle*»). Эти судоку ещё не приобрели современного вида, но принцип их решения был аналогичен нынешнему. Однако эти головоломки «не пошли»...

В 1979 году 75-летний американский пенсионер Ховард Гарнс напечатал в американском журнале «*Математические головоломки и логические задачи*» задачу под названием: «Размести цифры».

Популярность судоку начала завоевывать (и уже со своим японским именем) лишь после того, как японский журнал «*Nikoli*» начал с 1986 года регулярно публиковать на своих страницах эту головоломку. Но мировой бум начался лишь после того, как в 2004 году во всемирно известной ежедневной лондонской газете «Таймс» начали регулярно печатать судоку. Вскоре «эпидемия судоку» перекинулась на европейский континент...

И в России легко найти судоку в отечественной периодике: возьмите хотя бы газету «Труд».

5.5. Латинские и греко-латинские квадраты

> Увы! В Греко-латинской академии[85] вас не научат ни латинским, ни греко-латинским квадратам...
>
> ***Лука Умищев.***

И все же если говорить не об увлекательной «около-математической игре», а о математике, то математические основы построения подобных квадратов были заложены выдающимся швейцарским математиком Леонардом Эйлером. Он строил так называемые «латинские квадраты», используя латинские буквы вместо цифр в таблице. В этих квадратах каждая буква входила во все строки и столбцы, но нигде не повторялась дважды. (Конечно, при построении латинских квадратов использовать можно любые символы.)

В принципе, латинские квадраты являются близкими родственниками «магических квадратов», с которых снята пелена таинственности. В его архивах, датированных 1776 годом, найдено описание метода построения латинских квадратов больших размерностей, в частности 9×9, 16×16, 25×25 и 36×36.

В работе Эйлера, названной «*Исследование нового типа магических квадратов*», используются пары латинских и греческих букв: был открывает новый класс математических объектов подобного

---

[85] **Славяно-греко-латинская академия** – первое высшее общеобразовательное учебное заведение в Москве, созданное в 1687 году. В 1814 году преобразована в Московскую духовную академию.

типа – так называемые греко-латинские (или греко-римские) квадраты.

Греко-латинским квадратом называется квадрат размерности N×N, в каждой из ячеек клетке которого стоит пара из N различных символов, причем каждый из символов встречается в каждой строке и каждом столбце ровно один раз на первом месте и ровно один раз на втором. Название этих квадратов пошло от Эйлера, который использовал вместо цифр пару греческих и латинских буквы (но латинские всегда стояли на первом месте, а греческие - всегда на втором). Построить греко-латинсий квадрат, имея два «ортогональных»
латинских квадрата (чтобы не отпугнуть читателя мы лишь дадим пример, не давая определения):

a	*b*	*c*	*d*
b	*a*	*d*	*c*
c	*d*	*a*	*b*
d	*c*	*b*	*a*

α	β	γ	δ
γ	δ	α	β
δ	γ	β	α
β	α	δ	γ

*a*α	*b*β	*c*γ	*d*δ
*b*γ	*a*δ	*d*α	*c*β
*c*δ	*d*γ	*a*β	*b*α
*d*β	*c*α	*b*δ	*a*γ

Греко-латинский квадрат.

Полученный греко-латинский квадрат является в некотором роде «двумерным латинским квадратом». (Кстати Эйлер же доказал, что построить аналог латинского квадрата для триплета – например, латинская и греческая буквы и цифра – уже нельзя.)

Говоря о греко-латинских квадратах, следует заметить, что они были известны и до Эйлера, но не как «математические объекты», а как головоломки. Например, известна еще средневековая задача: разложить 16 карт (например, «картинки» разных мастей) по четыре в ряд так, чтобы в каждом ряду и столбце было по одной карте каждой масти и значения.

Кстати, решением этой задачи будет любой из Эйлеровых греко-римских квадратов порядка 4.

Самим Эйлером одна из задач такого рода для квадрата размерности 6×6 была сформулирована примерно так:

В 6 полках служат 36 офицеров 6 различных званий. Нужно так разместить их в каре (т.е. квадратом 6×6), чтобы все офицеры в каждой колонне и шеренге были разных званий и из разных полков.

Эйлер высказал предположение, что эта задача неразрешима. Он же затем показал, что квадратов второго порядка не существует, зато им были найдены квадраты 3-го, 4-го, и 5 порядков. Квадрата 6 порядка обнаружить не удалось, но доказать что их не существует, Эйлеру не удалось. Он высказал гипотезу, что не существует квадрата порядка N, если N чётное число, не делящееся на 4 (то есть N равно 6, 10, 14 и т. д.).

Только в 1901 году его гипотеза была подтверждена для N=6 (да и то лишь путем прямого перебора всех возможных вариантов такого квадрата). А еще через полвека все же обнаружили, что квадрат 10-го порядка существует.

Задачи, сформулированные Эйлером оказались трудным орешком! А ведь он все эти проблемы решал в уме, поскольку к тому времени был абсолютно слеп, различая только свет от тьмы... Он все свои работы надиктовывал своему научному секретарю.

Конечно, Эйлер придумывал свои квадраты не для досужих игр. Он был математиком, и даже творя абстрактные работы, верил, что они не будут пустым украшением математических салонов. И действительно, в настоящее время латинские квадраты широко используются, например, при планировании экспериментов, в теории кодирования (криптологии) и при решении некоторых комбинаторных задач.

3. Numerical pyramids

Pyramids... People have been admiring their mighty, beauty and elegance...

However, there are other pyramids, consisting of numbers. These pyramids conquer our brain by its mathematical elegance. One of the simplest numerical pyramids is presented below:

1×1=	1
11×11=	121
111×111=	12321
1111×1111=	1234321
11111×11111=	123454321
111111×111111=	12345654321
1111111×1111111=	1234567654321
11111111×11111111=	123456787654321
111111111×111111111=	12345678987654321

The next pyramid consists of units only!

1×9+2=	11
12×9+3=	111
123×9+4=	1111
1234×9+5=	11111
12345×9+6=	111111
123456×9+7=	1111111
1234567×9+8=	11111111
12345678×9+9=	111111111
123456789×9+10=	1111111111

And how beautiful is this pyramid of eights!

9×9+7=	88
98×9+6=	888
987×9+5=	8888
9876×9+4=	88888
98765×9+3=	888888
987654×9+2=	8888888
9876543×9+1=	88888888
98765432×9+0=	888888888

Or look at this pyramid:

1×8+1=	9

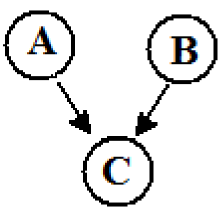
12×8+2=	98
123×8+3=	987
1234×8+4=	9876
12345×8+5=	98765
123456×8+6=	987654
1234567×8+7=	9876543
12345678×8+8=	98765432
123456789×8+9=	987654321

I don't know who invented these numerical pyramids above. However, we should bow to the ground to the inventors of these beautiful mathematical "constructions".

And finally, let us consider the so-called Pascal triangle that will be discussed in detail in the fourth book of the series, which is named "**Enigmatic Terra Al-Jabr".** This triangle has the form:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
…………………………………

In this pyramid each number of the lower level is obtained as the sum of two neighbor numbers, standing just above the number of interest (see explanation in the figure below):



C = A + B

Отец-математик спрашивает сына:
- Назови мне самое большое число.
- Тридцать первое...
- Ну, а если к нему добавить еще единицу?!
- Будет снова первое...

∞ 8 ∞ 8 ∞ 8 ∞

Отец проверяет тетрадку маленького сына:
- Почему ты так неровно пишешь крючочки?
- Это не крючочки, папа, это интегралы.

∞ 8 ∞ 8 ∞ 8 ∞

Отец-математик работает за письменным столом. К нему подходит сын и спрашивает:
- Папа, как пишется цифра восемь?
- Это очень просто: напиши знак «бесконечность» и поверни его на «пи» пополам.

∞ 8 ∞ 8 ∞ 8 ∞

Телефонный звонок:
- Алло, это квартира Абрама Моисеевича Рабиновича?
- Нет, это квартира Ивана Петровича Сидорова.
- Извините, это 314-15-92?
- Нет, это 314-15-91.
- Надо же! В седьмом знаке ошибка, а такой эффект... А говорят еще, зачем вычислять число «пи» с такой точностью!

∞ 8 ∞ 8 ∞ 8 ∞

Не вызывает сомнения, что дважды два - четыре, но иногда хочется чего-то большего...

∞ 8 ∞ 8 ∞ 8 ∞

Не стоит лишний раз умножать числа – их и так уже достаточно много...

∞ 8 ∞ 8 ∞ 8 ∞

Вовочкина Загадка:

Какое самое большое число?
(До фига)

Какое самое маленькое число?
(Ни фига)

ПАНТЕОН

ЕВКЛИД

(365 - 300 до н. э.)

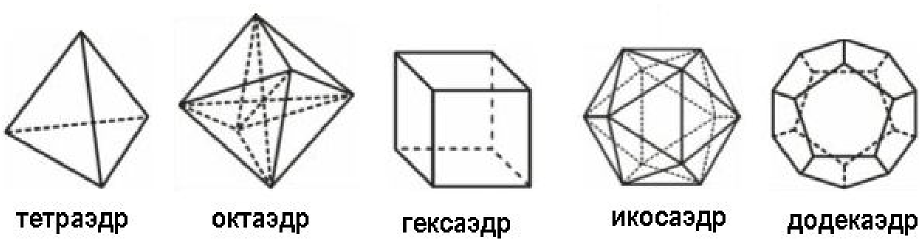
Один из величайших эллинских математиков, автор первых дошедших до нас теоретических трактатов по математике.

Если теорему так и не смогли доказать, она становится аксиомой.

Евклид

Евклид Александрийский является одним из замечательнейших математиков античности, создателем фундаментального 13-томного трактата «*Начала*». Этот труд сделал Евклида ведущим педагогом математики всех времен: по его книгам еще продолжали учиться еще в начале прошлого века. Кроме того, Евклид по достоинству называют «Отцом геометрии».

Сведения о жизни и деятельности Евклида крайне скудны. По некоторым источникам, Евклид родился в небольшом городке Тире, недалеко от Афин, а по другим – в Александрии, столице Египта. Даты его рождения и смерти также весьма условны. Есть основания предполагать, что он был одним из учеников Платона в его Академии. Во всяком случае Евклид был платоником, то есть, последователем школы Сократа[86] и Платона[87]. Он и свой фундаментальный труд «*Начала*» закончил рассмотрением пяти правильных многогранников – так называемых Платоновых тел: тетраэдр (символ огня), гексаэдр, или куб (символ Земли), октаэдр (символ воздуха, икосаэдр (символ воды) и додекаэдр (символ Вселенского Разума).



Одно время историки считали, что под именем Евклида скрывалась группа математиков, наподобие известной французской группы Бурбаки[88], которая существовала в середине прошлого века. Однако была найдена арабская рукопись XII века, где было написано, что «Евклид, сын Наукрата, известный под именем «Геометра»,

---

[86] **Сократ (470 – 399 до н.э.)**, древнегреческий философ, родоначальник философской диалектики, великий педагог, проповедующий честность и открытость в политике. Был приговорен к казни «за введение новых божеств и за развращение молодежи в новом духе». Когда в назначенный час раб принес чашу с ядом цикуты, Сократ, попрощавшись с друзьями, спокойно выпил ее до дна.

[87] **Платон Афинский** (427 – 347 до н.э.), ученик Сократа. Он основал в Афинах Академию, в которой преподавал до конца своих дней. Эта Академия оставалась одной из главных философских школ Европу еще почти тысячу лет. Сочинения Платона, написанные в виде диалогов с Сократом, оказали огромное влияние на развитие философии и до сих пор издаются на многих языках мира.

[88] **Николя Бурбаки** – собирательный псевдоним, под которым группа математиков разных стран, преимущественно французских, выступила в 1937 г. с попыткой дать систематическое изложение современной математики на основе аксиоматического метода, примерно так, как это в свое время сделал Евклид в «Началах». Они создали 30-томный труд «Eléments de mathématiques», но, не завершив его, группа Бурбаки распалась в 1968г.

по происхождению – грек, по месту жительства – сириец, родом из Тира».

Наиболее важный период жизни Евклида связан с Александрией – столицей тогдашней греческой провинции, включающей в свой состав Египет. Правивший тогда страной царь Птолемей[89] привлекал в страну людей науки и искусства, создав для них «*храм муз*» – «*Музейон*» с удобными классами для занятий, обсерваторией, ботаническим садом, зоопарком и прославившейся на весь античный мир великой Александрийской библиотекой. В результате Александрия за жизнь всего одного поколения стала центром культурной жизни античного мира.

В Музейоне собралась плеяда лучших ученых того времени, среди которых был и Евклид. Он создал там свою знаменитую математическую школу.

Подготовленный им для своих учеников математический трактат «Начала» вошел в историю науки, как наиболее читаемая книга по математике в течение многих веков. Задачей этого трактата было систематическое изложение и обобщение математических знаний, накопленных великими предшественниками Евклида – Фалесом, Пифагором, Евдоксом[90], Тэатетом[91], Аристотелем и другими.

В этом трактате Евклид особенно много сделал в развитии геометрии, развив эту важную древнюю науку до уровня, который

---

[89] **Птолемей I Сотер** (360 - 283 до н. э.), один из полководцев (диадохов) Александра Македонского, ставший сатрапом Египта после распада Великой империи Александра. Последней представительницей династии царей Птолемеев была Клеопатра. Не путать с **Клавдием Птолемеем**, великим ученым древности, который, скорее всего, не имел никакого отношения к этому царскому роду.

[90] **Евдокс Книдский** (408-355 до н. э.), младший современник Платона. Астроном, геометр, географ, врач и законодатель. Ещё в юности Евдокс отправился учиться в Афины. Из-за бедности он вынужден был поселиться в афинском порту Пирее и ходил оттуда пешком в столицу (за 11 км), чтобы послушать софистов (учителей мудрости). На родину, в город Книд, он вернулся прославленным учёным и основал там собственную школу. Будучи одним из виднейших математиков древности, он разработал общую теорию пропорций и способ операций с бесконечно малыми величинами, так называемый метод исчерпывания (предшественник современного интегрального исчисления).

[91] **Тэатет Афинский** (417-369 до н.э.), афинский философ и математик, оказавший огромное влияние на развитие античной геометрии.

никто не смог превзойти в течение более, чем двух тысячелетий. В изложении геометрии, которую с тех пор часто называют евклидовой геометрией, он сформулировал аксиоматический метод, господствующий в математике и поныне.

В соответствии с дедуктивной концепцией, Евклид в «Началах» дает определения первичных геометрических понятий в виде аксиом и постулатов, а затем, опираясь на эту базу, приводит единую цепочку из 465 взаимосвязанных между собой теорем. Изложение доказательств теорем в «*Началах*» завершалось выражением «*Quod erat demonstrandum*» – «*что и требовалось доказать*», которое знакомо с тех самых пор всем, кто учил математику. Во всяком случае,моя шкльная учительница математики, завершая доказательство теоремы, всегда писала на доске «Q.e.d.».

Количество рукописных копий сделанных с «*Начал*» оценить буквально невозможно. До нас дошли сотни списков, но, судя по всему, это лишь «надводная часть айсберга». С начала эпохи книгопечатания книга выдержала несколько тысяч изданий (в том числе, и большими тиражами) буквально на всех языках мира. От самого написания и вплоть до начала XX века книга оставалась главным учебником геометрии в школах и университетах.

Существует предание, что царь Птолемей, листая «*Начала*», обратился к автору: «Нет ли более простого пути познания геометрии?» На это Евклид ответил: «В геометрии нет особых дорог даже для царей»

Из других работ Евклида наиболее известны «*Оптика*» и «*Катоптрика*[92]», где излагались законы отражения и преломления света. Если бы даже не было «*Начал*», этих двух книг было бы достаточно, чтобы Евклид вошел в историю, как основатель геометрической оптики. К сожалению, античный текст работ Евклида до нашего времени не дошёл. Древнейшая из сохранившихся копий «*Начал*» датируется IX веком. Однако по ссылкам и выдержки в работах со-

92 Катоптрика (от греческого *katoptrikos - зеркальный*) – раздел оптики, изучающий теорию изображений в зеркале.

временников и последователей Евклида, можно сделать вывод, что ранняя из сохранившихся копий достаточно близка к оригиналу.

Однажды один из учеников Евклида спросил учителя: «Что я буду иметь, выучив геометрию?» Тот позвал своего раба и сказал: «Дай ему пару монет, чтобы он не считал, что потратил время зря».

АРХИМЕД ИЗ СИРАКУЗ

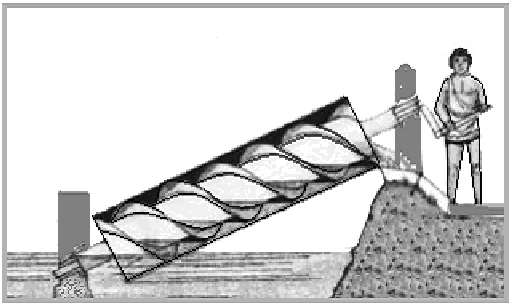
(287 – 212гг. до н.э.)

В голове Архимеда было больше воображения, чем в голове Гомера.
Вольтер.

Один из величайших древне-греческих математиков и физиков, прославившийся также своими удивительными изобретениями.

Архимед родился в Сиракузах, греческом городе, расположенном на острове Сицилия, в семье придворного астронома и математика. Архимед учился вместе с сыном местного царя и получил блестящее образование. Есть предположение, что Архимед – это не имя, а прозвище ученого, данное ему за его личные качества: ведь по-гречески «архимед» означает «*выдающийся ум*».

Почти всю свою жизнь Архимед прожил в Сиракузах, хотя имел обширную переписку с главой Александрийской библиотеки Эратосфеном[93], а также с другими учеными, в частности, с математиками из Александрии, с которыми он делился своими математическими результатами. В предисловии к книге «*О спиралях*», Архимед пишет, что обнаружив, что кое-кто присваивает себе его теоремы, он стал посылать их без доказательств, причем иногда он добавлял и неверные теоремы: «... так что те, кто заявляет, что они открыли нечто, но не могут доказать правильности результата, могут поставить себя в неловкое положение, претендуя на открытие, которое на самом деле совершить невозможно».



По-видимому, Архимед побывал в Египте, где изобрел *архимедов винт*: об этом говорит тот факт, что это его изобретение начали использовать для подъема воды на поля буквально сразу же после открытия.

В некотором смысле, архимедов винт является своеобразной предтечей корабельных, самолетных и вертолетных винтов. Да буквально тот же принцип использован в так хорошо известной нам мясорубке!

Научные заслуги Архимеда трудно переоценить, а число практических инженерных разработок, базирующихся на его теоретических положениях, не может не поражать. Архимед

---

[93] **Эратосфен Киренский** (276-194 до н. э.), знаменитый античный энциклопедист. ***Подробнее о нем см. в Главе 4 «Пантеон» Части 1.***

первым в истории подошел к решению физических задач с широким применением математики, что дает полное основание называть его основоположником математической физики.

Ещё одна из областей приложения таланта ученого – оптика. В его сочинении «*Катоптрика*», дошедшем до нас, к сожалению, лишь в виде ссылок и описаний, сделанных другими античными авторами, описаны свойства изображений в плоских, выпуклых и вогнутых зеркалах, описаны опыты по преломлению света.

Астрономические сочинения ученого не сохранились до наших дней но на них ссылались, и идеи из их приводили великие астрономы античности Гиппарх[94] и Птолемей[95], в частности, в связи с определением длины года. Тит Ливий[96] назвал Архимеда «единственным в своем роде наблюдателем неба и звезд».

В одном из своих поздних сочинений – книге «*Псаммит*»[97], которая обычно переводится как «*Исчисление песчинок*», Архимед пытался определить размеры Вселенной (которая, по представлениям того времени, ограничивалась Солнечной системой). Здесь же он приводит придуманную им схему *октад*, похожую на современное использование показателей степени числа 10. С помощью этой системы записи он мог записывать «астрономические числа».

Повторим сказанное выше: в книге «*Измерение круга*» Архимед с высокой точностью вычислил число π, определив, что оно больше, чем 3,1408, но меньше, чем 3,1428. В повседневной практике того времени обычно принимали число «пи» равным 3, однако столь грубая оценка не удовлетворяла требований точности при астрономических исследованиях.

---

94 **Гиппарх из Никеи** (190-125 до н.э.), древнегреческий ученый, один из основоположников астрономии.

95 **Клавдий Птолемей** (85-165), знаменитый александрийский астроном, математик и географ II века н. э. Одна из крупнейших фигур в истории науки эпохи позднего эллинизма. ***Подробнее о нем см. главу «Пантеон» книги 1.***

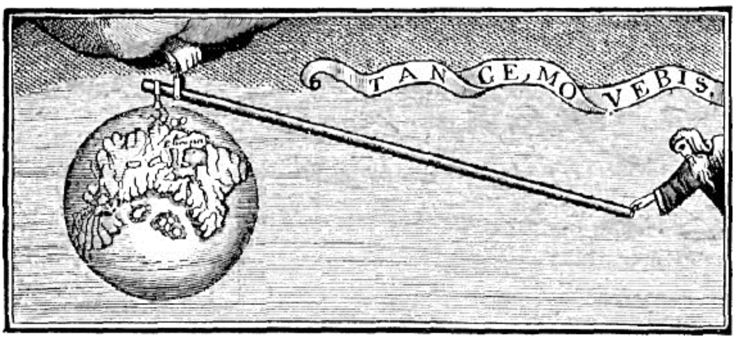
96 **Тит Ливий** (59 г. до н. э. - 17 г. н. э.), крупнейший историк древнего Рима.

97 «Псаммит» происходит от имени греческой «Богини песка» *Псамате* («*psammos*»=«*песок*» и «*theia*»= «*богиня*»).

Архимед для этих целей применил разработанный им «метод исчерпывания», который по праву считается предтечей дифференциального исчисления, развитого до уровня рабочего инструмента математики лишь спустя два тысячелетия Исааком Ньютоном[98] и Готфридом Лейбницем[99]. Используя этот же метод, он нашел и площадь круга.

В трактате «*О равновесии плоских тел*» Архимед дал строгое понятие центра тяжести как точки, «при подвешивании за которую, тело сохраняет первоначальное положение». Им же были даны методы определения центров различных геометрических фигур (треугольника, параллелограмма, трапеции и других).

Создание теории рычага связано с именем Архимеда совершенно однозначно. Каждый знает его крылатую фразу: «*Дайте мне точку опоры, и я переверну Землю*». (В латинской транслитерации это звучит так: «*Dos moipu sto, kai tan gan kinaso*», что переводится буквально, как «*Дай, где стать, и я поверну Землю*»).



Средневековая гравюра: Архимед рычагом поднимает Землю.

По преданию он произнес ее перед царем, который захотел от Архимеда доказательств. Архимед за несколько дней сконструировал блок полиспастов и вскоре на глазах у многочисленных свидетелей, работая лишь одной рукой, начал

[98] **Исаак Ньютон** (1643-1727), один из величайших математиков и физиков всех времен, философ и астроном. ***Подробнее о нем см. в главе «Пантеон» книги 1.***

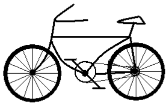
[99] **Готфрид Вильгельм Лейбниц** (1646 - 1716), великий немецкий математик.

медленно двигать по направлению к себе огромный груженый корабль, который едва ли смогли бы сдвинуть с места и все население Сиракуз.

Конечно, Архимед не изобретатель рычага – он был известен и до него, однако математическая модель для расчета рычажных устройств была впервые описана именно в его трактате «*О весах*». Текст самой этой книги до нас не дошел, и лишь цитирование ее содержания другими авторами позволяет восстановить формулировки теорем Архимеда, например: «Грузы уравновешиваются на длинах, обратно пропорциональных тяжестям».

Полиспаст – слово образованное двумя греческими словами "*поли*" = "много" и "*спао*" = "тяну". По сути дела, это идея рычага реализованная в системе блоков.

В качестве «рычагов» выступают диаметры колес. Прикладывая небольшую силу, удается медленно поднимать большой вес. Пожалуй, простейшим механизмом, реализующим идею такого «рычага», может служить передача в обыкновенном велосипеде.

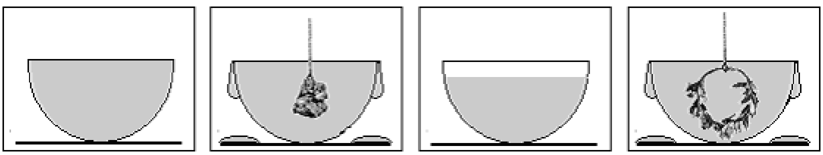


Интересна и другая легенда об Архимеде, согласно которой царь Сиракуз попросил Архимеда проверить, не обманул ли его ювелир, которому он заказал корону. Вес короны соответствовала весу слитка золота, выданного ювелиру царем, однако было подозрение, что ювелир использовал сплав золота с серебром, подменив часть золота более дешевым серебром. Корона была весьма замысловатой формы и напоминала лавровый венец, который надевали на свое чело цари во время празднеств.

Задача была не из простых, и Архимед был ею полностью поглощен. Однажды, находясь в городской бане, он увидел, что при его погружении в ванну, вода, вытесняемая его телом, переливается через край. Архимеда осенило, что объем выплеснувшейся из ванной воды соответствует объему той части его тела, которая уже погрузилась в воду. Тут же ему пришло и решение задачи о проверке состава короны. Он, как был нагишом, бросился по улицам Сиракуз в царский дворец, крича во весь голос о своем открытии: «*Эврика! Эврика!*», что по-гречески означает «*Нашел! Нашел!*».

С тех пор выражение «Эврика!» используется на всех языках, когда кого-то неожиданно осеняет решение давно мучавшей задачи.

Архимед проделал примерно следующее. Он взял золотой слиток, по весу в точности совпадающий с весом короны, и опустил его в чашу, наполненную жидкостью по самые края. Часть воды при этом из чаши вылилась. После этого он вынул золотой слиток, а в оставшуюся жидкость погрузил корону. При этом из чаши вылилось еще немного воды!



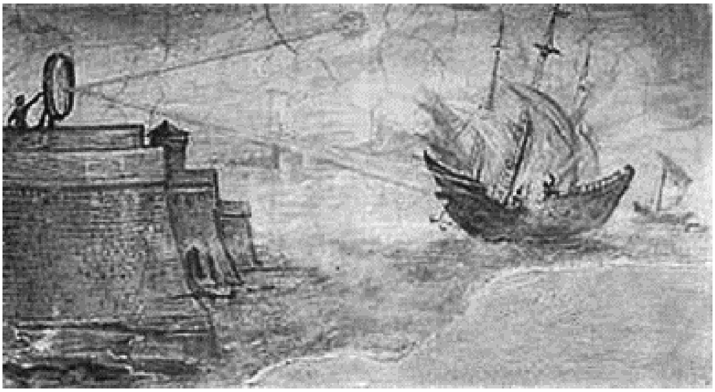
Это могло случиться только благодаря тому, что при равном весе серебро занимало больший объем, чем золото. Так Архимед доказал что мошенник-ювелир действительно утаил часть золота.

Но для потомков было гораздо важнее, что открыл новый физический закон, который носит теперь его имя: *Если твердое тело погрузить в жидкость, оно вытеснит объем жидкости, равный объему погруженной в жидкость части тела*.

Вовочка прибегает домой:

- Мамочка! Нам сегодня про Архимеда в школе рассказывали!
- О, это великий ученый! И что же вам рассказывали?
- Ну, купался он один раз в ванне, вдруг выскочил из нее и голый помчался по городу, крича «Эврика! Эврика!»
- А что это значит, ты понял?
- Нам сказали, это значит «нашел, нашел»...
- А ты понял, чему он был так рад?
- Ну, мыло, наверное, в воде нашел...

Инженерный гений Архимеда особенно ярко проявился при драматических обстоятельствах осады Сиракуз римскими войсками во время Второй Пунической войны между Римом и Карфагеном. По просьбе царя, Архимед еще до войны разработал множество хитроумнейших военных механизмов для обороны города.



Настенный рисунок в галерее Уфицци (Флоренция) , XVII век.

И когда римский полководец Марцелл осадил Сиракузы, против наступающей пехоты противника были использованы гигантские катапульты, метавшие бревна, которые катились на ряды вражеских солдат и сминали их, а также бомбардировали разбегавшихся пехотинцев каменной «шрапнелью».

Отказавшись от захвата города с суши, Марцелл решил захватить город со стороны моря. Но и тут римлян встретили невиданные военные орудия: из-за высокой каменной стены катапульты метали огромные камни весом более 200 килограммов, которые пробивали борта и палубы триер[100]. Причем катапульты могли вести даже прицельный огонь, так как дальностью полета камней можно было управлять.

Одновременно с этим, с городской стены десятки солдат, используя отполированные бронзовые щиты вогнутой формы, поджигали корабли на расстоянии «солнечными зайчиками», которые одновременно фокусировались на какой-либо фиксированной точке.

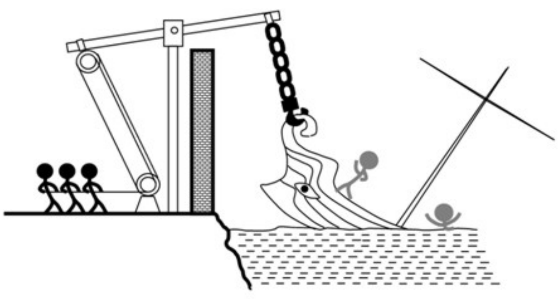
[100] **Триера**, или **трирема** – боевая галера античных времен.

Если корабли противника все же приближались к береговой городской стене, то их ловили на здоровенный «рыболовный» крючок, поднимали в воздух и либо бросали вниз, и они тонули, либо разбивались о скалы.

В XVII веке французский естествоиспытатель Рене Декарт «разоблачил» легенду об этом научно-военном подвиге Архимеда, утверждая, что такое невозможно. Но спустя сто лет другой французский натуралист Жорж Бюффон писал: «История зажигательных зеркал Архимеда широко известна и знаменита. Он изобрел их для защиты своей родины. Древние говорят, что он направил солнечный огонь на вражеский флот и обратил его в пепел. Но подлинность этой истории, в которой не сомневались в течение пятнадцати или шестнадцати веков, была в последнее время подвергнута сомнению и даже признана фантастической. Декарт отрицал возможность подобного изобретения, и его мнение одержало верх над свидетельствами ученых и писателей античной эпохи. Современные физики разделяют его мнение».

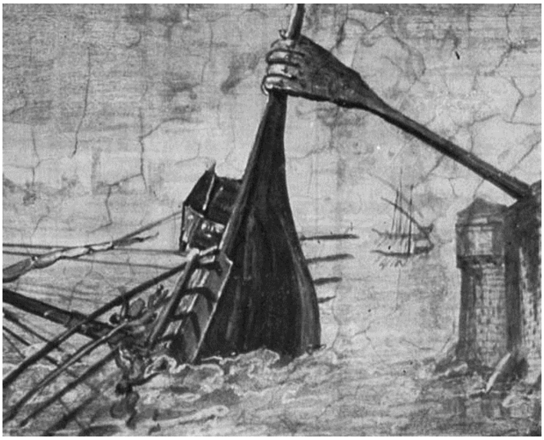
Чтобы «обжаловать» приговор Декарта, нужны были не умозрительные заключения, а эксперименты. И Бюффон создал зеркало, которое зажигало дерево на расстоянии 50 метров. Позднее он саркастически заметил: «Ничто так не заразительно, как заблуждение, поддерживаемое громким именем».

А в середине прошлого века один греческий инженер уже буквально повторил эксперимент Архимеда: он выстроил около сотни солдат, каждый из которых держал отполированный бронзовый лист размером примерно метр на полметра. Солнечные «зайчики» были направлены в одну точку на модели античной триеры, что быстро привело к возгоранию судна.



Как работал «рыболовный крючок Архимеда».

Более живописное изображение можно увидеть на тех же фресках из итальянской галереи Уфицци.



Настенный рисунок в галерее Уфицци (Флоренция), XVII век.

Флот Марцелла также обратился в бегство. Римскому командующему не оставалось ничего, кроме как попытаться взять город измором.

Сиракузы долгое время успешно выдерживали осаду римской армии. К несчастью, успехи в отражении вражеских атак привели к потере бдительности. Во время бурного празднества в честь богини охоты Артемиды Марцеллу удалось прорваться в город со стороны суши и захватить его. Когда Сиракузы пали под натиском римлян, разъяренные захватчики устроили в городе погромы и страшную резню.

Погиб и Архимед. Его вошедшая в историю античности гибель от руки римского воина описана великими историками более поздних времен – Ливием[101] и Плутархом[102].

По преданию, римский полководец Марцелл высоко ценил инженерный гений Архимеда., Марцелл послал одного из своих солдат, чтобы тот нашел и привел к нему ученого. Архимед не обратил внимания на приказ солдата следовать за ним, а когда тот подошел к нему и наступил на его рисунок , Архимед гневно

---

101 **Тит Ливий** (59 до н. э. - 17 н. э.), один из самых известных римских историков.

102 **Плутарх из Херонеи** (50 -120 н. э.) – греческий философ и биограф.

вскричал: «Не трогай моих чертежей!». Солдат, не раздумывая, пронзил старика мечом...

Гравюра 18 века: «*Noli turbare circulos meos!*»
(«Не нарушай моих кругов!»).

Узнав о кончине Архимеда, Марцелл очень огорчился и разрешил его родственникам похоронить ученого с почестями. На могиле великого мыслителя по его завещанию поставили могильный камень, на котором был высечен шар, вписанный в цилиндр. Такова легенда.

Правда, спустя полтора столетия Цицерон[103], посетивший Сиракузы, писал, что на заброшенном участке кладбища он увидел потерявшуюся в кустах наполовину погрузившуюся в землю колонну с изображением цилиндра с шаром. Он приказал сопровождавшим его сиракузцам откопать памятник, на котором оказалась эпитафия, посвященная Архимеду.

Говоря о надгробии Архимеда, нужно заметить, что свою знаменитую теорему о том, что объем сферы относится к объему описанного цилиндра,

103 **Марк Туллий Цицерон** (106- 43 до н. э.), древнеримский политик и философ, один из самых блистательных ораторов всех времен.

как 2:3, сам Архимед относил к своим важнейшим математическим открытиям. Во всяком случае, Плутарх сообщает, что Архимед еще задолго до войны завещал установить на его могиле надгробный памятник в виде цилиндра, описанного вокруг шара, с указанием отношения объемов двух этих тел.

Этот результат Архимед изложил в своей работе «*О сфере и цилиндре*». Действительно,

$$\frac{(4/3)R^3}{4\pi R^2 + 2\pi R^2} = \frac{2}{3}.$$

В той же работе он нашел, что и площади этих двух фигур соотносятся в той же пропорции:

$$\frac{4\pi R^2}{4\pi R^2 + 2\pi R^2} = \frac{2}{3}.$$

Объем и поверхность цилиндра к тому времени уже умели подсчитывать, а шар все еще оставался загадкой... Поэтому результат Архимеда был очень важен с теоретической точки зрения.

Результаты, полученные Архимедом, выглядят еще более впечатляющими, если соотнести их с тем временем, в котором он жил. В самых различных сферах человеческих знаний он сделал множество замечательных открытий, которые оставались непревзойденными много столетий после него.

ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР

(1707–1783)

Читайте, читайте Эйлера – он наш общий учитель.
Пьер Лаплас

Чем меньше бог вмешивается в дела мира и науки, тем лучше и для науки, и для авторитета бога.
Леонард Эйлер

Эйлер принадлежит к числу гениев, чье творчество стало достоянием всего человечества. Открытия Эйлера в математике, механике, физике и технике прочно вошли в современную науку. Эйлер входит в первую пятерку величайших математиков всех времен и народов. Его часто называют идеальным математиком XVIII века.

Эйлер родился в Швейцарии в городе Базеле, а детство свое провел детство в близлежащем селении Рихен, где его отец был священника сиротского дома … Отец готовил своего старшего сына к духовной карьере. Однако, имея интерес к математике (некогда он обучался у самого Якоба Бернулли[104]), приобщил к ней и сына,

---

104 **Якоб Бернулли** (1654 – 1705), швейцарский математик, один из представителей уникального «математического клана» Бернулли: в течение свыше 250 лет в Базельском университете всегда были профессора Бернулли, а кафедрой математики Бернулли заведовали более ста лет.

считая, что «наука всех наук» поможет развить у юного Леонарда логическое мышление.

Когда дошло дело до получения формального образования, мальчика послали под надзор бабушки в Базель, где он поступил в латинскую гимназию. В 13 лет, он уже стал студентом факультета искусств Базельского университета.

Леонард легко усваивал все учебные предметы, но отдавал безусловное предпочтение математике. И немудрено, что способный мальчик вскоре обратил на себя внимание Иоганна Бернулли[105], преподававшего математику. Тот стал заниматься с ним отдельно, а вскоре публично заявил, что от проницательного и острого ума юного Эйлера он ожидает самых больших успехов.

В доме своего учителя Эйлер встретился с его сыновьями – Николаем и Даниилом, также увлечённо занимавшимися математикой. Дружба с ними продолжалась всю жизнь.

Через три года после поступления в университет, будучи в возрасте, когда основная масса юношей лишь поступает в университет, 17-летний Леонард Эйлер произнёс на латыни великолепную речь о сравнении философских воззрений Декарта и Ньютона и был удостоен учёной степени магистра философии. Затем по воле отца, приступил к изучению восточных языков и богословия.

В последующие два года юный Эйлер написал несколько научных работ. Работа по акустике, была столь хороша, что автора даже пригласили участвовать в конкурсе на замещение должности профессора физики. Однако администрация Базельского университета сочла, что для такой позиции кандидат слишком юн. Кто знает, что было бы с юным талантом, если бы ему «повезло» и он окунулся в рутинную жизнь большого и респектабельного университета?

В 1724 году в России, по замыслу Петра I была учреждена Петербургская Академия Наук, в организации которой принимал активное участие Готфрид Лейбниц, приславший по просьбе русского царя нескольких писем-рекомендаций по организации Академии.

---

105 **Иоганн Бернулли** (1667-1748), швейцарский математик, младший брат Якова Бернулли. Три сына Иоганна – Николай, Даниил и Иоганн также были профессорами математики, первые два стали академиками Петербургской академии наук.

Среди 22 профессоров и адъюнктов, приглашённых в первые годы, оказалось 8 математиков, занимавшихся проблемами механики, физики, астрономии и картографии… Среди первых приглашенных иностранцев оказались и оба друга Эйлера – Николай и Даниил Бернулли. Через два года по их рекомендации Эйлер был приглашён на должность адъюнкта по физиологии. У себя на родине он не смог найти себе достойного применения, поэтому он принимает приглашение и навсегда покидает Швейцарию.

В Петербурге он сразу же с головой погрузился в научную работу, поражая всех удивительной работоспособностью и потрясающей плодотворностью своей деятельности. Многочисленные его публикации в изданиях Петербургской Академии наук вскоре принесли ему известность в Европе.

В 1730 году на русский престол вступила Анна Иоанновна, при которой Академия наук впала в немилость: новые правители страны не видели от нее ощутимой пользы. Тем не менее, науку убить уже было невозможно.

Вскоре Эйлер получил сначала кафедру физики, затем кафедру математики. В 1731 году 26-летний Эйлер стал академиком. Вскоре он обвенчался с дочерью одного из петербургских живописцев – так началась его счастливая семейная жизнь. У них родилось тринадцать детей, но только 8 из них выжило. Все свое свободное время, которого у него было чрезвычайно мало, он уделял их воспитанию...

Эйлер работал буквально фанатически. В 1735 году от Академии потребовали срочно выполнить очень сложные астрономические вычисления. Группа академиков просила на эту работу три месяца, Эйлер же взялся выполнить ту же работу всего за три дня и справился с этой задачей!

Однако недосыпания, нервное перенапряжение и интенсивная работа сказались: он заболел нервной горячкой, следствие которой было воспаление правого глаза, которое привело к его потере... Однако учёный отнёсся к несчастью стоически: «Теперь я меньше буду отвлекаться от занятий математикой», – сказал он.

Его двухтомное сочинение «*Механика, или наука о движении, в аналитическом изложении*», опубликованное в 1736 году, принесло ему мировую славу. В этой работе Эйлер искусно применил математические методы к решению проблем движения в пустоте и в среде с сопротивлением. Именно с этого момента теоретическая механика становится математической дисциплиной.

Осенью 1740 года внутренняя обстановка в России после смерти императрицы Анны Иоанновны была накалена до предела. «Предвиделось нечто опасное, – писал Эйлер в своей автобиографии. – После кончины достославной императрицы Анны положение начало представляться неуверенным». В это время прусский король Фридрих Великий приглашает Эйлера переехать в Берлин для работы в Королевской академии.

Ученый не только был «отпущен от Академии», но даже был утверждён почётным академиком с ежегодной пенсией. Эйлер, в ответ на это, взял на себя обязательства по дальнейшему сотрудничеству с Петербургской Академией. И он действительно активно сотрудничал с Академией в течение почти 25 лет, до своего возвращения обратно в Россию.

Летом же 1741 года Леонард Эйлер со всей своей многочисленной семьей прибыл в Берлин.

Через год учитель Эйлера – Иоганн Бернулли присылает своему ученику в Берлин четырёхтомное собрание сочинений, написав в сопутствующем письме: «Я посвятил себя детству высшей математики. Ты, мой друг, продолжишь становление математики в ее зрелости».

И действительно, Иоганн Бернулли не ошибся: Эйлер публикует одну за другой первоклассные работы: «*Введение в анализ бесконечных*» (1748 г.), «*Морская наука*» (1749 г.), «*Теория движения луны*» (1753 г.), «*Наставление по дифференциальному исчислению*» (1755 г.), не считая десятков статей в изданиях Берлинской и Петербургской Академий. Эйлер писал в год около тысячи страниц, его работы затрагивали не только все вопросы чистой и прикладной математики: здесь механика и теория чисел, математический анализ и теория музыки, астрономия и физика, теория вероятностей и оптика, теория графов и комбинаторика… Эйлер открывает вариационное исчисление – одну из важнейших ветвей современной математики.

Вскоре Эйлер избирается членом четырёх академий наук. Всемирная слава не вскружила голову Эйлеру: современники вспоминали, что он всю жизнь оставался скромным, жизнерадостным и отзывчивым человеком.

Работоспособность Эйлера удивительна: он писал в год почти тысячу страниц сложнейших математических текстов! Такой

уникальной работоспособности и продуктивности наука не знала и не знает до сих пор.
Когда в 1759 году умирает президент Берлинской Академии наук, король Фридрих II предлагает пост президента Даламберу, который однако его отклоняет. Тогда король поручает Эйлеру, которого он за что-то недолюбливал, руководство Академией, но ...без титула президента.

В 1762 г. на русский престол вступила Екатерина Вторая, или Великая, которая буквально сразу же послала Эйлеру приглашение вернуться в Петербургскую Академию наук на любых условиях: управлять математическим отделением Академии, быть секретарем Академии с окладом 1800 рублей в год (очень немалые по тем временам деньги!). «А ежели не понравится, – говорилось в письме, – благоволите сообщить свои условия, но лишь не медлите с приездом в Петербург».

Эйлер подаёт Прусскому императору прошение об увольнении со службы, но не получает ответа. Тогда он пишет вторично... Наконец, Эйлеру разрешено уехать в Россию. Эйлер возвращается в Россию, теперь уже навсегда.

Сразу же по прибытии, Эйлер был принят российской императрицей, которая осыпала учёного царскими милостями: пожаловала деньги на покупку дома на Васильевском острове и на приобретение мебели, и даже предоставила ему одного из своих поваров.

Вскоре Эйлер почти полностью ослеп в результате катаракты оставшегося глаза. Но и это не снизило его плодотворной деятельности: полуслепой Эйлер диктовал своим ученикам результаты своих размышлений.

Летом 1771 года в Петербурге возник большой пожар, уничтоживший множество домов, включая и дом Эйлера. Самого учёного едва спасли. К счастью, удалось уберечь от огня почти все рукописи, кроме «*Новой теории движения луны*». Эйлер восстановил весь текст книги по памяти – до глубокой старости он сохранил феноменальную ясность ума. Осенью того же года в Санкт-Петербург прибыл известный немецкий окулист, который сделал удачную операцию, после которой Эйлер снова стал видеть.

Однако, не вняв предписанию врача щадить глаз от нагрузок хотя бы первое время, Эйлер уже через несколько дней после операции снял повязку, что привело к окончательной потере зрения...

В 1773 году Даниил Бернулли рекомендовал Эйлеру в помощники своего ученика Николауса Фусса, который, обладая математическим талантом, умел прекрасно вести практические дела. Он сразу же после приезда из Базеля взял на себя заботы о научных трудах Эйлера. Женившись на внучке Эйлера, Фусс стал его ученым секретарем, коим и оставался до самой смерти ученого.

В последние годы жизни учёный продолжал неистово работать. Он диктовал свои работы Николаусу Фуссу, которого в России величали Николаем Ивановичем Фуссом. Даже после избрания Фусса академиком, тот продолжал исполнять свои секретарские обязанности при Эйлере: он подготовил к публикации около 300 работ, что составляло почти половину научного наследия Эйлера.

Осенью 1783 года Эйлер стал ощущать головные боли и слабость. 18 сентября, беседуя с одним из коллег-академиков о недавно открытой планете Уран, Эйлер внезапно почувствовал себя плохо. Успев лишь произнести «Я умираю», он упал без чувств. Скончался он от кровоизлияния в мозг, не приходя в сознание. В одном из некрологов было написано: «Эйлер перестал жить и вычислять».

Похоронен был Эйлер на Смоленском лютеранском кладбище в Санкт-Петербурге. Скромная надпись на памятнике гласила: «Леонарду Эйлеру – Петербургская Академия».

В 1955 году, спустя почти 200 лет, прах великого математика и надгробный памятник были перенесены в «Некрополь XVIII века» в Александро-Невской лавре.

* * *

Научный авторитет Эйлера при жизни был поистине безграничен. Он состоял почетным членом всех крупнейших академий и ученых обществ мира. Влияние его трудов на современную науку было весьма значительным. В 1849 году Карл Гаусс писал, что «изучение всех работ Эйлера останется навсегда лучшей, ничем не заменимой, школой в различных областях математики».

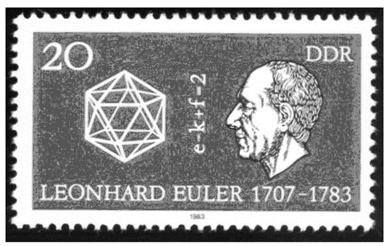
Общий объем сочинений Эйлера громаден. Свыше 800 его опубликованных научных работ составляют около 30 000 печатных страниц. Все это составит 72 тома Полного собрания трудов («*Opera omnia*») Эйлера, издаваемого в Швейцарии с 1911 и только лишь в наши дни приближающегося к своему завершению.

В честь Леонарда Эйлера выпущено несколько почтовых марок в разных странах.

Швейцария

ГДР

СССР



Швейцария

ГДР

СТРАНИЧКА САМОРЕКЛАМЫ

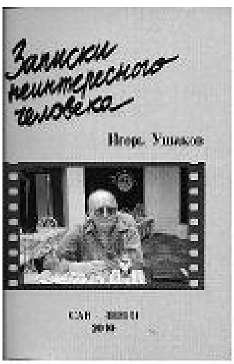
Как я уже писал, в Москве издательством URSS (УРСС) опубликованы 8 книг серии «История науки сквозь призму озарений». Эти книги прекрасно изданы и имеют вполне божескую цену.

Надеюсь, они все же попадут на американский книжный рынок, тогда отпадет необходимость в моих «самиздатских» вариантах. А пока... Мои друзья могут эти книги заказать на моем закрытом сайте. Как эти книги приобрести, написано ниже.

У меня есть еще три книги, близкие по духу тем, которые уже представлены.

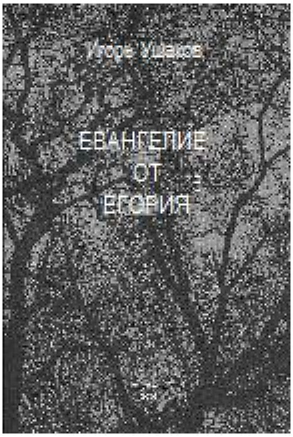
Это две книги про рукотворные и нерукотворные чудеса мира и книга о загадке жизни (теории возникновения и развития жизни на Земле).

Кроме того, есть чисто литературные вещи, которые не требуют специальных комментариев:

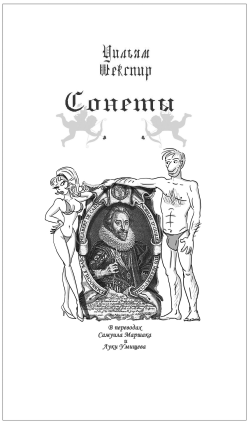


А также «джентльменский» набор:

И еще парочка книг, не предназначенных для религиозных людей.



Совсем свежее «пополнение» - шутливые переводы сонетов Шекспира.



Все эти книжки <u>можно заказать</u>: Набираете в Интернете адрес: http://www.lulu.com/shop**. В поисковой строке набираете по-русски «ушаков». Дальше – выбирайте! Литературные книги продаются по себестоимости (non-profit). Литературные книги можно скачать бесплатно.**

Если будут трудности или вопросы, пишите по адресу

igusha22@gmail.com.

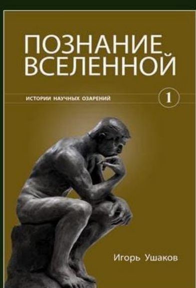
...........Книги, изданные в Москве издательством URSS, можно купить, к сожалению, пока только в России и в Украине. Справки по телефону: 8(499)724-25-45. Емейл: orders@URSS.ru**.**
Адрес магазина: **117335, г. Москва, Нахимовский проспект, 56.**

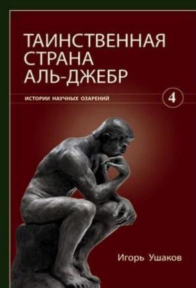
San Diego, California.

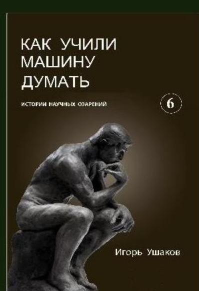
Окончил Московский авиационный институт. Доктор технических наук, профессор. Руководил научными отделами в научно-иследовательских институтах военно-промышленного комплекса бывшего Советского Союза, а затем заведовал отделом в Вычислительном Центре АН СССР (ныне ВЦ им. Дородницына РАН). Параллельно с основной работой заведовал кафедрой «Большие системы» Москов ского Физтеха, читая курсы по прикладной математике. Более 50 его учеников успешно защитили кандидатские диссертации, девять из них стали докторами наук.

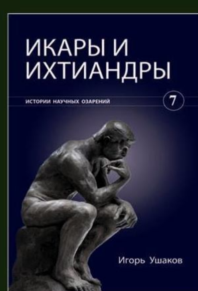
В 1989 г. был приглашен в США в Университет Джорджа Вашингтона, а затем преподавал в Калифорнийском университете (Сан-Диего). Работал в качестве главного научного специалиста в ряде крупных американских компаний.

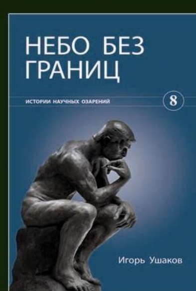
Опубликовал около 30 научно-технических монографий в России, США, Германии, Болгарии и Чехословакии. Автор около 400 научно-технических статей, опубликованных в ведущих российских и международных журналах. Издал в России дюжину научно-популярных книг, переведенных в США. Кроме того, его перу принадлежит восемь книг прозы и стихов.











ISBN 978-1-257-08384-8
90000
9 781257 083848